



Analisis Kestabilan Model Matematika Mangsa Pemangsa Dua Spesies dengan Fungsi Respon Holling Tipe II dan Perilaku Anti-Pemangsa

Retno Ekawati Ningrum^{a,*}, Abadi^b, Yuliani Puji Astuti^{a,b}

^{a,b,c}Program Studi Matematika, Universitas Negeri Surabaya, Gedung C8-C9 Kampus Ketintang Surabaya 60231, Indonesia

*Alamat Surel: retoningrum@mhs.unesa.ac.id

Abstrak

Artikel ini membahas mengenai analisis kestabilan pada model mangsa pemangsa dua spesies dengan fungsi respon Holling tipe II dan perilaku anti-pemangsa. Tahapan penelitian yang dilakukan yaitu melakukan *scalling* persamaan, mencari titik kesetimbangan sistem, melinierisasi sistem, melakukan analisis kestabilan titik kesetimbangan sistem, serta melakukan simulasi numerik menggunakan *Matcont* dan *pplane*. Dari hasil analisis diperoleh empat titik kesetimbangan yaitu populasi mangsa dan populasi pemangsa punah (E_0), hanya populasi mangsa yang dapat bertahan hidup (E_1), serta populasi mangsa dan populasi pemangsa dapat hidup berdampingan (E_2 dan E_3). Dari hasil analisis kestabilan diperoleh bahwa titik kesetimbangan E_0 merupakan *Saddle point* dan bersifat tidak stabil, sedangkan kestabilan titik kesetimbangan E_1 , E_2 , dan E_3 dilihat berdasarkan nilai parameter yang memenuhi syarat kestabilan. Untuk mengetahui pengaruh perilaku anti-pemangsa terhadap populasi mangsa dan pemangsa dilakukan kontinuitas pada parameter laju perilaku anti-pemangsa. Dengan demikian, diperoleh bahwa ketika laju perilaku anti-pemangsa kecil, populasi mangsa dan populasi pemangsa akan dapat hidup secara bersamaan dan tidak akan punah sampai waktu t menuju tak hingga. Namun, ketika laju perilaku anti-pemangsa besar, populasi pemangsa akan menurun menuju kepunahan, tetapi populasi mangsa akan tetap ada sampai waktu t menuju tak hingga.

Kata kunci:

Model Mangsa Pemangsa, Holling Tipe II, Perilaku Anti-Pemangsa, Analisis Kestabilan.

© 2020 Dipublikasikan oleh Jurusan Matematika, Universitas Negeri Semarang

1. Pendahuluan

Model mangsa pemangsa pertama dimodelkan oleh Lotka-Volterra (Pk & S, 2017). Model tersebut menggunakan fungsi respon sederhana yaitu banyaknya mangsa yang dimakan oleh pemangsa berbanding lurus dengan banyaknya populasi mangsa. Selain itu, pada model tersebut juga mengasumsikan bahwa laju pertumbuhan populasi mangsa berbanding lurus dengan ukuran populasi mangsa. Tentu asumsi ini mengabaikan banyak keadaan pertumbuhan populasi yang terjadi sebenarnya. Sebagai contoh, fakta bahwa populasi sebenarnya tidak dapat bertambah dengan tinggi (Hirsch, Smale, & Devaney, 2004). Sehingga laju pertumbuhan yang sesuai untuk memodelkan laju pertumbuhan populasi adalah laju pertumbuhan logistik. Hal tersebut dikarenakan, setiap populasi memiliki daya dukung lingkungan sendiri-sendiri dan tidak boleh melebihi daya dukung lingkungannya agar dapat tetap hidup. Fungsi pertumbuhan logistik adalah fungsi yang penting, yang pertama kali digunakan oleh Verhulst untuk pertumbuhan manusia (Jha & Ghorai, 2017)

Fungsi respon pada model mangsa pemangsa Lotka-Volterra merupakan fungsi respon sederhana, tidak mempertimbangkan waktu pemangsa dalam mencari dan menangani mangsanya. Kenyataan di ekosistem, interaksi antara mangsa dan pemangsa sering rumit ketika terjadi serangan mangsa oleh pemangsa. Sehingga secara realistis pemangsa memerlukan waktu untuk mencari dan menangani mangsanya (Mortoja, Panja, & Mondal, 2018). Oleh karena itu, fungsi respon pada model mangsa pemangsa Lotka-Volterra dimodifikasi dengan menggunakan fungsi respon Holling. Dalam dinamika populasi, fungsi respon Holling adalah banyaknya mangsa yang dimangsa per satuan waktu per pemangsa sebagai fungsi kepadatan mangsa (Tang & Xiao, 2015). Holling mengusulkan bahwa ada tiga fungsi

To cite this article:

Ningrum, R. E., Abadi, & Astuti, Y. P. (**Error! Unknown document property name.**). Analisis Kestabilan Model Matematika Mangsa Pemangsa Dua Spesies dengan Fungsi Respon Holling Tipe II dan Perilaku Anti-Pemangsa. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika 3*, 114-121

respon dari pemangsa yang biasa disebut dengan Holling tipe I, Holling tipe II, dan Holling tipe III. Salah satu fungsi respon Holling yang terkenal dan banyak dikaji oleh peneliti adalah fungsi respon Holling tipe II. Sebagai contoh, Abadi, Savitri, & Ummah (2013), mengembangkan model Lotka-Volterra menggunakan fungsi respon Holling tipe II. Selain itu, Smith (n.d.) yang juga mengembangkan model Lotka-Volterra menggunakan fungsi respon Holling tipe II, dan lain-lain.

Meskipun ahli biologi telah melabeli hewan sebagai mangsa dan pemangsa, tetapi terkadang tidak ada pemenang yang jelas dari keduanya. Padahal secara umum, pemangsa pasti akan memenangkan predasi tersebut. Tetapi terkadang mangsa juga dapat mengalahkan pemangsanya. Dalam hal ini, perilaku tersebut dikenal dengan perilaku anti-pemangsa (Tang & Xiao, 2015). Perilaku anti-pemangsa adalah perilaku mangsa sebagai bentuk pertahanan dalam melawan tekanan predasi (Savitri, 2018). Percobaan menunjukkan bahwa perilaku anti-pemangsa dari populasi mangsa ditunjukkan saat: (a) perubahan morfologi atau perubahan perilaku, atau (b) mangsa dewasa menangkap pemangsa muda atau rentan (Tang & Xiao, 2015). Banyak peneliti yang mengkaji model mangsa pemangsa dengan perilaku anti-pemangsa, diantaranya adalah Tang & Xiao (2015) dan Savitri (2018)

Berdasarkan latar belakang di atas, maka penelitian ini bertujuan untuk menganalisis kestabilan model mangsa dua spesies dengan fungsi respon Holling tipe II dan perilaku anti-pemangsa. Hal tersebut dilakukan untuk mengetahui perilaku dari mangsa dan pemangsa, di mana pemangsa menggunakan fungsi respon Holling tipe II dan mangsa yang memiliki perilaku anti-pemangsa. Ningrum, Abadi, & Astuti (2019) mengonstruksi model matematika mangsa pemangsa dua spesies dengan fungsi respon Holling tipe II dan perilaku anti-pemangsa sebagai berikut:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax \left(1 - \frac{x}{N}\right) - \frac{mx}{1+mt_h x} y \\ \dot{y} = -cy + \frac{\gamma mx}{1+mt_h x} y - \eta xy \end{cases} \quad (2)$$

dengan x dan y masing-masing merupakan populasi mangsa dan populasi pemangsa pada waktu t , a merupakan laju pertumbuhan mangsa, N merupakan daya dukung lingkungan (*carrying capacity*), m merupakan efisiensi pencarian mangsa oleh pemangsa, t_h merupakan rata-rata waktu penanganan mangsa oleh pemangsa, c merupakan laju kematian alami pemangsa, γ merupakan laju konversi biomassa dari mangsa menjadi pemangsa, dan η merupakan laju perilaku anti-pemangsa dari mangsa untuk pemangsa. Sistem persamaan (2) diberikan syarat kondisi awal $x(t) > 0, y(t) > 0$, di mana semua parameter bernilai positif. Pada model tersebut, laju perilaku anti-pemangsa diasumsikan tidak secara langsung menguntungkan populasi mangsa, tetapi mengurangi pertumbuhan populasi pemangsa karena mangsa tidak memberikan makanan pada populasi pemangsa.

2. Metode

Tahapan yang dilakukan pada penelitian ini adalah:

2.1. Melakukan Scalling pada Model Matematika Mangsa Pemangsa Dua Spesies dengan Fungsi Respon Holling Tipe II dan Perilaku Anti-Pemangsa

Model mangsa pemangsa yang akan dikaji pada artikel ini adalah model matematika mangsa pemangsa dua spesies dengan fungsi respon Holling tipe II dan perilaku anti-pemangsa yang terdapat pada Ningrum, Abadi, & Astuti (2019). Kemudian dilakukan *scalling* persamaan agar lebih mudah dalam mengamati perilaku dari model.

2.2. Penentuan Titik Keseimbangan Model

Penentuan titik keseimbangan model, dilakukan dengan menggunakan solusi ekuilibrium (membuat ruas kanan pada sistem persamaan diferensial sama dengan nol).

2.3. Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan Sistem

Tahapan yang dilakukan sebelum melakukan analisis kestabilan titik keseimbangan yaitu menentukan nilai eigen. Sebelum menentukan nilai eigen, sistem harus dilinierisasikan terlebih dahulu menggunakan matriks Jacobian. Setelah sistem linier, substitusi titik keseimbangan pada matriks Jacobian. Dari hasil substitusi tersebut, diperoleh matriks baru dan dicari nilai eigen dari matriks tersebut. Kestabilan titik keseimbangan dilihat berdasarkan tanda pada nilai eigen yang diperoleh. Jika nilai eigen bernilai negatif

maka titik kesetimbangan tersebut bersifat stabil. Namun jika terdapat paling sedikit satu nilai eigen yang bernilai positif, maka titik kesetimbangan tersebut tidak stabil.

2.4. Simulasi Numerik

Simulasi numerik digunakan untuk menggambarkan perilaku dari model tersebut. Simulasi numerik dilakukan menggunakan *Matcont* pada *software* Matlab 2017a dan *pplane*. Hasil simulasi yang diperoleh digunakan untuk mengonfirmasi hasil perhitungan secara analitik serta mengetahui perilaku kestabilan dari titik kesetimbangan ketika parameter laju perilaku anti-pemangsa dikontinuasi. Nilai parameter yang digunakan merupakan nilai parameter yang terdapat pada Tang & Xiao (2015) dan Xiao, Xie, & Xue (2018).

3. Hasil dan Pembahasan

Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis kestabilan model mangsa pemangsa yang dikonstruksi oleh Ningrum, Abadi, & Astuti (2019). Tahapan yang dilakukan antara lain:

3.1. Scalling Persamaan

Agar diperoleh hasil *scalling* persamaan yang sederhana, maka dipilih pemisalan pada sistem persamaan (2) sebagai berikut: $X = \frac{x}{N}$, $Y = \frac{my}{a}$, $\tau = at$, maka sistem persamaan (2) menjadi

$$\begin{cases} \frac{dX}{d\tau} = X(1 - X) - \frac{XY}{1+rX} \\ \frac{dY}{d\tau} = -\bar{c}Y + \frac{\bar{\gamma}XY}{1+rX} - \bar{\eta}XY \end{cases} \quad (3)$$

dengan $r = mt_h N$, $\bar{c} = \frac{c}{a}$, $\bar{\gamma} = \gamma \frac{m}{a} N$, dan $\bar{\eta} = \frac{\eta N}{a}$.

3.2. Penentuan Titik Kesetimbangan

Penentuan titik kesetimbangan sistem persamaan (3), dilakukan dengan menggunakan solusi ekuilibrium (membuat ruas kanan pada sistem persamaan diferensial sama dengan nol). Titik kesetimbangan mengilustrasikan solusi konstan dari sistem. Misalkan

$$X(1 - X) - \frac{XY}{1+rX} = 0 \quad (4)$$

$$-\bar{c}Y + \frac{\bar{\gamma}XY}{1+rX} - \bar{\eta}XY = 0 \quad (5)$$

Berdasarkan (4) dan (5) diperoleh beberapa Kasus sebagai berikut:

1) Kasus 1: Jika $(\bar{c}r + \bar{\eta} - \bar{\gamma}) < 0$, $(\bar{c}r + \bar{\eta} - \bar{\gamma})^2 \geq 4\bar{\eta}r\bar{c}$, dan $1 > \left(\frac{-(\bar{c}r + \bar{\eta} - \bar{\gamma}) + \sqrt{(\bar{c}r + \bar{\eta} - \bar{\gamma})^2 - 4\bar{\eta}r\bar{c}}}{2\bar{\eta}r} \right) >$

0, maka terdapat empat titik kesetimbangan, yaitu:

- Populasi mangsa dan populasi pemangsa punah, yaitu $E_0 = (0,0)$.
- Hanya populasi mangsa yang dapat bertahan hidup, yaitu $E_1 = (1,0)$.
- Populasi mangsa dan populasi pemangsa dapat hidup berdampingan, yaitu $E_2 = (X_1, Y_1) =$

$$\left(\frac{-(\bar{c}r + \bar{\eta} - \bar{\gamma}) - \sqrt{(\bar{c}r + \bar{\eta} - \bar{\gamma})^2 - 4\bar{\eta}r\bar{c}}}{2\bar{\eta}r}, 1 - \left(\frac{-(\bar{c}r + \bar{\eta} - \bar{\gamma}) - \sqrt{(\bar{c}r + \bar{\eta} - \bar{\gamma})^2 - 4\bar{\eta}r\bar{c}}}{2\bar{\eta}r} \right) - r \left(\left(\frac{-(\bar{c}r + \bar{\eta} - \bar{\gamma}) - \sqrt{(\bar{c}r + \bar{\eta} - \bar{\gamma})^2 - 4\bar{\eta}r\bar{c}}}{2\bar{\eta}r} \right)^2 - \left(\frac{-(\bar{c}r + \bar{\eta} - \bar{\gamma}) - \sqrt{(\bar{c}r + \bar{\eta} - \bar{\gamma})^2 - 4\bar{\eta}r\bar{c}}}{2\bar{\eta}r} \right) \right) \right)$$

d) Populasi mangsa dan populasi pemangsa dapat hidup berdampingan, yaitu $E_3 = (X_2, Y_2) =$

$$\left(\frac{-(\bar{c}r + \bar{\eta} - \bar{\gamma}) + \sqrt{(\bar{c}r + \bar{\eta} - \bar{\gamma})^2 - 4\bar{\eta}r\bar{c}}}{2\bar{\eta}r}, 1 - \left(\frac{-(\bar{c}r + \bar{\eta} - \bar{\gamma}) + \sqrt{(\bar{c}r + \bar{\eta} - \bar{\gamma})^2 - 4\bar{\eta}r\bar{c}}}{2\bar{\eta}r} \right) - r \left(\left(\frac{-(\bar{c}r + \bar{\eta} - \bar{\gamma}) + \sqrt{(\bar{c}r + \bar{\eta} - \bar{\gamma})^2 - 4\bar{\eta}r\bar{c}}}{2\bar{\eta}r} \right)^2 - \left(\frac{-(\bar{c}r + \bar{\eta} - \bar{\gamma}) + \sqrt{(\bar{c}r + \bar{\eta} - \bar{\gamma})^2 - 4\bar{\eta}r\bar{c}}}{2\bar{\eta}r} \right) \right) \right)$$

2) Kasus 2: Jika $(\bar{c}r + \bar{\eta} - \bar{\gamma}) < 0$, $(\bar{c}r + \bar{\eta} - \bar{\gamma})^2 \geq 4\bar{\eta}r\bar{c}$, dan $\left(\frac{-(\bar{c}r + \bar{\eta} - \bar{\gamma}) + \sqrt{(\bar{c}r + \bar{\eta} - \bar{\gamma})^2 - 4\bar{\eta}r\bar{c}}}{2\bar{\eta}r} \right) > 1 > \left(\frac{-(\bar{c}r + \bar{\eta} - \bar{\gamma}) - \sqrt{(\bar{c}r + \bar{\eta} - \bar{\gamma})^2 - 4\bar{\eta}r\bar{c}}}{2\bar{\eta}r} \right) > 0$, maka terdapat tiga titik kesetimbangan, yaitu:

- a) Populasi mangsa dan populasi pemangsa punah, yaitu $E_0 = (0,0)$.
- b) Hanya populasi mangsa yang dapat bertahan hidup, yaitu $E_1 = (1,0)$.
- c) Populasi mangsa dan populasi pemangsa dapat hidup berdampingan, yaitu $E_2 =$

$$(X_1, Y_1) = \left(\frac{-(\bar{c}r + \bar{\eta} - \bar{\gamma}) - \sqrt{(\bar{c}r + \bar{\eta} - \bar{\gamma})^2 - 4\bar{\eta}r\bar{c}}}{2\bar{\eta}r}, 1 - \left(\frac{-(\bar{c}r + \bar{\eta} - \bar{\gamma}) - \sqrt{(\bar{c}r + \bar{\eta} - \bar{\gamma})^2 - 4\bar{\eta}r\bar{c}}}{2\bar{\eta}r} \right) - r \left(\left(\frac{-(\bar{c}r + \bar{\eta} - \bar{\gamma}) - \sqrt{(\bar{c}r + \bar{\eta} - \bar{\gamma})^2 - 4\bar{\eta}r\bar{c}}}{2\bar{\eta}r} \right)^2 - \left(\frac{-(\bar{c}r + \bar{\eta} - \bar{\gamma}) - \sqrt{(\bar{c}r + \bar{\eta} - \bar{\gamma})^2 - 4\bar{\eta}r\bar{c}}}{2\bar{\eta}r} \right) \right) \right)$$

3.3. Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Sistem

Tahapan yang dilakukan sebelum melakukan analisis kestabilan titik kesetimbangan yaitu menentukan nilai eigen. Sebelum menentukan nilai eigen, sistem harus dilinierisasikan terlebih dahulu menggunakan matriks Jacobian. Matriks Jacobian dari sistem persamaan (3) adalah

$$J(X, Y) = \begin{bmatrix} (1 - X) - \frac{Y}{1+rX} - X + \frac{rXY}{(1+rX)^2} & -\frac{X}{1+rX} \\ \frac{\bar{\gamma}Y}{(1+rX)^2} - \bar{\eta}Y & -\bar{c} + \frac{\bar{\gamma}X}{1+rX} - \bar{\eta}X \end{bmatrix} \quad (6)$$

Setelah diperoleh matriks Jacobian (6), kemudian substitusi masing-masing titik kesetimbangan ke dalam matriks (6), dan cari nilai eigen. Kestabilan titik kesetimbangan sistem persamaan (3) dapat dilihat pada Tabel 1 berikut:

Tabel 1. Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan

Titik Kesetimbangan	Jenis Titik Kesetimbangan	Kestabilan Titik Kesetimbangan	Syarat Kestabilan
$E_0 = (0,0)$	<i>Saddle Point</i>	Tidak Stabil	-
$E_1 = (1,0)$	<i>Node</i>	Stabil Asimtotik	$-\bar{c} + \frac{\bar{\gamma}}{1+r} - \bar{\eta} < 0$
	<i>Proper atau Improper Node</i>	Stabil Asimtotik	$-\bar{c} + \frac{\bar{\gamma}}{1+r} - \bar{\eta} = -1$
$E_2 = (X_1, Y_1)$	<i>Node atau Spiral Point</i>	Stabil Asimtotik	$1 > \frac{rY_1}{(1+rX_1)^2}$ dan $\frac{\bar{\gamma}}{(1+rX_1)^2} > \bar{\eta}$

$E_3 = (X_2, Y_2)$	<i>Node atau Spiral Point</i>	Tidak Stabil	$1 < \frac{rY_1}{(1+rX_1)^2}$ dan $\frac{\bar{\gamma}}{(1+rX_1)^2} > \bar{\eta}$
	<i>Saddle Point</i>	Tidak Stabil	$1 < \frac{rY_1}{(1+rX_1)^2}$ dan $\frac{\bar{\gamma}}{(1+rX_1)^2} < \bar{\eta}$ atau $1 > \frac{rY_1}{(1+rX_1)^2}$ dan $\frac{\bar{\gamma}}{(1+rX_1)^2} < \bar{\eta}$
	<i>Node atau Spiral Point</i>	Stabil Asimtotik	$1 > \frac{rY_2}{(1+rX_2)^2}$ dan $\frac{\bar{\gamma}}{(1+rX_2)^2} > \bar{\eta}$
	<i>Node atau Spiral Point</i>	Tidak Stabil	$1 < \frac{rY_2}{(1+rX_2)^2}$ dan $\frac{\bar{\gamma}}{(1+rX_2)^2} > \bar{\eta}$
	<i>Saddle Point</i>	Tidak Stabil	$1 < \frac{rY_2}{(1+rX_2)^2}$ dan $\frac{\bar{\gamma}}{(1+rX_2)^2} < \bar{\eta}$ atau $1 > \frac{rY_2}{(1+rX_2)^2}$ dan $\frac{\bar{\gamma}}{(1+rX_2)^2} < \bar{\eta}$

3.4. Simulasi Numerik

Simulasi numerik digunakan untuk mengonfirmasikan hasil analitik dan mengetahui perilaku kestabilan dari titik kesetimbangan ketika nilai parameter laju perilaku anti-pemangsa dikontinuasi. Simulasi numerik dilakukan menggunakan *Matcont* pada *software* Matlab 2017a dan *pplane*. Dengan mempertimbangkan syarat-syarat agar mangsa dan pemangsa dapat hidup berdampingan, maka digunakan nilai parameter seperti pada Tabel 2:

Tabel 2. Nilai Parameter

Parameter	Nilai	Referensi
c	0.015	Tang & Xiao (2015)
m	0.4	Tang & Xiao (2015)
t_h	0.1	Xiao, Xie, & Xue (2018)
η	0.1	Tang & Xiao (2015)
γ	0.8	Tang & Xiao (2015)
a	0.05	Tang & Xiao (2015)
N	0.4	Tang & Xiao (2015)

sehingga diperoleh nilai parameter hasil *scaling* sebagai berikut:

$$r = mt_h N = (0.4)(0.1)(0.4) = 0.016$$

$$\bar{c} = \frac{c}{a} = \frac{0.015}{0.05} = 0.3 \tag{7}$$

$$\bar{\gamma} = \gamma \frac{m}{a} N = (0.8) \left(\frac{0.4}{0.05} \right) (0.4) = 2.56$$

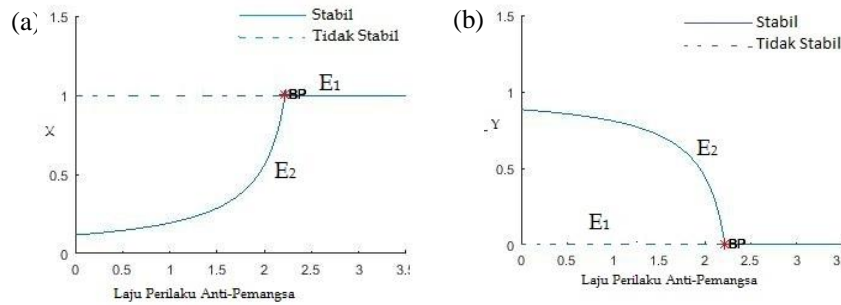
$$\bar{\eta} = \frac{\eta N}{a} = \frac{(0.1)(0.4)}{0.05} = 0.8$$

dengan menggunakan nilai parameter pada (7), sistem persamaan (3) memenuhi syarat kesetimbangan pada Kasus 2 yaitu $\left(\frac{-(\bar{c}r + \bar{\eta} - \bar{\gamma}) + \sqrt{(\bar{c}r + \bar{\eta} - \bar{\gamma})^2 - 4\bar{\eta}r\bar{c}}}{2\bar{\eta}r} \right) > 1 > \left(\frac{-(\bar{c}r + \bar{\eta} - \bar{\gamma}) - \sqrt{(\bar{c}r + \bar{\eta} - \bar{\gamma})^2 - 4\bar{\eta}r\bar{c}}}{2\bar{\eta}r} \right) > 0$, sehingga diperoleh tiga titik kesetimbangan yaitu $E_0 = (0,0)$ (*saddle* tidak stabil), $E_1 = (1,0)$ (*saddle* tidak stabil), dan $E_2 = (0.1711342712, 0.8311352861)$ (*spiral sink* stabil).

Pada penelitian ini akan dilihat perilaku sistem terhadap parameter laju perilaku anti-pemangsa, sehingga digunakan nilai $\bar{\eta}$ yang berbeda-beda, di mana $\bar{\eta} = \frac{\eta N}{a}$ dengan N dan a adalah konstan, sedangkan η adalah parameter laju perilaku anti-pemangsa dari mangsa untuk populasi pemangsa.

3.4.1. Perubahan Kestabilan Titik Kesetimbangan Ketika Nilai $\bar{\eta}$ Kontinu

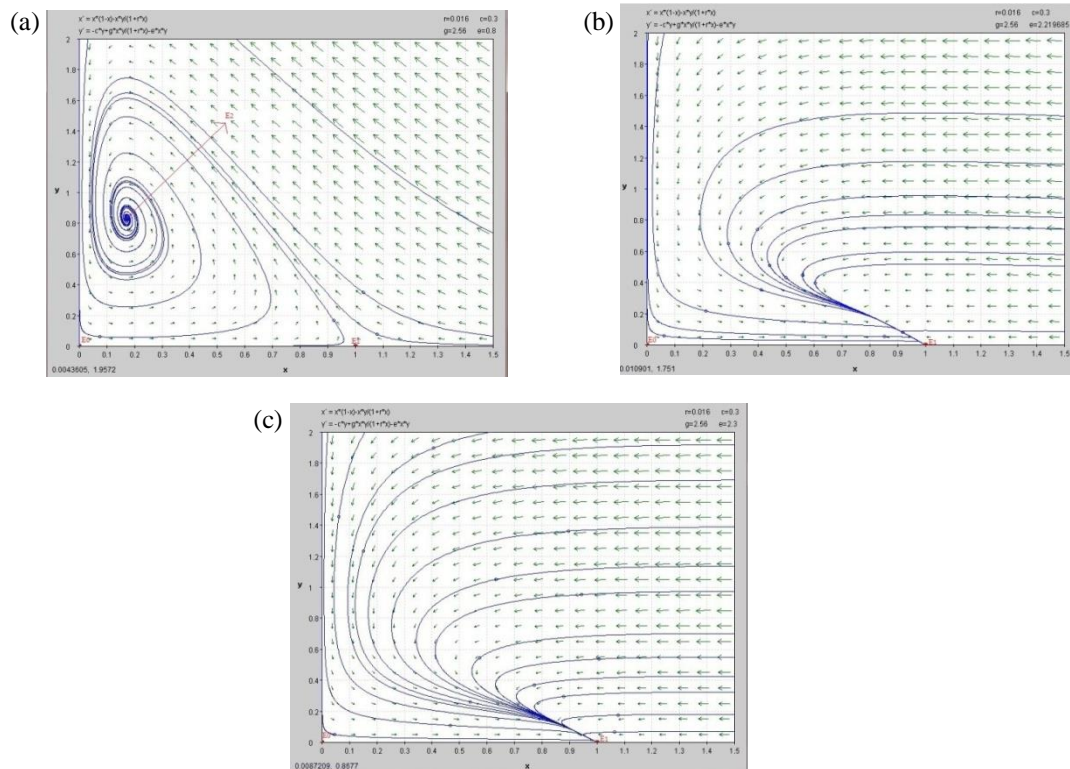
Simulasi sistem persamaan (3) dengan menjalankan nilai $\bar{\eta}$ terjadi perubahan kestabilan titik kesetimbangan dari sistem, yang tergambar dalam diagram bifurkasi berikut:



Gambar 1. (a) Diagram Bifurkasi X terhadap $\bar{\eta}$ dan; (b) Diagram Bifurkasi Y terhadap $\bar{\eta}$.

Dari Gambar 1, secara numerik mendeskripsikan keseluruhan perubahan kestabilan titik kesetimbangan akibat perubahan nilai parameter laju perilaku anti-pemangsa $\bar{\eta}$. Terlihat saat melewati BP (*Branch Point*) yaitu pada $\bar{\eta} = 2.219685$, jenis bifurkasinya adalah bifurkasi transkritikal karena terdapat persilangan dari dua cabang kesetimbangan dalam suatu diagram bifurkasi yaitu kesetimbangan E_1 dan E_2 , yang mana kesetimbangan E_1 dan E_2 mengalami perubahan kestabilan ketika melewati nilai parameter laju perilaku anti-pemangsa tersebut. Tetapi ketika $\bar{\eta} > 2.219685$ E_2 bernilai negatif, yang mana tidak memberikan makna secara biologi.

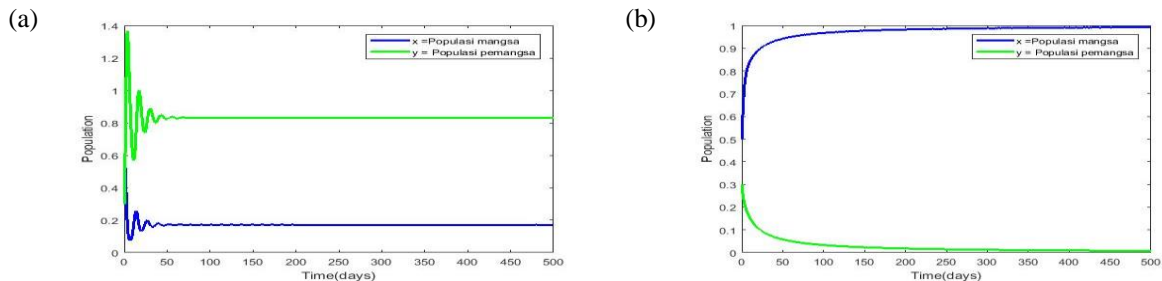
Selanjutnya untuk memperjelas perilaku kestabilan titik kesetimbangan dari sistem persamaan (3) ketika $\bar{\eta} < 2.219685$, $\bar{\eta} = 2.219685$, dan $\bar{\eta} > 2.219685$, digambarkan potret fase sebagai berikut:



Gambar 2. Potret fase model mangsa pemangsa dengan fungsi respon Holling tipe II dan perilaku anti-pemangsa dengan (a) $\bar{\eta} = 0.8$; (b) $\bar{\eta} = 2.219685$ dan; (c) $\bar{\eta} = 2.3$

Dari Gambar 2, dapat disimpulkan bahwa ketika $\bar{\eta} = 0.8$ terdapat tiga titik kesetimbangan yaitu $E_0 = (0,0)$ dengan jenis titik kesetimbangan *saddle point* dan bersifat tidak stabil, $E_1 = (1,0)$ dengan jenis titik kesetimbangan *saddle point* dan bersifat tidak stabil, dan $E_2 = (0.1711342712, 0.8311352861)$ dengan jenis titik kesetimbangan *spiral sink* dan bersifat stabil. Kemudian ketika nilai $\bar{\eta} = 2.219685$, titik kesetimbangan E_2 telah menyatu dengan titik kesetimbangan E_1 dan pada titik kesetimbangan E_1 terjadi perubahan kestabilan. Hal tersebut dikarenakan telah terjadi bifurkasi transkritikal ketika $\bar{\eta} = 2.219685$, sehingga hanya terdapat dua titik kesetimbangan yaitu $E_0 = (0,0)$ dengan jenis titik kesetimbangan *saddle point* dan bersifat tidak stabil, dan $E_1 = (1,0)$ dengan jenis titik kesetimbangan *nodal sink* dan bersifat stabil. Terakhir ketika nilai $\bar{\eta} = 2.3$, tidak terdapat titik kesetimbangan E_2 dikarenakan Y bernilai negatif. Sehingga hanya terdapat dua titik kesetimbangan yaitu $E_1 = (1,0)$ dengan jenis titik kesetimbangan *nodal sink* dan bersifat stabil.

3.4.2. Interpretasi Biologi



Gambar 3. Grafik mangsa Pemangsa terhadap waktu dengan (a) $\bar{\eta} = 0.8$; dan (b) $\bar{\eta} = 2.219685$.

Dari Gambar 3, dapat disimpulkan bahwa ketika laju perilaku anti pemangsa $\bar{\eta} = 0.8$ ($\bar{\eta} < 2.219685$), dapat dilihat bahwa mangsa dan pemangsa akan hidup bersamaan dan tidak mengalami kepunahan sampai waktu t menuju tak hingga dengan populasi pemangsa lebih banyak dari populasi mangsa. Sedangkan ketika laju perilaku anti-pemangsa $\bar{\eta} = 2.219685$, dapat dilihat bahwa populasi

pemangsa menurun menuju kepunahan tetapi populasi mangsa tetap ada sampai waktu t menuju tak hingga.

4. Simpulan

Pada artikel ini, kami telah mempelajari analisis kestabilan model mangsa pemangsa dengan fungsi respon Holling tipe II dan perilaku anti-pemangsa, serta melakukan simulasi numerik pada model tersebut. Berdasarkan hasil simulasi numerik, diperoleh tiga titik kesetimbangan pada sistem yaitu populasi mangsa dan populasi pemangsa punah (E_0), hanya populasi mangsa yang dapat bertahan hidup (E_1), serta populasi mangsa dan populasi pemangsa dapat hidup berdampingan (E_2), kemudian melakukan kontinuitas pada parameter laju perilaku anti-pemangsa yang bertujuan untuk mengetahui pengaruh perilaku anti-pemangsa terhadap populasi mangsa dan pemangsa, diperoleh bahwa ketika laju perilaku anti-pemangsa kecil, mangsa dan pemangsa akan dapat hidup secara bersamaan dan tidak akan punah sampai waktu t menuju tak hingga. Namun, ketika laju perilaku anti-pemangsa besar, populasi pemangsa akan menurun menuju kepunahan, tetapi populasi mangsa akan tetap ada sampai waktu t menuju tak hingga.

Daftar Pustaka

- Abadi, Savitri, D., & Ummah, C. (2013). Stability Analysis of Lotka-Volterra Model with Holling Type II Functional Response. *Scientific Research Journal (SCIRJ)*, 1(V), 22–26.
- Hirsch, M. W., Smale, S., & Devaney, R. L. (2004). *Differential Equations, Dynamical Systems & An Introduction to Chaos*. (B. Holland & T. Singer, Eds.) (Second, Vol. 60). USA: Academic Press, Elsevier.
- Jha PK, & Ghorai S (2017). Stability of Prey-Predator Model with Holling type Response Function and Selective Harvesting, 6(3). <https://doi.org/10.4172/2168-9679.1000358>
- Mortoja, S. G., Panja, P., & Mondal, S. K. (2018). Dynamics of A Predator-Prey Model with Stage-Structure on Both Species and Anti-Predator Behavior. *Informatics in Medicine Unlocked*, 10, 50–57. <https://doi.org/10.1016/j.imu.2017.12.004>
- Ningrum, R. E., Abadi, & Astuti, Y. P. (2019). Model Matematika Mangsa Pemangsa Dua Spesies dengan Fungsi Respon Holling Tipe II dan Perilaku Anti Pemangsa. *MATHunesa*, 7, 10–14.
- Savitri, D. (2018). Dynamics Analysis of Anti-predator Model on Intermediate Predator With Ratio Dependent Functional Responses. *Journal of Physics*, 953. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/953/1/012201>
- Smith, H. A. L. (n.d.). *The Rosenzweig-MacArthur Predator-Prey Model*. USA: Arizona State University.
- Tang, B., & Xiao, Y. (2015). Bifurcation Analysis of A Predator-Prey Model with Anti-Predator Behaviour. *Chaos, Solitons and Fractals*, 70(1), 58–68. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2014.11.008>
- Xiao, Z., Xie, X., & Xue, Y. (2018). Stability and Bifurcation in a Holling Type II Predator – Prey Model With Allee Effect and Time Delay. *Advances Difference Equations*, (288), 1–21. <https://doi.org/10.1186/s13662-018-1742-4>