

# Analisis Kestabilan Pada Model Mangsa Pemangsa Dengan Fungsi Respon Beddington-DeAngelis dan Pemanenan Terhadap Pemangsa

Vernanda Aprilia<sup>a,\*</sup>, Dian Savitri<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Mahasiswa Matematika, Universitas Negeri Surabaya, Jalan Ketintang, Surabaya 60231, Indonesia

<sup>b</sup> Dosen Matematika, Universitas Negeri Surabaya, Jalan Ketintang, Surabaya 60231, Indonesia

\* Alamat Surel: [vernandaapriliah@mahasiswa.unesa.ac.id](mailto:vernandaapriliah@mahasiswa.unesa.ac.id).

## Abstrak

Artikel ini membahas mengenai analisis kestabilan pada model interaksi mangsa pemangsa dengan adanya pemanenan terhadap pemangsa. Pemanenan pada populasi pemangsa menggunakan pemanenan dengan upaya konstan. Pemanenan pada dinamika mangsa pemangsa dapat menstabilkan keseimbangan kedua populasi agar tetap ada. Model matematika mangsa pemangsa dengan menggunakan fungsi respon Beddington-DeAngelis, dan upaya pemanenan konstan pada populasi pemangsa. Tahapan yang dilakukan dalam analisis dinamik meliputi, mencari titik kesetimbangan, melakukan linearisasi sistem, dan melakukan analisis kestabilan titik kesetimbangan menggunakan nilai eigen. Simulasi numerik digunakan untuk mengkonfirmasi hasil analitik dan perilaku analisis sistem melalui ilustrasi grafis *Matcont* dan *Pplane*. Nilai parameter menggunakan populasi bakteri bersel satu yaitu, *Paramecium Aurelia* sebagai mangsa dan *Didinium Nasutum* sebagai pemangsa. Hasil analisis kestabilan dari model diperoleh tiga titik kesetimbangan yaitu,  $E_0 = (0,0)$  dan  $E_1 = (1,0)$  adalah *saddle* tidak stabil. Sedangkan  $E_2 = (x_1, y_1)$  adalah *nodal sink* stabil. Kontinuitas parameter pemanenan pada pemangsa ( $P$ ) diperoleh bifurkasi transkritikal. Bifurkasi transkritikal terjadi apabila terdapat persilangan dari dua cabang titik kesetimbangan dari *nodal sink* stabil menjadi *saddle* tidak stabil, begitu pula sebaliknya. Hasil analisis menunjukkan Semakin besar laju pemanenan ( $P$ ), populasi pemangsa menurun menuju kepunahan. Sedangkan populasi mangsa akan tetap stabil sampai waktu  $t$  menuju tak hingga. Sebaliknya ketika laju pemanenan ( $P$ ) kecil, populasi mangsa dan pemangsa dapat hidup berdampingan dan tidak mengalami kepunahan sampai waktu  $t$  menuju tak hingga.

Kata kunci:

Mangsa Pemangsa, Pemanenan, Bifurkasi Transkritikal, Beddington-DeAngelis

© 2020 Dipublikasikan oleh Jurusan Matematika, Universitas Negeri Semarang

## 1. Pendahuluan

Model dinamika populasi sudah banyak dikembangkan dalam bidang matematika biologi. Model ini menggambarkan peristiwa perubahan yang terjadi pada suatu populasi, khususnya ekologi. Ekologi merupakan cabang ilmu biologi yang mempelajari interaksi antara suatu spesies dengan lingkungannya (Roy, Roy, & Gurung, 2017). Interaksi antara mangsa dan pemangsa merupakan salah satu contoh faktor umum dan terkenal dalam sistem ekologi. Model mangsa pemangsa pertama kali diperkenalkan oleh Alfred J. Lotka pada tahun 1925 dan Vito Volterra pada tahun 1926. Salah satu komponen terpenting dari hubungan mangsa pemangsa adalah fungsi respon. Fungsi respon menggambarkan pola interaksi antara mangsa dan pemangsa yang menyatakan jumlah mangsa yang dikonsumsi oleh setiap pemangsa per satuan waktu (Chakraborty et al., 2012). Fungsi respon memiliki peran penting dalam populasi ekologi karena implikasinya yang luas pada dinamika populasi.

Pola interaksi atau yang dikenal sebagai fungsi respon dalam penelitian ini adalah Beddington-DeAngelis. D. L. DeAngelis et al (1975) pertama kali memperkenalkan fungsi respon yang lebih umum, untuk solusi dari masalah mengenai model interaksi trofik mangsa pemangsa klasik, dan kemudian

To cite this article:

Aprilia, V., Savitri, D. (2020). Analisis Kestabilan Pada Model Mangsa Pemangsa Dengan Fungsi Respon Beddington-DeAngelis dan Pemanenan Terhadap Pemangsa. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika 3*, 104-113

dilanjutkan oleh Beddington (1975) untuk menggambarkan interaksi antara inang parasit. Fungsi respon Beddington-DeAngelis memberikan dekripsi bahwa pemangsaan tidak hanya bergantung pada populasi mangsa tetapi juga pada populasi pemangsa serta adanya batasan proteksi lingkungan (Haque, 2011).

Salah satu penelitian yang telah menggunakan fungsi respon Beddington-DeAngelis yaitu penelitian yang dilakukan Lee & Baek (2017) dengan judul “*Dynamics of a Beddington-DeAngelis-type predator-prey system with constant rate harvesting*”. Penelitian ini menggunakan fungsi respon Beddington-DeAngelis dengan pemanenan konstan pada mangsa. Selain itu Chakraborty et al (2012) dengan judul “*Predator-prey interaction with harvesting : mathematical study with biological ramifications*”. Penelitian ini melakukan modifikasi model yang melibatkan pemanenan upaya konstan pada pemangsa menggunakan fungsi respon Ratio Dependent.

Terinspirasi dari kedua penelitian sebelumnya, maka penulis tertarik melakukan penelitian terhadap interaksi mangsa pemangsa menggunakan fungsi respon Beddington-DeAngelis dengan melibatkan pemanenan terhadap populasi pemangsa. Pemanenan pada pemangsa menggunakan pemanenan dengan upaya konstan yang dikaji oleh Chakraborty et al (2012). Menurut Hu & Cao (2017) pemanenan dengan upaya konstan, yaitu pemanenan proposional yang hasil panennya meningkat secara proposional di setiap hari. Pemanenan pada dinamika sistem mangsa pemangsa menarik dalam segi ekologi yaitu, untuk menstabilkan keseimbangan kedua populasi tetap ada atau tidak berlebihan di populasi yang lain. Pemilihan fungsi respon Beddington-DeAngelis karena dalam pemangsaannya tidak hanya bergantung pada populasi mangsa tetapi juga pada populasi pemangsa, serta adanya batasan proteksi lingkungan. Tujuan dari penelitian ini untuk mengetahui hasil analisis pengaruh adanya pemanenan pada pemangsa terhadap kepadatan populasi mangsa dan pemangsa.

---

## 2. Metode Penelitian

Model mangsa pemangsa yang akan dikaji adalah model matematika sistem interaksi dua spesies mangsa dan pemangsa dengan menggunakan fungsi respon Beddington-DeAngelis dan pemanenan terhadap pemangsa. Berikut ini adalah tahapan dalam rancangan penelitian:

### 2.1 Menentukan Titik Keseimbangan

Menentukan titik keseimbangan dengan menggunakan solusi ekuilibrium dengan membuat ruas kanan sama dengan 0 dari masing-masing persamaan.

### 2.2 Menganalisis Kestabilan Titik Keseimbangan

Kestabilan sistem linear dilakukan berdasarkan kriteria nilai eigen dari matrik Jacobian. Setelah sistem linear, langkah berikutnya yaitu mensubstitusikan titik keseimbangan pada matrik Jacobian. Setelah disubstitusikan maka akan diperoleh matrik baru dan dicari nilai eigen dari sistem tersebut.

### 2.3 Simulasi Numerik

Simulasi pada model mangsa pemangsa menggunakan aplikasi *Matcont* dan *Pplane*. Hasil yang diperoleh untuk mengkonfirmasi hasil perhitungan kestabilan titik keseimbangan dengan simulasi numerik. Selain itu untuk mengilustrasikan perilaku model matematika pada sistem interaksi mangsa pemangsa ketika nilai parameter diubah-ubah.

---

## 3. Model Matematika

Model interaksi mangsa pemangsa menggunakan fungsi respon Beddington-DeAngelis dan pemanenan terhadap pemangsa sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= x(1-x) - \frac{mxy}{ux+y+1} & x(\tau) &> 0 \\ \frac{dy}{d\tau} &= \frac{exy}{ux+y+1} - cy - Py & y(\tau) &> 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Pada sistem persamaan (1)  $x, y$  diasumsikan sebagai kepadatan populasi mangsa dan pemangsa pada waktu  $t$ . Tingkat predasi pada sistem persamaan (1) menggunakan fungsi respon Beddington-DeAngelis,

yaitu  $\frac{mxy}{ux+y+1}$  dan  $\frac{exy}{ux+y+1}$  dengan  $m$  adalah tingkat predasi maksimum pemangsa,  $u$  adalah koefisien kepadatan populasi mangsa, dan  $e$  adalah tingkat konversi yang menunjukkan jumlah pemangsa yang baru terlahir untuk setiap mangsa yang ditangkap. Populasi pemangsa ketika tidak berinteraksi dengan mangsa, maka populasi pemangsa akan berkurang dan tidak dapat bertahan hidup karena mangsa merupakan makanan utama bagi pemangsa, diasumsikan  $c$  adalah tingkat kematian alami pemangsa ketika tidak ada mangsa. Populasi pemangsa selain berkurang karena kematian alami juga diasumsikan akan berkurang dengan adanya pemanenan, dengan  $P$  adalah upaya pemanenan konstan pada populasi pemangsa.

#### 4. Hasil dan Pembahasan

##### 4.1 Titik Kesetimbangan

Menentukan titik kesetimbangan menggunakan solusi ekulibrium dengan membuat ruas kanan sama dengan 0 dari masing-masing persamaan. Sehingga sistem persamaan (1) diperoleh :

$$x(1-x) - \frac{mxy}{ux+y+1} = 0 \quad (2)$$

$$-cy + \frac{exy}{ux+y+1} - Py = 0 \quad (3)$$

Berdasarkan persamaan (2) diperoleh :

$$x(1-x) - \frac{mxy}{ux+y+1} = 0$$

$$x = 0 \quad (4)$$

atau

$$1-x - \frac{my}{ux+y+1} = 0 \quad (5)$$

Sementara itu, berdasarkan persamaan (3) diperoleh :

$$-cy + \frac{exy}{ux+y+1} - Py = 0$$

$$y \left( -c + \frac{ex}{ux+y+1} - P \right)$$

$$y = 0 \quad (6)$$

atau

$$\left( -c + \frac{ex}{ux+y+1} - P \right) = 0 \quad (7)$$

Substitusi  $y = 0$  pada persamaan (6) ke dalam persamaan (2), sehingga diperoleh titik kesetimbangan  $E_0 = (0,0)$  dan titik kesetimbangan  $E_1 = (1,0)$ .

Kemudian ambil  $x = x^*$  di mana  $x$  merupakan nilai dari titik kesetimbangan  $x^*$ , untuk populasi mangsa.

Dengan menyederhanakan persamaan (7), sehingga diperoleh  $y^*$  untuk populasi pemangsa sebagai berikut:

$$y^* = \frac{x^*(cu-e+Pu)+c+P}{(-c-P)} \quad (8)$$

Agar  $E_2$  eksis, maka  $y^*$  harus bernilai positif, sehingga diperoleh:

$$x^* < \frac{-c-P}{(cu-e+Pu)} \quad (9)$$

Sehingga didapat tiga titik kesetimbangan dari sistem persamaan (1) sebagai berikut:

1. Kedua populasi mangsa dan pemangsa mengalami kepunahan dalam keadaan setimbang, yaitu ketika  $E_0 = (0,0)$ .
2. Hanya populasi mangsa yang bertahan hidup tanpa adanya pemangsaan oleh pemangsa, sedangkan populasi pemangsa mengalami kepunahan, yaitu ketika  $E_1 = (1,0)$ .
3. Kedua populasi mangsa dan pemangsa dapat hidup berdampingan dan tidak mengalami kepunahan, yaitu ketika  $E_2 = (x^*, y^*)$ .

#### 4.2 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan

Analisis kestabilan titik kesetimbangan yang diperoleh dapat ditentukan dengan nilai eigen yang dihasilkan dari linearisasi pada sistem persamaan (1). Linearisasi sistem dengan menggunakan matrik Jacobian sebagai berikut :

$$J = \begin{bmatrix} 1 - 2x - \frac{my}{ux+y+1} + \frac{mxyu}{(ux+y+1)^2} & -\frac{mx}{ux+y+1} + \frac{mxy}{(ux+y+1)^2} \\ y \left( \frac{e}{ux+y+1} - \frac{exu}{(ux+y+1)^2} \right) & -c + \frac{ex}{ux+y+1} - \frac{exy}{(ux+y+1)^2} - P \end{bmatrix}$$

Linearisasi sistem (1) pada titik kesetimbangan  $E_0 = (0,0)$  diperoleh matrik Jacobian sebagai berikut :

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -c - P \end{bmatrix}$$

Sehingga nilai-nilai eigennya adalah :

$$\lambda_1 = 1 \text{ dan } \lambda_2 = -c - P$$

Karena semua nilai parameter bernilai positif maka bagian real  $\lambda_2$  selalu bernilai negatif, yaitu ketika nilai real berbeda dan berlawanan tanda dengan  $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ , sehingga titik kesetimbangan  $E_0$  merupakan titik *saddle* dan bersifat tidak stabil.

Linearisasi sistem (1) pada titik kesetimbangan  $E_1 = (1,0)$  diperoleh matrik Jacobian sebagai berikut :

$$J(1,0) = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{m}{u+1} \\ 0 & -c + \frac{e}{u+1} - P \end{bmatrix}$$

Sehingga nilai-nilai eigennya adalah :

$$\lambda_1 = -1 \text{ dan } \lambda_2 = -\frac{cu+c-e+Pu+P}{u+1}$$

Dapat dilihat bahwa nilai eigen pada matrik  $J(1,0)$  memiliki tiga kemungkinan yaitu :

1. Ketika nilai real berbeda dan memiliki tanda yang sama, dengan keduanya negatif ( $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$ ) ketika  $\lambda_2 = -\frac{cu+c-e+Pu+P}{u+1} < 0$ , sehingga kriteria titik kesetimbangan  $E_1$  adalah *node* dan bersifat stabil asimotik.
2. Ketika nilai real berbeda dan berlawanan tanda ( $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ ) ketika  $\lambda_2 = -\frac{cu+c-e+Pu+P}{u+1} > 0$ , sehingga kriteria titik kesetimbangan  $E_1$  adalah *saddle point* dan bersifat tidak stabil.
3. Ketika nilai real sama dan memiliki tanda negatif ( $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ ) ketika  $\lambda_2 = -\frac{cu+c-e+Pu+P}{u+1} = -1$ , sehingga kriteria titik kesetimbangan  $E_1$  adalah *proper or improper node* dan bersifat stabil asimotik.

Selanjutnya proses linearisasi sistem (1) pada titik kesetimbangan  $E_2 = (x^*, y^*)$  diperoleh matrik Jacobian sebagai berikut :

$$J(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} -x^* + \frac{mx^*y^*u}{(ux^*+y^*+1)^2} & -\frac{mx^*}{ux^*+y^*+1} + \frac{mx^*y^*}{(ux^*+y^*+1)^2} \\ y^* \left( \frac{e}{ux^*+y^*+1} - \frac{ex^*u}{(ux^*+y^*+1)^2} \right) & -\frac{ex^*y^*}{(ux^*+y^*+1)^2} \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh persamaan karakteristik matrik sebagai berikut :

$$\lambda^2 \left( -\frac{ex^*y^*}{(ux^*+y^*+1)^2} \right) + \lambda x^* \left( -\frac{ex^*y^*}{(ux^*+y^*+1)^2} \right) \left( 1 - \frac{mx^*y^*u}{(ux^*+y^*+1)^2} \right) + \frac{mex^*y^*}{(ux^*+y^*+1)^2} \left( 1 - \frac{ux^*}{(ux^*+y^*+1)} - \frac{y^*}{(ux^*+y^*+1)} + \frac{ux^*y^*}{(ux^*+y^*+1)^2} \right) = 0$$

Dengan menggunakan aturan tanda Descartes, nilai eigen pada matrik  $J(x^*, y^*)$  memiliki tiga kemungkinan, yaitu :

1. Ketika nilai eigen real berbeda, bertanda sama, dan positif ( $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ ) dengan  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  atau nilai eigen kompleks  $(\lambda_1, \lambda_2) = \alpha \pm i\mu$  dengan bagian real bernilai positif  $\alpha > 0$ , ketika  $1 < \frac{mx^*y^*u}{(ux^*+y^*+1)^2}$  dan  $1 + \frac{ux^*y^*}{(ux^*+y^*+1)^2} < \frac{ux^*}{(ux^*+y^*+1)} + \frac{y^*}{(ux^*+y^*+1)}$ . Sehingga titik kesetimbangan  $E_2$  adalah titik *node* atau *spiral* dan bersifat tidak stabil.
2. Ketika nilai eigen real berbeda, bertanda sama, dan negatif ( $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ ) dengan  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  atau nilai eigen kompleks  $(\lambda_1, \lambda_2) = \alpha \pm i\mu$  dengan bagian real bernilai negatif  $\alpha < 0$ , ketika  $1 > \frac{mx^*y^*u}{(ux^*+y^*+1)^2}$  dan  $1 + \frac{ux^*y^*}{(ux^*+y^*+1)^2} < \frac{ux^*}{(ux^*+y^*+1)} + \frac{y^*}{(ux^*+y^*+1)}$ . Sehingga titik kesetimbangan  $E_2$  adalah titik *node* atau *spiral* dan bersifat stabil asimtotik.
3. Ketika nilai eigen real berbeda, berlawanan tanda ( $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ ) atau ( $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ ), ketika  $1 > \frac{mx^*y^*u}{(ux^*+y^*+1)^2}$  dan  $1 + \frac{ux^*y^*}{(ux^*+y^*+1)^2} > \frac{ux^*}{(ux^*+y^*+1)} + \frac{y^*}{(ux^*+y^*+1)}$ , atau ketika  $1 < \frac{mx^*y^*u}{(ux^*+y^*+1)^2}$  dan  $1 + \frac{ux^*y^*}{(ux^*+y^*+1)^2} > \frac{ux^*}{(ux^*+y^*+1)} + \frac{y^*}{(ux^*+y^*+1)}$ . Sehingga titik kesetimbangan  $E_2$  adalah titik *saddle* dan bersifat tidak stabil.

**Tabel 1.** Kriteria eksistensi titik kesetimbangan dan kestabilan sistem linear

Titik kesetimbangan	Kriteria eksistensi titik kesetimbangan	Jenis kestabilan sistem	Kriteria kestabilan sistem
$E_0 = (0,0)$	-	Titik <i>saddle</i> , tidak stabil	-
$E_1 = (1,0)$	-	Titik <i>node</i> , stabil asimtotik	$\lambda_1 = -1 < 0, \lambda_2 = -\frac{cu+c-e+Pu+P}{u+1} < 0$
		Titik <i>saddle</i> , tidak stabil	$\lambda_1 = -1 < 0, \lambda_2 = -\frac{cu+c-e+Pu+P}{u+1} > 0$
		Titik <i>node</i> atau <i>improper node</i> , stabil asimtotik	$\lambda_1 = -1 < 0, \lambda_2 = -\frac{cu+c-e+Pu+P}{u+1} = -1$
$E_2 = (x^*, y^*)$	$x^* < \frac{-c-P}{(cu-e+Pu)}$	Titik <i>node</i> atau <i>spiral</i> , stabil asimtotik	$1 > \frac{mx^*y^*u}{(ux^*+y^*+1)^2}$ dan $1 + \frac{ux^*y^*}{(ux^*+y^*+1)^2} < \frac{ux^*}{(ux^*+y^*+1)} + \frac{y^*}{(ux^*+y^*+1)}$
		Titik <i>node</i> atau <i>spiral</i> , tidak stabil	$1 < \frac{mx^*y^*u}{(ux^*+y^*+1)^2}$ dan $1 + \frac{ux^*y^*}{(ux^*+y^*+1)^2} < \frac{ux^*}{(ux^*+y^*+1)} + \frac{y^*}{(ux^*+y^*+1)}$
		Titik <i>saddle</i> , tidak stabil	$1 < \frac{mx^*y^*u}{(ux^*+y^*+1)^2}$ dan $1 + \frac{ux^*y^*}{(ux^*+y^*+1)^2} > \frac{ux^*}{(ux^*+y^*+1)} + \frac{y^*}{(ux^*+y^*+1)}$

4.3 Simulasi Numerik

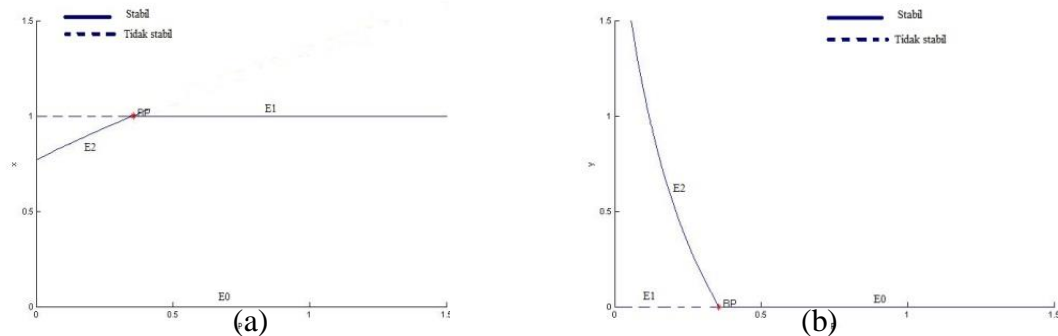
Simulasi numerik digunakan untuk mengilustrasikan perilaku kestabilan dari titik kesetimbangan ketika nilai parameter pemanenan pada populasi pemangsa berbeda. Simulasi numerik selain digunakan untuk mengilustrasikan perilaku kestabilan pada model mangsa pemangsa, juga untuk mengkonfirmasi hasil perhitungan analitik kestabilan pada model mangsa pemangsa menggunakan program *Matcont* dan *Pplane*. Berikut disajikan parameter yang digunakan untuk simulasi numerik dari perilaku model sistem interaksi mangsa pemangsa pada tabel 4.2.

**Tabel 2.** Variabel dan parameter yang digunakan untuk menggambarkan simulasi numerik model

Variabel/ Parameter	Deskripsi	Nilai Parameter	Sumber
$x$	Kepadatan populasi mangsa	Variabel	-
$y$	Kepadatan populasi pemangsa	Variabel	-
$u$	Koefisien kepadatan populasi mangsa	0.8	(Lee & Baek., 2017)
$m$	Tingkat predasi maksimum pemangsa	0.4	
$c$	Tingkat kematian alami pemangsa ketika tidak ada mangsa	0.2	
$e$	Tingkat konversi yang menunjukkan jumlah pemangsa yang baru terlahir untuk setiap mangsa yang ditangkap	1	
$P$	Upaya pemanenan konstan pada populasi pemangsa (per hari/unit area)	Kontinuasi numerik dengan <i>Matcont</i> (Asumsi)	$P < 0,35555556$ $P = 0,35555556$ $P > 0,35555556$

Pada penelitian ini, analisis kestabilan perilaku sistem interaksi mangsa pemangsa dipengaruhi oleh nilai parameter upaya pemanenan  $P$  yang berbeda.

4.3.1 *Perubahan Kestabilan Titik Keseimbangan Ketika Nilai Parameter Upaya Pemanenan  $P$  Berbeda*  
 Simulasi numerik pada sistem interaksi mangsa pemangsa persamaan (1) dengan mengkontinuasi nilai parameter upaya pemanenan  $P$ . Hasil kontinuasi numerik nilai parameter upaya pemanenan  $P$  terhadap  $x$  dan  $y$  menghasilkan perubahan perilaku kestabilan titik keseimbangan yang dilustrasikan dalam diagram pada Gambar 4.1.



**Gambar 1.** (a) Diagram bifurkasi nilai parameter  $P$  terhadap  $x$ , (b) Diagram bifurkasi nilai parameter  $P$  terhadap  $y$

Berdasarkan Gambar 4.1, secara numerik mendeskripsikan bahwa terjadi perubahan kestabilan secara keseluruhan pada titik keseimbangan akibat perubahan nilai parameter upaya pemanenan  $P$ . Dapat dilihat ketika melewati titik  $BP$  (*Branch Point*), yaitu  $P = 0,35555556$ , termasuk ke dalam jenis bifurkasi transkritikal. Bifurkasi transkritikal terjadi apabila terdapat persilangan dari dua cabang titik keseimbangan dalam suatu diagram bifurkasi. Persilangan dua cabang titik keseimbangan yaitu pada titik keseimbangan  $E_1$  dan  $E_2$ , di mana titik keseimbangan  $E_1$  dan  $E_2$  mengalami perubahan kestabilan

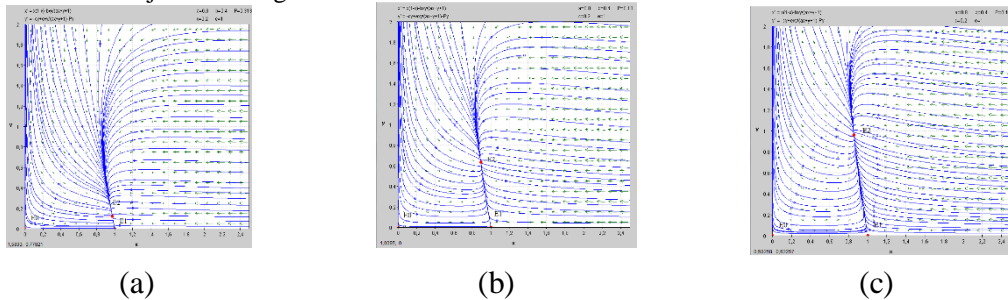
ketika melewati nilai parameter upaya pemanenan pada populasi pemangsa. Tetapi ketika  $P > 0,35555556$  variabel  $y$  pada titik kesetimbangan  $E_2$  bernilai negatif, sehingga titik kesetimbangan  $E_2$  tidak memenuhi syarat keberadaan titik kesetimbangan.

Perilaku kestabilan titik kesetimbangan dari sistem persamaan (1) ketika  $P < 0,35555556$ ;  $P = 0,35555556$ ;  $P > 0,35555556$  dapat dilustrasikan dengan potret fase sebagai berikut :

1. Upaya pemanenan ketika  $P < 0,35555556$

Ketika  $P < 0,35555556$  nilai parameter merujuk pada penelitian yang dilakukan oleh Chakraborty et al (2012) dengan judul “*Predator-prey interaction with harvesting: mathematical study with biological ramifications*“. Nilai parameter dalam penelitian berdasarkan interaksi antara *Paramecium Aurelie* sebagai mangsa dan *Didinium Nasutum* sebagai pemangsa. Parameter upaya pemanenan  $P$  dilakukan *scalling* dengan pemisalan  $E = Pr$ , dengan  $E$  masing-masing 4,7; 2,7; 1,84 untuk klasifikasi upaya pemanenan dengan kriteria berbeda, yaitu tinggi, menengah dan rendah, diasumsikan parameter  $r = 15$ . Parameter  $E$  adalah upaya pemanenan konstan.

Analisis kestabilan titik kesetimbangan ketika  $P < 0,35555556$ ; diklasifikasikan dalam upaya pemanenan tinggi,  $P_T = 0.313$ , menengah,  $P_M = 0.18$ , dan ketika upaya pemanenan rendah,  $P_R = 0.123$ . Simulasi menunjukkan ketiga titik kesetimbangan eksis yaitu,  $E_0 = (0,0)$ ,  $E_1 = (1,0)$  dan  $E_2$ . Simulasi yang dilakukan ketika upaya pemanenan pada populasi pemangsa dengan  $P < 0,35555556$  ditunjukkan sebagai berikut :

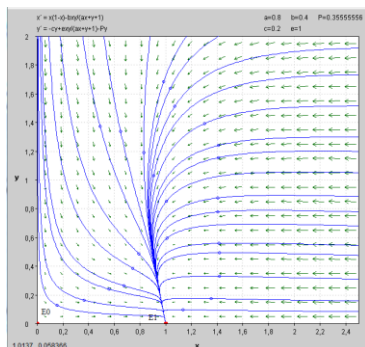


**Gambar 2.** Potret fase pada model mangsa pemangsa di (a)  $P_T = 0.313$  (b)  $P_M = 0.18$  (c)  $P_R = 0.123$

Berdasarkan Gambar di atas titik kesetimbangan  $E_0 = (0,0)$  merupakan titik *saddle* bersifat tidak stabil,  $E_1 = (1,0)$  merupakan titik *saddle* bersifat tidak stabil, dan titik kesetimbangan  $E_2$ , yaitu  $E_{2T}(0,9746887465; 0,1202270661)$ ,  $E_{2M}(0,8545505822; 0,6337739378)$ ,  $E_{2R} = (0,8545505822; 0,9620269713)$  terjadi ketika upaya pemanenan tinggi, menengah, dan rendah adalah *nodal sink* stabil.

2. Upaya pemanenan ketika  $P = 0,35555556$

Simulasi yang dilakukan ketika upaya pemanenan pada populasi pemangsa mengalami bifurkasi, dengan  $P = 0,35555556$ ; sebagai berikut :

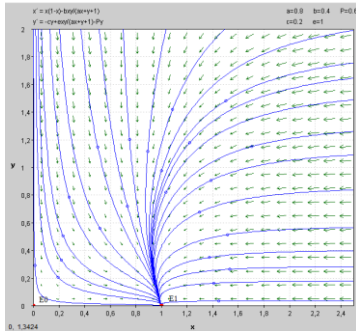


**Gambar 3.** Potret fase pada model mangsa pemangsa ketika pemanenan terhadap populasi pemangsa  $P = 0,35555556$

Berdasarkan Gambar di atas ketika  $P = 0,35555556$  ; titik kesetimbangan  $E_2$  telah menyatu dengan titik kesetimbangan  $E_1$  dan titik kesetimbangan  $E_1$  terjadi perubahan kestabilan, yang mana titik kestabilan  $E_1$  dari titik *saddle* tidak stabil menjadi *nodal sink* stabil. Perubahan titik kestabilan terjadi karena mengalami bifurkasi transkritikal ketika  $P = 0,35555556$ . Sehingga pada Gambar 4.2 hanya terdapat dua titik kesetimbangan, yaitu  $E_0 = (0,0)$  dengan jenis titik kesetimbangan titik *saddle* bersifat tidak stabil, dan  $E_1 = (1,0)$  dengan jenis titik kesetimbangan *nodal sink* bersifat stabil.

### 3. Upaya pemanenan ketika $P > 0,35555556$

Simulasi yang dilakukan ketika upaya pemanenan pada populasi pemangsa mengalami bifurkasi, dengan  $P > 0,35555556$ ; sebagai berikut :



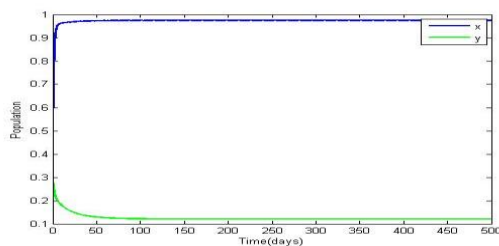
**Gambar 4.** Potret fase pada model mangsa pemangsa ketika pemanenan terhadap populasi pemangsa  $P = 0,6$

Berdasarkan Gambar di atas ketika  $P = 0,6$  variabel  $y$  pada titik kesetimbangan  $E_2$  bernilai negatif, sehingga titik kesetimbangan  $E_2$  tidak memenuhi syarat keberadaan titik kesetimbangan. Sehingga hanya ada dua titik kesetimbangan, yaitu  $E_0 = (0,0)$  merupakan titik *saddle* bersifat tidak stabil,  $E_1 = (1,0)$  merupakan titik *nodal sink* bersifat stabil. Secara biologis tidak memiliki makna, hal tersebut karena dalam suatu populasi tidak mungkin bernilai negatif.

#### 4.3.2 Interpretasi Secara Biologi

Interpretasi biologi digunakan untuk mengetahui pengaruh dari parameter upaya pemanenan konstan terhadap populasi pemangsa pada sistem persamaan (1), akan diilustrasikan perilaku sistem pada bidang solusi ketika  $P < 0,35555556$  ;  $P = 0,35555556$  menggunakan program *Matlab* sebagai berikut :

#### 1. Interpretasi biologi ketika upaya pemanenan tinggi

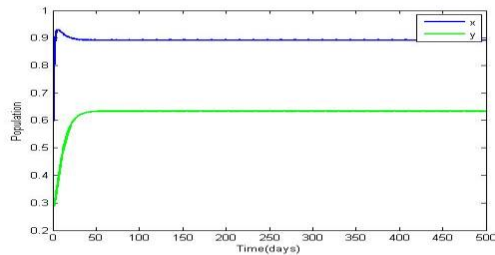


**Gambar 5.** Grafik pada model mangsa pemangsa dengan pemanenan tinggi

Berdasarkan Gambar 4.5 diperoleh bahwa ketika pemanenan meningkat, populasi mangsa dan pemangsa dapat hidup berdampingan dan tidak mengalami kepunahan sampai waktu  $t$  menuju tak terhingga, dengan populasi mangsa lebih banyak dibandingkan populasi pemangsa. Ketika upaya pemanenan tinggi, kepadatan populasi pemangsa sangat kecil.



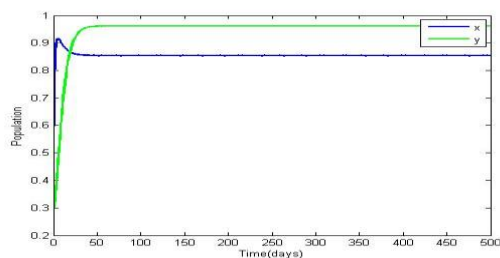
## 2. Interpretasi biologi ketika upaya pemanenan menengah



**Gambar 6.** Grafik pada model mangsa pemangsa dengan pemanenan menengah

Interpretasi biologi diperoleh ketika upaya pemanenan menengah, populasi mangsa dan pemangsa akan hidup berdampingan dan tidak mengalami kepunahan sampai waktu  $t$  menuju tak hingga. Dapat dilihat pada Gambar 4.6 bahwa populasi mangsa lebih banyak daripada populasi pemangsa.

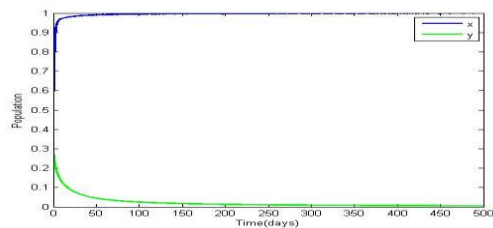
## 3. Interpretasi biologi ketika upaya pemanenan rendah



**Gambar 7.** Grafik pada model mangsa pemangsa dengan pemanenan rendah

Populasi mangsa dan pemangsa dapat hidup berdampingan dan tidak mengalami kepunahan sampai waktu  $t$  menuju tak hingga. Dapat dilihat pada Gambar 4.7 ketika upaya pemanenan rendah, populasi pemangsa lebih banyak daripada populasi mangsa.

## 4. Interpretasi biologi ketika upaya pemanenan mengalami bifurkasi



**Gambar 8.** Grafik pada model mangsa pemangsa ketika mengalami bifurkasi

Munculnya bifurkasi transkritikal dapat diketahui ketika  $P = 0,35555556$ . Secara interpretasi biologi menghasilkan bahwa populasi pemangsa menurun menuju kepunahan, sedangkan populasi mangsa akan tetap stabil sampai waktu  $t$  menuju tak hingga. Grafik *time series* ketika terjadi bifurkasi yang menunjukkan penurunan pemangsa dapat dilihat pada Gambar 4.8

## 5. Simpulan

Hasil analisis kestabilan pada model matematika interaksi mangsa pemangsa dengan fungsi respon Beddington-DeAngelis dan pemanenan terhadap pemangsa, diperoleh tiga titik kesetimbangan yaitu  $E_0 = (0,0)$  *saddle* tidak stabil,  $E_1 = (1,0)$  *saddle* tidak stabil, dan  $E_2 = \left(x^*, x^* < \frac{-c-P}{(cu-e+Pu)}\right)$  *nodal sink* stabil. Selanjutnya dengan mengkontinuasi nilai parameter pemanenan terhadap pemangsa, diperoleh bahwa terdapat bifurkasi transkritikal pada sistem. Semakin tinggi nilai  $P$ , populasi pemangsa pemangsa menurun menuju kepunahan. Sedangkan populasi mangsa akan tetap stabil sampai waktu  $t$  menuju tak hingga. Sebaliknya ketika pemanenan terhadap pemangsa rendah, populasi mangsa dan pemangsa dapat hidup berdampingan dan tidak mengalami kepunahan sampai waktu  $t$  menuju tak hingga.

---

**Daftar Pustaka**

- Beddington, J. R. (1975). Mutual Interference Between Parasites or Predators and its Effect on Searching Efficiency, *44*(1), 331–340.
- Chakraborty, S., Pal, S., & Bairagi, N. (2012). Predator-Prey Interaction With Harvesting: Mathematical Study With Biological Ramifications. *Applied Mathematical Modelling*, *36*(9), 4044–4059. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.11.029>
- D. L. DeAngelis, R. A. Goldstein, R. V. O. (1975). A Model for Tropic Interaction, *56*(4), 881–892.
- Haque, M. (2011). A Detailed Study of The Beddington-DeAngelis Predator-Prey Model. *Mathematical Biosciences*, *234*(1), 1–16. <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2011.07.003>
- Hu, D., & Cao, H. (2017). Stability and Bifurcation Analysis in a Predator–Prey System with Michaelis–Menten Type Predator Harvesting. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, *33*, 58–82. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2016.05.010>
- Lee, J., & Baek, H. (2017). Dynamics of a Beddington-DeAngelis Type Predator-Prey System With Constant Rate Harvesting. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, (1), 1–20. <https://doi.org/10.14232/ejqtde.2017.1.1>
- Roy, B., Roy, S. K., & Gurung, D. B. (2017). Holling–Tanner Model With Beddington–DeAngelis Functional Response and Time Delay Introducing Harvesting. *Mathematics and Computers in Simulation*, *142*, 1–14. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2017.03.010>