PRISMA 3 (2020): 8-13
PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika
https://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/prisma/
ISSN 2613-9189

Prime Labeling of Pan Graph and Its Line, Middle and Duplication Graph

Helmi[a,*], Fransiskus Fran[b], Dany Riansyah Putra[c]

[a,b,c] *Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Tanjungpura*

** Alamat Surel: helmi132205@yahoo.co.id*

Abstrak

Suatu graf G = (V,E) dengan |V| = n memiliki pelabelan prima jika titik-titiknya dapat dilabelkan dengan bilangan bulat positif berbeda 1, 2, 3, ...n sedemikian sehingga untuk sisi xy, label dari x dan y relatif prima. Graf yang memenuhi kondisi tersebut disebut graf prima. Pada penelitian ini dilakukan investigasi pelabelan prima untuk pan graph serta line, middle dan duplikasi dari pan graph.

Kata kunci:

Pelabelan prima, Graf prima, Relatif prima

1. Pendahuluan

Graf merupakan pasangan himpunan titik dan himpunan sisi. Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V(G), E(G)) dimana V(G) adalah himpunan tak kosong dari unsur-unsur yang disebut titik (vertex) dan E(G) adalah himpunan dari pasangan tak terurut (u,v) dari titik-titik u,v di V(G) yang disebut sisi (edge). Selanjutnya sisi e = (u,v) pada graf G ditulis e = uv.

Pelabelan graf adalah suatu pemetaan satu-satu yang memetakan himpunan dari elemen-elemen graf ke himpunan bilangan bulat positif. Atau sebarang pemetaan yang memasangkan unsur – unsur graf titik atau sisi dengan bilangan bulat. Jika domain dari pemetaan adalah titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik. Salah satu bentuk pengembangan dari pelabelan titik adalah pelabelan prima. Pelabelan prima pada suatu graf merupakan pelabelan graf yang sedemikian sehingga setiap pasang titik u dan v yang bertetangga, FPB(f(u),f(v)) = 1. Graf yang memenuhi kondisi tersebut disebut graf prima.

Penelitian sebelumnya terkait pelabelan prima pernah dilakukan oleh Prajapati dan Vaidya (2012) serta Prajapati dan Gajjar (2014). Keduanya membahas mengenai pelabelan prima pada titik-titik dari suatu graf. Pada penelitian ini juga akan dilakukan pelabelan prima pada line, middle dan split dari grap pan.

Graf line secara sederhana diartikan sebagai bentuk perubahan sisi menjadi titik. Sedangkan pengertian dari graf line adalah titik yang diambil dalam korespondensi satu-satu dari sisi graf G dan dinotasikan sebagai L(G). Dikatakan dua titik dari L(G) bertetangga (adjacent) jika dan hanya jika korespondensi sisi dari graf G juga bertetangga (adjacent). (Roza,2014).

Graf middle dari suatu graf terhubung G yang dinotasikan dengan M(G) merupakan graf dengan himpunan titik hasil dari gabungan titik-titik dan sisi pada graf G. Dua titik saling terhubung jika merupakan titik yang saling bertetangga pada G atau merupakan titik dan sisi yang saling terhubung pada G. (Thenmozhi, 2017).

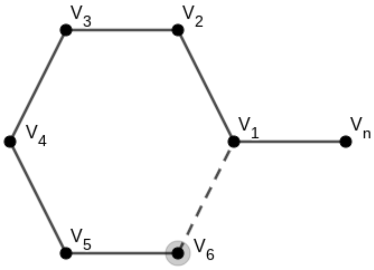
Graf split dari suatu graf G diperoleh dengan menambah titik baru v’ untuk setiap titik v pada graf G, kemudian menghubungkan v’ ke setiap titik di G yang terhubung dengan v. (Raj, 2011).

2. Hasil dan Pembahasan

To cite this article:
Helmi, Fran, F., & Putra, D. R. (2020). Prime Labeling of Pan Graph and Its Line, Middle and Duplication Graph. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika 3*, 8-13

Definisi 1. Graf *Pan* P_n merupakan graf yang diperoleh dari menggabungkan sebuah graf cycle C_n dengan sebuah graf bintang *singleton* K_1.

Teorema 1. Diberikan n bilangan bulat positif dengan $n \geq 3$, Misalkan P_n merupakan graf *pan* dengan titik sebanyak $n + 1$, Maka pelabelan bilangan prima pada graf *pan* adalah $f(v_i) = i, \forall\, i \in \mathbb{N}$



Gambar 1. P_n

Bukti Pn dengan titik sebanyak $n + 1$ dimana $v_i \in V(C_n)$ dengan $i = 1,2,3, \ldots n - 1$, $v_n \in V(K_1)$ dan v_n bertetangga dengan v_1.

Seperti kita ketahui bahwa v_n bertetangga dengan $v_1$maka

$$FPB(f(v_n), f(v_1)) = FPB(n, 1) = 1$$

Serta v_{n-1} bertetangga dengan $v_1$maka

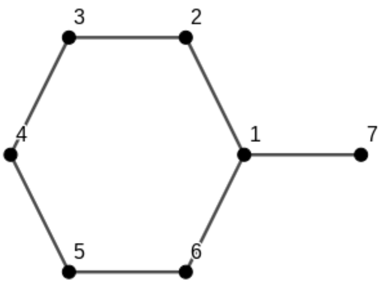
$$FPB(f(v_{n-1}), f(v_1)) = FPB(n - 1,1) = 1$$

Selanjutnya untuk setiap $v_i \in V(C_n)$ selain v_{n-1}akan bertetangga dengan v_{i+1}, sehingga titik yang bertetangga adalah $v_i$dan v_{i+1}dengan $i = 1,2,3, \ldots n - 2$ akibatnya

$$FPB(f(v_i), f(v_{i+1})) = FPB(i, i + 1) = 1$$

Karena untuk setiap pasang titik $v_i \in V(P_n)$ yang bertetangga saling prima maka graf pan Pn merupakan graf prima.

Sebagai ilustrasi hasil dari pelabelan graf prima ditunjukan pada gambar berikut:

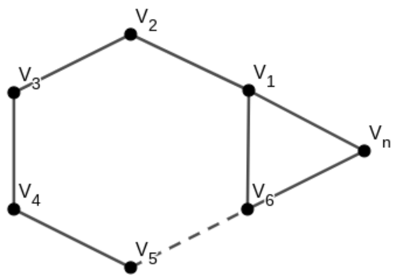


Gambar 2. Pelabelan Prima Pada P_6

Definisi 2. *Line* dari Graf *Pan* $L(P_n)$ adalah graf dengan $V(L(P_n)) = E(P_n)$ dengan titik di $L(P_n)$ akan bertetangga jika dan hanya jika sisi-sisi yang bersesuaian saling terkait di P_n.

Teorema 2. Diberikan n bilangan bulat positif dengan $n \geq 3$, Misalkan $L(P_n)$ merupakan line dari graf *pan*. Maka pelabelan bilangan prima pada *line* dari graf *pan* adalah

$$f(v_i) = i, \forall\, i \in \mathbb{N}$$



Gambar 3. L(P_n)

Bukti L(Pn) dengan titik sebanyak $n + 1$ dimana $v_i \in V(C_n)$ dengan $i = 1,2,3,\ldots n - 1$, $v_n \in V(K_2)$ dan v_n bertetangga dengan $v_1$dan v_{n-1}.

Seperti kita ketahui bahwa v_n dan v_{n-1}bertetangga dengan $v_1$maka

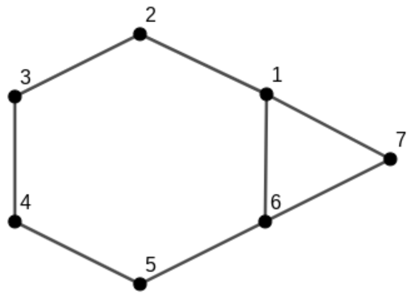
$$FPB(f(v_n), f(v_1), f(v_{n-1})) = FPB(n, 1, n - 1) = 1$$

Selanjutnya untuk setiap $v_i \in V(C_n)$ selain v_{n-1}akan bertetangga dengan v_{i+1}, sehingga titik yang bertetangga adalah $v_i$dan v_{i+1}dengan $i = 1,2,3,\ldots n - 2$ akibatnya

$$FPB(f(v_i), f(v_{i+1})) = FPB(i, i + 1) = 1$$

Karena untuk setiap pasang titik $v_i \in V(L(Pn))$ yang bertetangga saling prima maka line dari graf pan L(Pn) merupakan graf prima.

Sebagai ilustrasi hasil dari pelabelan graf prima ditunjukan pada gambar berikut:

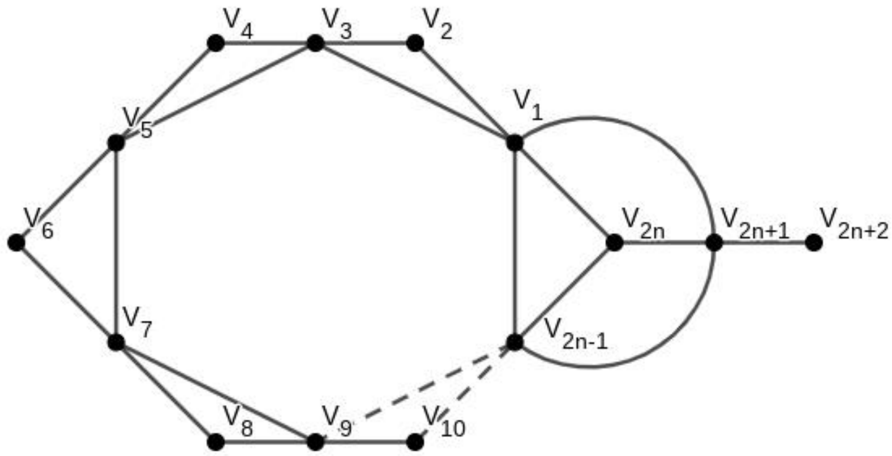


Gambar 4. Pelabelan Prima Pada L(P6)

Definisi 3. *Middle* dari Graf *Pan* M(P_n) merupakan graf dengan V(M(P_n)) = V(P_n) ∪ E(P_n). dengan titik di M(P_n) akan bertetangga jika
Merupakan sisi yang bertetangga di P_n
Merupakan titik dan sisi yang saling terhubung di P_n

Teorema 3. Diberikan n bilangan bulat positif dengan $n \geq 3$, Misalkan M(P_n) merupakan *middle* dari graf *pan.* Maka pelabelan bilangan prima pada *middle* dari graf *pan* adalah

$$f(v_i) = i, \forall\ i \in \mathbb{N}$$



Gambar 5. *Middle* dari graf *pan* $M(P_n)$

Teorema 3. Diberikan *n* bilangan bulat positif dengan $n \geq 3$. Misalkan $M(P_n)$ merupakan *middle* dari graf *pan*, maka *middle* dari graf *pan* adalah graf prima.

Bukti. Diberikan $v_2, v_4, v_6, \cdots, v_{2n}$ dan v_{2n+2} merupakan titik-titik dari P_n dan, $v_1, v_3, v_5, \cdots, v_{2n-1}, v_{2n+1}$ sebagai titik tambahan yang berkorespondensi dengan $e_1, e_2, \cdots, e_n$ yang merupakan sisi dari P_n untuk mendapatkan *middle* dari P_n. Akibatnya, $M(P_n)$ mempunyai titik sebanyak $2n+2$ dimana v_{2n+2} bertetangga dengan v_{2n+1}, v_{2n+1} bertetangga dengan v_1, v_{2n} dan v_{2n-1} serta v_{2n-1} bertetangga dengan v_1 dan v_{2n}. Didefinisikan pelabelan simpul, $f: V\big(M(P_n)\big) \to \big\{1,2,3,\cdots,\big|V\big(M(P_n)\big)\big|\big\}$dengan,
$f(v_i) = i, \forall\, i \in 1 \leq i \leq 2n+2$.
Oleh karena v_{2n+2} bertetangga dengan v_{2n+1} dan berdasarkan $f(v_i)$ maka

$$FPB\big(f(v_{2n+2}), f(v_{2n+1})\big) = FPB(2n+2, 2n+1) = 1$$

Selanjutnya, untuk titik-titik yang bertetangga,

1. v_{2n+1}, v_1, v_{2n} dan v_{2n-1}

$$FPB\big(f(v_{2n+1}), f(v_1), f(v_{2n}), f(v_{2n-1})\big) = FPB(2n+1, 1, 2n, 2n-1) = 1$$

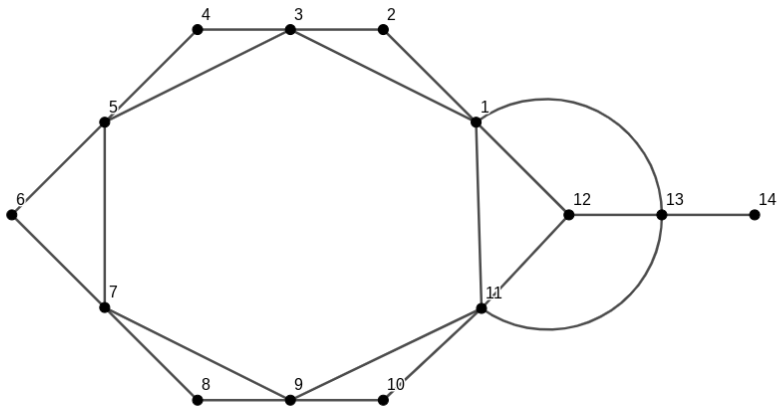
2. v_{2n-1} ,v_1 dan v_{2n}

$$FPB\big(f(v_{2n-1}), f(v_1), f(v_{2n})\big) = FPB(2n-1, 1, 2n) = 1$$

Lebih lanjut, untuk setiap $v_i \in V\big(M(P_n)\big), i = 1, 3, 5, \cdots, 2n-1$ yang saling bertetangga akan mempunyai label yang saling prima karena merupakan bilangan ganjil dengan beda sama dengan 2. Kemudian, untuk setiap $v_i \in V\big(M(P_n)\big),\ i = 1, 2, 3, \cdots, 2n$ yang saling bertetangga akan saling prima berdasarkan Teorema 1.

Oleh karena untuk setiap titik $v_i \in V\big(M(P_n)\big)$ yang bertetangga saling prima maka *middle* dari graf *pan* $M(P_n)$ merupakan graf prima.

Sebagai ilustrasi hasil dari pelabelan graf prima ditunjukan pada gambar berikut:

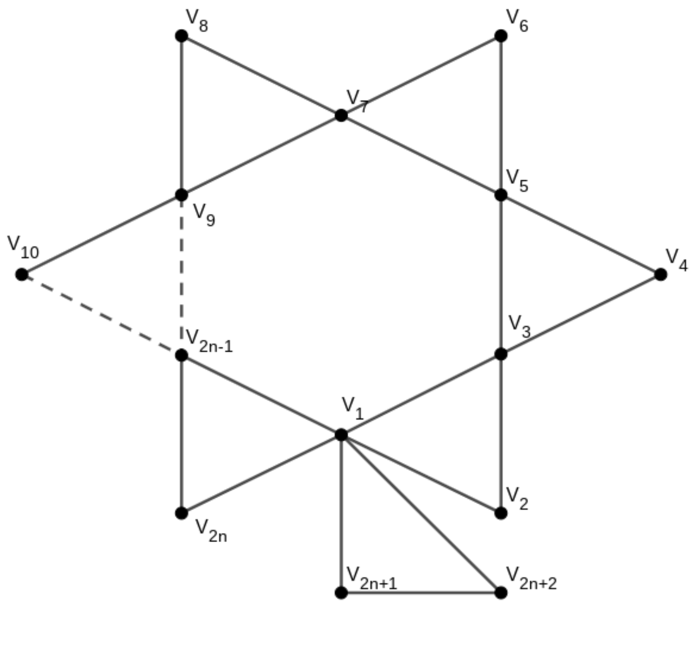


Gambar 6. Pelabelan Prima Pada M(P6)

Definisi 4. Duplikasi sisi dari graf *pan* diperoleh dengan menambahkan simpul baru w untuk setiap sisi $e = uv$ di P_n dan menghubungkan w dengan setiap simpul yang bersisian dengan e di P_n sehingga $N(w) = \{u, v\}$.

Teorema 4. Diberikan n bilangan bulat positif dengan $n \geq 3$, Misalkan S(P_n) merupakan *splitting* dari graf *pan*. Maka pelabelan bilangan prima pada *duplikasi* dari graf *pan* adalah

$$f(v_i) = i, \forall\, i \in \mathbb{N}$$



Gambar 7. Split dari P_n

Bukti

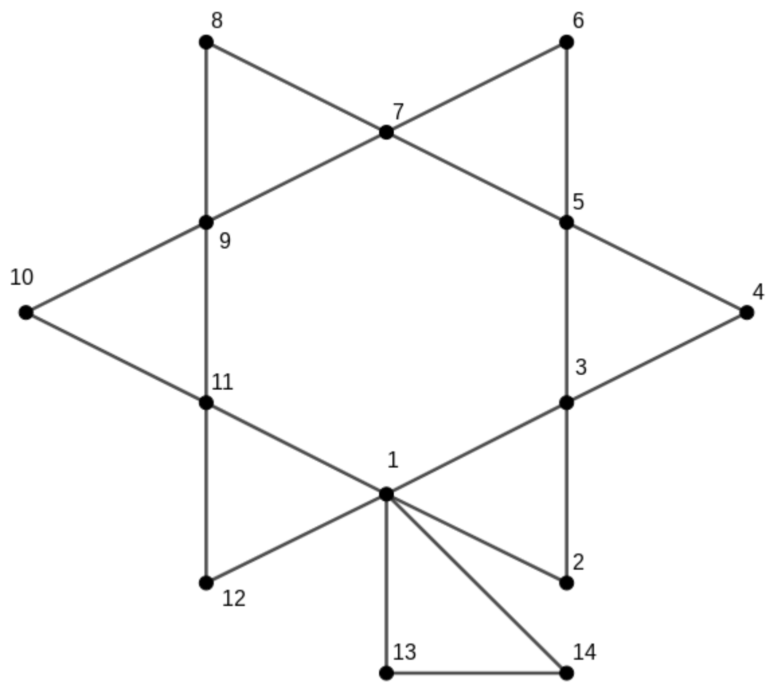
S(Pn) dengan titik sebanyak $2n + 2$ dimana v_{2n+2} bertetangga dengan v_{2n+1} dan v_1 maka

$$FPB(f(v_{2n+2}), f(v_{2n+1}), f(v_1)) = FPB(2n + 2, 2n + 1, 1) = 1$$

Selanjutnya untuk setiap $v_i \in V(S(Pn))$ dengan i = 1, 3, 5, … 2n-1 serta i = 1, 2, 3,... 2n yang saling bertetangga akan saling prima persis seperti yang dijelaskan pada pembuktian teorema 3.

Karena untuk setiap pasang titik $v_i \in V(S(Pn))$ yang bertetangga saling prima maka *duplikasi* dari graf *pan* S(Pn) merupakan graf prima.

Sebagai ilustrasi hasil dari pelabelan graf prima ditunjukan pada gambar berikut:



Gambar 8. Pelabelan prima pada $S(P_n)$

3. Simpulan

Berdasarkan hasil pembahasan sebelumnya mengenai pelabelan graf prima pada hasil pembentukan *line*, *middle dan duplikasi* dari graf *pan* maka dapat ditarik kesimpulan bahwa graf *pan* serta *line*, *middle* dan *duplikasi* dari graf *pan* merupakan graf prima dengan menggunakan pemetaan satu-satu $f(v_i) = i, \forall\, i \in \mathbb{N}$

Daftar Pustaka

Prajapati, U. M. & Gajjar, S. J. (2014). Some Result on Prime Labeling. *Open Journal of Discrete Mathematics*, 4, 60-66.

Raj, P. L. R. & Koilraj, S. (2011). Cordial Labeling for The Splitting Graph of Some Standard Graphs. *International Journal of Mathematics and Soft Computing*, 1(1), 105-114.

Roza, I., Narwen & Zulakmal. (2014). Graf Garis (*Line Graph*) dari Graf Siklus, Graf Lengkap, dan Graf Bintang. *Jurnal Matematika UNAND*, 3(2), 1 – 4.

Thenmozhi, B. & Prabha, R. (2017). Power Domination of Middle Graph of Path, Cycle and Star. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 114 (5), 13-19.

Vaidya, S. K. & Prajapati, U. M. (2012). Some Switching Invariant Prime Graphs. *Open Journal of Discrete Mathematics*, 2(1), 17-20.