PRISMA 3 (2020): 14-24
PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika
https://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/prisma/
ISSN 2613-9189

Pelabelan Super Sisi Ajaib pada Graf Kembang Api Termodifikasi

Martinus J. Setiawan[a,*], Adelia Chindranata[b], Kiki A. Sugeng[c]

[a,b,c]*Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia, Kampus UI, Depok 16424, Indonesia*

* *Alamat Surel: martinus.julius@sci.ui.ac.id*

Abstrak

Misal *G* = *(V,E)* adalah graf terhubung sederhana dan tidak berarah dengan $|V|$ simpul and |E| sisi. Suatu pemetaan bijektif f dari himpunan simpul gabung himpunan sisi ke himpunan $\{1,2,\dots,|V|+|E|\}$ disebut sebagai pelabelan total sisi ajaib pada G jika ada konstanta $s \in \mathbb{N}$ (disebut konstanta ajaib f) sehingga bobot sisi uv adalah $f(u)+f(v)+f(uv)=c$ untuk setiap $uv \in E(G)$. Jika $f: V(G) \to \{1,2,\dots,|V|\}$ dan $f: E(G) \to \{|V|+1,|V|+2,\dots,|V|+|E|\}$ maka f disebut pelabelan total super sisi ajaib dan G disebut graf super sisi ajaib. Graf kembang api (*firecracker*) ($F_{n,k}$) adalah graf yang didapatkan dengan menggabungkan n buah graf bintang-k dengan menghubungkan salah satu daun pada masing-masing graf bintang-k. Misalkan $S_{m_i}, i = 1,2,\dots,n$ adalah graf bintang, dengan $m_{i+1} = m_i + 1$ dan $m_1 = m \in \mathbb{N}$. Graf kembang api termodifikasi (*modified firecracker*) ($F'_{m,n}$) adalah graf yang didapatkan dengan menggabungkan, graf bintang S_{m_i} dan lintasan P_n, dengan cara satu daun dari tiap graf bintang ditempelkan pada satu simpul di P_n . Pelabelan total sisi ajaib pada graf kembang api termodifikasi yang akan dibuktikan pada studi ini memiliki minimal tiga buah simpul pada graf bintang pertama ($m \geq 3$) dan minimal terdapat tiga buah graf bintang ($n \geq 3$). Pada penelitian ini dibuktikan bahwa sembarang graf kembang api termodifikasi adalah graf total super sisi ajaib.

Kata kunci:

Pelabelan sisi ajaib, Pelabelan total sisi ajaib, graf kembang api, graf kembang api termodifikasi

1. Pendahuluan

Pelabelan graf merupakan salah satu topik dalam teori graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum direpresentasikan oleh simpul dan sisi serta himpunan bagian bilangan asli yang disebut label. Konsep pelabelan ajaib (*magic labelling)* diperkenalkan oleh Sadlàček tahun 1964, sedangkan konsep pelabelan total sisi ajaib (*edge magic total labelling)* yang digunakan berdasarkan konsep Enomoto *et al* (1998).

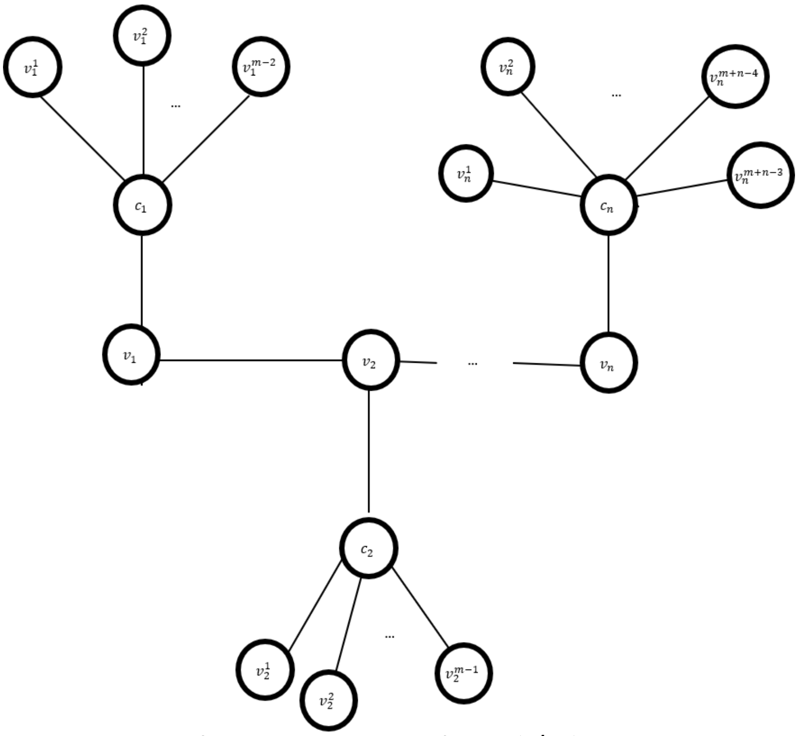
Misal *G* = *(V,E)* dengan $|V|$ simpul and |E| sisi merupakan graf terhubung sederhana dan tidak berarah. Suatu pemetaan bijektif f dari himpunan simpul gabung himpunan sisi ke himpunan $\{1,2,\dots,|V|+|E|\}$ disebut sebagai pelabelan total sisi ajaib pada G jika terdapat suatu konstanta $c \in \mathbb{N}$ (disebut konstanta ajaib f) sehingga bobot sisi uv adalah $f(u)+f(v)+f(uv)=s$ untuk setiap $uv \in E(G)$ (Enomoto *et al.*, 1998). Jika $f: V(G) \to \{1,2,\dots,|V|\}$ dan $f: E(G) \to \{|V|+1,|V|+2,\dots,|V|+|E|\}$ maka f disebut pelabelan total super sisi ajaib (Enomoto *et al*, 1998) dan G disebut graf super sisi ajaib. Pada penelitian sebelumnya telah dilakukan pelabelan super sisi ajaib pada graf kembang api regular (Swaminathan & Jeyanthi, 2006). Selain itu, telah ditemukan konstruksi pelabelan super sisi ajaib pada graf bintang-n pada tahun 2002 oleh Lee dan Kong (Gallian, J.A., 2018).

Berdasarkan Gallian (2018), belum dibahas pelabelan super sisi ajaib untuk graf kembang api yang tak regular. Oleh karena itu pada makalah ini akan diberikan konstruksi pelabelan super sisi ajaib untuk graf kembang api termodifikasi.

To cite this article:
Setiawan, M.J., Chindratanata, A., & Sugeng, K.A. (2020). Pelabelan Super Sisi Ajaib pada Graf Kembang Api Termodifikasi. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika 3*, 14-24

2. Hasil Penelitian

Graf kembang api (*firecracker*)$F_{n,k}$ merupakan graf yang diperoleh dengan cara menggabungkan n buah graf bintang-k dengan menghubungkan salah satu daun pada masing-masing graf bintang-k (Chen *et al*, 1997). Misalkan $m_{i+1} = m_i + 1$ dan $m_1 = m \in \mathbb{N}$. Misalkan S_{m_i}adalah n buah graf bintang-m_i dengan $i = 1,2,\dots,n$. Misalkan pula $v_i, i = 1,2,..,n$ adalah simpul-simpul di lintasan P_n. Graf kembang api termodifikasi (*modified firecracker*) $F'_{m,n}$ adalah graf yang diperoleh dengan menggabungkan masing-masing graf bintang S_{m_i} dengan cara satu daun dari tiap graf bintang-m_i ditempelkan pada satu simpul v_i di P_n. Ilustrasi dari graf kembang api termodifikasi diberikan di Gambar 1.



Gambar 1. Graf kembang api termodifikasi ($\boldsymbol{F'_{m,n}}$)

Lemma 1 berikut ini diperlukan untuk membuktikan konstruksi pelabelan super sisi ajaib dari graf kembang api termodifikasi.

Lemma 1 (Sepang *et al*, 2008). Suatu graf G dengan $v = |V|$ simpul dan $e = |E|$ sisi adalah graf sisi ajaib jika dan hanya jika terdapat suatu fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, \dots, |V| + |E|\}$ sedemikian sehingga himpunan $S = \{f(x) + f(y) |\, xy \in E(G)\}$ terdiri dari e bilangan bulat terurut. Dalam konstruksi ini, f adalah pelabelan super sisi ajaib dari G dengan konstanta ajaib $c = v + e + s$ dimana $s = \min(S)$ dan $S = \{f(x) + f(y) |\, xy \in E(G)\} = \{c - (v + 1), c - (v + 2), \dots, c - (v + e)\}$

Dengan menggunakan Lemma 1, pelabelan f hanya perlu didefinisikan pada himpunan simpul ke $\{1,2,\dots,|V|\}$ dan kemudian ditunjukkan terdapat $S = \{f(x) + f(y) |\, xy \in E(F'_{m,n})\}$ yang anggotanya terdiri dari bilangan bulat terurut $\{\{c - (v + 1), c - (v + 2), \dots, c - (v + e)\}$ untuk menunjukan bahwa pemetaan tersebut merupakan pelabelan super sisi ajaib.

Teorema 2. Graf kembang api termodifikasi $F'_{m,n}$ adalah graf super sisi ajaib untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$.
Bukti:
Definisikan himpunan simpul $V(F'_{m.n})$ (mengikuti Gambar 1) dan sisi $\mathrm{E}(F'_{m.n})$ dari $F'_{m.n}$ sebagai berikut:
$V(F'_{m.n}) = \{v_i: 1 \leq i \leq n\} \cup \{c_i: 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i^j: 1 \leq i \leq n\,,\ 0 \leq j \leq m + i - 3\}$
$\mathrm{E}(F'_{m.n}) = \{v_i v_{i+1}: 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{v_i c_i: 1 \leq i \leq n\} \cup \{c_i v_i^j: 1 \leq i \leq n\,,\ 1 \leq j \leq m + i - 3\}$

Banyaknya simpul dari himpunan $\{v_i: 1 \le i \le n\}$ dan $\{c_i: 1 \le i \le n\}$ masing-masing adalah n simpul dan banyaknya simpul dari himpunan $\left\{v_i^j: 1 \le i \le n\,,\ 0 \le j \le m+i-3\right\}$ adalah $\frac{n}{2}(2m+n-5)$. Jadi banyak simpul total dari sembarang graf kembang api termodifikasi ($F'_{m,n}$) adalah $n+n+\frac{n}{2}(2m+n-5)=\frac{n^2+2mn-n}{2}$. Pelabelan simpul dibagi dalam dua kasus untuk n ganjil dan n genap.

- Kasus 1: untuk n ganjil

Definisikan pelabelan simpul $F'_{m.n}$ sebagai berikut:

$$f(v_i) = \begin{cases} \frac{i+1}{2}\left(m+\frac{i-3}{2}\right) & \text{Jika } i \text{ ganjil, } 1 \le i \le n \\ \frac{n+1}{2}\left(m+\frac{n-3}{2}\right)+\frac{n+3}{2}+\frac{i-2}{2}\left(m+\frac{i}{2}\right) & \text{Jika } i \text{ genap, } 2 \le i \le n-1 \end{cases}$$

$$f(c_i) = \begin{cases} \frac{n+1}{2}\left(m+\frac{n-3}{2}\right)+\frac{n+1}{2}+\frac{i-1}{2}\left(m+\frac{i-1}{2}\right) & \text{Jika } i \text{ ganjil, } 1 \le i \le n \\ \frac{i}{2}\left(m+\frac{i-2}{2}\right) & \text{Jika } i \text{ genap, } 2 \le i \le n-1 \end{cases}$$

$$f(v_i^j) = \begin{cases} \frac{i-1}{2}\left(m+\frac{i-3}{2}\right)+j & \text{Jika } i \text{ ganjil, } 1 \le i \le n \text{ dan } 1 \le j \le m+\frac{i-3}{2}-1 \\ \frac{i-1}{2}\left(m+\frac{i-3}{2}\right)+j+1 & \text{Jika } i \text{ ganjil, } 3 \le i \le n \text{ dan } m+\frac{i-3}{2} \le j \le m+i-3 \\ \frac{n+1}{2}\left(m+\frac{n-3}{2}\right)+\frac{n+3}{2}+\frac{i-2}{2}\left(m+\frac{i}{2}\right)+j-\frac{i}{2} & \text{Jika } i \text{ genap, } 4 \le i \le n-1 \text{ dan } 1 \le j \le \frac{i}{2}-1 \\ \frac{n+1}{2}\left(m+\frac{n-3}{2}\right)+\frac{n+3}{2}+\frac{i-2}{2}\left(m+\frac{i}{2}\right)+j-\frac{i}{2}+1 & \text{Jika } i \text{ genap, } 2 \le i \le n-1 \text{ dan } \frac{i}{2} \le j \le m+i-3 \end{cases}$$

Dari pelabelan simpul ini dapat dibuktikan bahwa $f: V(F'_{m.n}) \to \left\{1,2,\dots,\frac{n^2+2mn-n}{2}\right\}$ merupakan pelabelan yang injektif. Misalkan

$P=\left\{p \in \mathbb{N}: 1 \le p \le m+\frac{i-3}{2}-1\right\}$ dengan i bilangan ganjil , $1 \le i \le n$

$Q=\left\{q \in \mathbb{N}: m+\frac{i-3}{2} \le q \le m+i-3\right\}$ dengan i bilangan ganjil, $3 \le i \le n$

$R=\left\{r \in \mathbb{N}: 1 \le r \le \frac{i}{2}-1\right\}$ dengan i bilangan genap, $4 \le i \le n-1$

$T=\left\{\mathrm{t} \in \mathbb{N}: \frac{i}{2} \le t \le m+i-3\right\}$ dengan i bilangan genap, $2 \le i \le n-1$

Akan dibuktikan pelabelan simpul adalah pelabelan injektif dengan cara menunjukan untuk sembarang $p \in P$, $q \in Q, r \in R, t \in T$ berlaku

$$\begin{aligned} &f(v_1^p) < f(v_1) < f(c_2) < f(v_3^p) < f(v_3) < f(v_3^q) < f(c_4) < f(v_5^p) < f(v_5) < f(v_5^q) < \\ &\dots < f(c_{n-1}) < f(v_n^p) < f(v_n) < f(v_n^q) < f(c_1) < f(v_2) < f(v_2^s) < f(c_3) < f(v_4^r) < \\ &f(v_4) < f(v_4^t) < f(c_5) < f(v_6^r) < f(v_6) < f(v_6^t) < \dots < f(c_{n-2}) < f(v_{n-1}^r) < \\ &f(v_{n-1}) < f(v_{n-1}^t) < f(c_n) \qquad (*) \end{aligned}$$

Untuk membuktikan (*) terpenuhi, pembuktian akan dilakukan dalam delapan subkasus sebagai berikut

- Subkasus 1.1.1
  Akan dibuktikan $(v_1) < f(v_3) < \cdots < f(v_n) < f(v_2) < f(v_4) < \cdots < f(v_{n-1})$.
  Untuk i bilangan ganjil $1 \leq i \leq n$, maka $\frac{i+1}{2}\left(m+\frac{i-3}{2}\right) < \frac{(i+2)+1}{2}(m+\frac{(i+2)-3}{2})$ dengan perkataan lain $f(v_i) < f(v_{i+2})$ sehingga berlaku $f(v_i) < f(v_3) < \cdots < f(v_n)$ (1)

  Dengan cara yang serupa, dapat dibuktikan pula bahwa untuk i bilangan genap, 2$\leq i \leq n-1$ maka $f(v_2) < f(v_4) < \cdots < f(v_{n-1})$ (2)

  Selain itu dapat dilihat bahwa $\frac{n+1}{2}\left(m+\frac{n-3}{2}\right) < \frac{n+1}{2}\left(m+\frac{n-3}{2}\right)+\frac{n+3}{2}$ dengan perkataan lain $f(v_n) < f(v_2)$ (3)

  Dari (1), (2) dan (3) terbukti bahwa $f(v_1) < f(v_3) < \cdots < f(v_n) < f(v_2) < f(v_4) < \cdots < f(v_{n-1})$ (4)

  Dengan cara yang serupa, dapat dibuktikan pula $f(c_2) < f(c_4) < \cdots < f(c_{n-1}) < f(c_1) < f(c_3) < \cdots < f(c_n)$ (5)

- Subkasus 1.1.2
  Akan dibuktikan untuk $1 \leq i \leq n-2$ berlaku $f(v_i) < f(c_{i+1}) < f(v_{i+2})$
  Perhatikan untuk i ganjil maka dapat dilihat bahwa
  $\frac{i+1}{2}\left(m+\frac{i-3}{2}\right) < \frac{i+1}{2}\left(m+\frac{i-1}{2}\right)$, jadi berlaku
  $f(v_i) < f(c_{i+1})$ (6)

  Perhatikan pula $\frac{i+1}{2}\left(m+\frac{i-1}{2}\right) < \frac{i+3}{2}\left(m+\frac{i-1}{2}\right)$, dengan perkataan lain berlaku $f(c_{i+1}) < f(v_{i+2})$ (7)

  Dari (5) dan (6) terbukti bahwa untuk i ganjil, $1 \leq i \leq n-2$ berlaku
  $f(v_i) < f(c_{i+1}) < f(v_{i+2})$ (8)

  Dengan cara yang serupa dapat dibuktikan pula $f(v_i) < f(c_{i+1}) < f(v_{i+2})$ untuk i genap, $2 \leq i \leq n-3$

  Sehingga terbukti untuk $1 \leq i \leq n-2$ berlaku $f(v_i) < f(c_{i+1}) < f(v_{i+2})$ (9)

- Subkasus 1.1.3
  Akan dibuktikan untuk $3 \leq i \leq n$ berlaku $f(v_i^1) < f(v_i^2) < \cdots < f\left(v_i^{m+i-3}\right)$
  Perhatikan untuk i ganjil, $1 \leq i \leq n$

  $$\frac{i-1}{2}\left(m+\frac{i-3}{2}\right)+1 < \frac{i-1}{2}\left(m+\frac{i-3}{2}\right)+2 < \cdots < \frac{i-1}{2}\left(m+\frac{i-3}{2}\right)+m+\frac{i-3}{2}-1$$

  Dengan perkataan lain untuk i ganjil, $1 \leq i \leq n$ dan $p \in P$ $f(v_i^1) < f(v_i^2) < \cdots < f\left(v_i^{m+\frac{i-3}{2}-1}\right)$ (10)

  Perhatikan pula untuk i ganjil, $3 \leq i \leq n$

  $$\frac{i-1}{2}\left(m+\frac{i-3}{2}\right)+m+\frac{i-3}{2}+1 < \frac{i-1}{2}\left(m+\frac{i-3}{2}\right)+m+\frac{i-3}{2}+2 < \cdots < \frac{i-1}{2}\left(m+\frac{i-3}{2}\right)+m+i-2$$

  Dengan perkataan lain untuk i ganjil, $3 \leq i \leq n$ dan $q \in Q$ berlaku

$$f\left(v_i^{m+\frac{i-3}{2}}\right) < f\left(v_i^{m+\frac{i-3}{2}+1}\right) < \cdots < f\left(v_i^{m+i-3}\right) \quad (11)$$

Dari (10) dan (11) maka untuk i ganjil, $3 \le i \le n$ berlaku $f(v_i^1) < f(v_i^2) < \cdots < f\left(v_i^{m+i-3}\right)$ (12)

Selanjutnya untuk i genap, $4 \le i \le n-1$ dan $r \in R$, dengan cara serupa dapat dibuktikan $(v_i^1) < f(v_i^2) < \cdots < f\left(v_i^{\frac{i}{2}-1}\right)$ (13)

Selain itu untuk i genap, $2 \le i \le n-1$ dan $t \in T$, dengan cara serupa dapat dibuktikan $\left(v_i^{\frac{i}{2}}\right) < f\left(v_i^{\frac{i}{2}+1}\right) < \cdots < f\left(v_i^{m+i-3}\right)$ (14)

Dari (13) dan (14) maka untuk i genap, $4 \le i \le n$ berlaku $f(v_i^1) < f(v_i^2) < \cdots < f\left(v_i^{m+i-3}\right)$ (15)

Dari (12) dan (15) maka untuk $3 \le i \le n$ berlaku
$f(v_i^1) < f(v_i^2) < \cdots < f\left(v_i^{m+i-3}\right)$ (16)

- Subkasus 1.1.4
  Akan dibuktikan untuk sembarang i bilangan ganjil dengan $1 \le i \le n$ dan sembarang $p \in P$, berlaku $f\left(v_i^p\right) < f(v_i)$
  Untuk sembarang $p \in P$, dapat dilihat bahwa
  $$\frac{i+1}{2}\left(m+\frac{i-3}{2}\right) - \left(m+\frac{i-3}{2}\right) + p < \frac{i+1}{2}\left(m+\frac{i-3}{2}\right)$$
  $$\to f\left(v_i^p\right) < f(v_i)$$
  Sehingga terbukti untuk i bilangan ganjil dengan $1 \le i \le n$ dan sembarang $p \in P$, berlaku $f\left(v_i^p\right) < f(v_i)$ (17)

  Dengan cara yang serupa, dapat dibuktikan pula untuk i bilangan genap dengan $4 \le i \le n-1$ dan sembarang $r \in R$, berlaku $f(v_i^r) < f(v_i)$ (18)

- Subkasus 1.1.5
  Akan dibuktikan untuk sembarang i bilangan ganjil dengan $3 \le i \le n$ dan sembarang $q \in Q$, berlaku $f(v_i) < f\left(v_i^q\right)$
  Untuk sembarang $q \in Q$ dapat dilihat bahwa
  $$\frac{i+1}{2}\left(m+\frac{i-3}{2}\right) - \left(m+\frac{i-3}{2}\right) + q + 1 > \frac{i+1}{2}\left(m+\frac{i-3}{2}\right)$$
  $$\to f\left(v_i^q\right) > f(v_i)$$
  Sehingga terbukti untuk i bilangan ganjil dengan $3 \le i \le n$ dan sembarang $q \in Q$, berlaku $f(v_i) < f(v_i^q)$ (19)

  Dengan cara yang serupa, dapat dibuktikan pula untuk i bilangan genap dengan $2 \le i \le n-1$ dan sembarang $t \in T$, berlaku $f(v_i) < f(v_i^t)$ (20)

- Subkasus 1.1.6
  Akan dibuktikan untuk sembarang i bilangan ganjil dengan $3 \le i \le n-2$ dan sembarang $q \in Q$, berlaku $f\left(v_i^q\right) < f(c_{i+1})$
  Untuk sembarang $q \in Q$, maka $q \le m+i-3 < m+i-2$ sehingga dapat dilihat bahwa

$$\rightarrow \frac{i+1}{2}\left(m+\frac{i-3}{2}\right)-\left(m+\frac{i-3}{2}\right)+q+1<\frac{i+1}{2}\left(m+\frac{i-3}{2}\right)-\left(m+\frac{i-3}{2}\right)+m+i-1$$

$$\rightarrow f\left(v_i^q\right)<f(c_{i+1})$$

Sehingga terbukti untuk i bilangan ganjil dengan $3 \leq i \leq n-2$ dan sembarang $q \in$ Q, berlaku $f\left(v_i^q\right)<f(c_{i+1})$ (21)

Dengan cara yang serupa, dapat dibuktikan pula untuk i bilangan genap dengan $2 \leq i \leq n-1$ dan sembarang $t \in$ T, berlaku $f(v_i^t)<f(c_{i+1})$ (22)

- Subkasus 1.1.7

  Akan dibuktikan untuk sembarang i bilangan ganjil dengan $1 \leq i \leq n-2$ dan sembarang $p \in P$, berlaku $f(c_{i+1})<f\left(v_{i+2}^p\right)$

  Untuk sembarang $p \in P$ maka $1 \leq p \leq m+\frac{i-3}{2}-1$, sehingga dapat dilihat bahwa

$$\rightarrow \frac{i+1}{2}\left(m+\frac{i-1}{2}\right)<\frac{i+3}{2}\left(m+\frac{i-1}{2}\right)-\left(m+\frac{i-1}{2}\right)+p$$

$$\rightarrow f(c_{i+1})<f\left(v_{i+2}^p\right)$$

  Sehingga terbukti untuk i bilangan ganjil dengan $1 \leq i \leq n-2$ dan sembarang $p \in P$, berlaku $f(c_{i+1})<f\left(v_{i+2}^p\right)$ (23)

  Dengan cara yang serupa, dapat dibuktikan pula untuk i bilangan genap dengan $2 \leq i \leq n-1$ dan sembarang $r \in R$, berlaku $f(c_{i+1})<f(v_{i+2}^r)$ (24)

- Subkasus 1.1.8

  Akan dibuktikan untuk sembarang untuk sembarang $q \in Q$, berlaku $f\left(v_n^q\right)<f(c_1)<f(v_2)$

  Perhatikan untuk sembarang $q \in Q$ maka $q \leq m+n-3<m+n-2$ dapat dilihat bahwa

$$\frac{n-1}{2}\left(m+\frac{n-3}{2}\right)+q+1<\frac{n-1}{2}\left(m+\frac{n-3}{2}\right)+(m+n-1)<\frac{n-1}{2}\left(m+\frac{n-3}{2}\right)+m+n$$

$$\rightarrow f\left(v_n^q\right)<f(c_1)<f(v_2)$$

  Sehingga terbukti untuk sembarang $q \in Q$, berlaku $f\left(v_n^q\right)<f(c_1)<f(v_2)$ (25)

Dari (4), (5), (9), (10), (14), (16), (17), (18), (19), (20), (21), (22), (23), (24), (25) diperoleh

$$f\left(v_1^p\right)<f(v_1)<f(c_2)<f\left(v_3^p\right)<f(v_3)<f\left(v_3^q\right)<f(c_4)<f\left(v_5^p\right)<f(v_5)$$

$$<f\left(v_5^q\right)<\cdots<f(c_{n-1})<f\left(v_n^p\right)<f(v_n)<f\left(v_n^q\right)<f(c_1)<f(v_2)<f(v_2^t)$$

$$<f(c_3)<f(v_4^r)<f(v_4)<f(v_4^t)<f(c_5)<f(v_6^r)<f(v_6)<f(v_6^t)<\cdots<$$

$$f(c_{n-2})<f(v_{n-1}^r)<f(v_{n-1})<f(v_{n-1}^t)<f(c_n) \quad (*)$$

Jadi, terbukti bahwa pelabelan simpul $f: V(F'_{m.n}) \rightarrow \left\{1,2,\ldots,\frac{n^2+2mn-n}{2}\right\}$ di atas merupakan pelabelan injektif.

Selanjutnya untuk memenuhi Lemma 1 akan dibuktikan terdapat himpunan $S = \{f(x) + f(y) |\ xy \in E(F'_{m,n})\}$ terdiri dari bilangan bulat terurut.
Akan dibuktikan himpunan $S = \{f(x) + f(y) |\ xy \in E(F'_{m,n})\}$ terdiri dari bilangan bulat terurut untuk sembarang $p \in P$, $q \in Q, r \in R, t \in T$ dan $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ dengan

$S_1 = \{f(v_1^p) + f(c_1),\ f(c_1) + f(v_1),\ f(v_1) + f(v_2), f(c_2) + f(v_2), f(v_2^t) + f(c_2) |\ p \in P \text{ dan } t \in T \}$

$S_2 = \{f(v_2) + f(v_3), f(v_3^p) + f(c_3), f(c_3) + f(v_3), f(v_3^q) + f(c_3), f(v_4) + f(v_5), f(v_5^p) + f(c_5), f(c_5) + f(v_5), f(v_5^q) + f(c_5), \dots, f(v_{i-1}) + f(v_i), f(v_i^p) + f(c_i), f(c_i) + f(v_i), f(v_i^q) + f(c_i), \dots, f(v_{n-1}) + f(v_n), f(v_n^p) + f(c_n), f(c_n) + f(v_n), f(v_n^q) + f(c_n) |\ i$ bilangan ganjil $3 \le i \le n$, $p \in P$ dan $q \in Q\}$

$S_3 = \{f(v_3) + f(v_4), f(v_4^r) + f(c_4), f(c_4) + f(v_4), f(v_4^t) + f(c_4), f(v_5) + f(v_6), f(v_6^r) + f(c_6), f(c_6) + f(v_6), f(v_6^t) + f(c_6), \dots, f(v_{i-1}) + f(v_i), f(v_i^r) + f(c_i), f(c_i) + f(v_i), f(v_i^t) + f(c_i), \dots, f(v_{n-2}) + f(v_{n-1}), f(v_{n-1}^r) + f(c_{n-1}), f(c_{n-1}) + f(v_{n-1}), f(v_{n-1}^t) + f(c_{n-1}) |\ i$ bilangan genap, $4 \le i \le n-1$, $r \in R$ dan $t \in T\}$

Misal: $w = \frac{n+1}{2}\left(m + \frac{n-3}{2}\right) + \frac{n+1}{2}$
Pembuktian akan dilakukan dengan dua subkasus sebagai berikut

- Subkasus 1.2.1
  Akan dibuktikan anggota himpunan S_1 terdiri dari bilangan bulat terurut
  Untuk sembarang $p \in P$ maka

$$\{f(v_1^p) + f(c_1) | p = 1, \dots, m-2\}$$
$$= \left\{\frac{n+1}{2}\left(m + \frac{n-3}{2}\right) + \frac{\mathrm{n}+1}{2} + p | p = 1, \dots, m-2\right\}$$
$$= \{w+1, \dots, \mathrm{w} + \mathrm{m} - 2\}$$
$$f(c_1) + f(v_1) = \frac{n+1}{2}\left(m + \frac{n-3}{2}\right) + \frac{\mathrm{n}+1}{2} + m - 1 = w + m - 1$$

$$f(v_1) + f(v_2) = \frac{n+1}{2}\left(m + \frac{n-3}{2}\right) + \frac{n+3}{2} + m - 1 = w + m$$
$$f(c_2) + f(v_2) = \frac{n+1}{2}\left(m + \frac{n-3}{2}\right) + \frac{n+3}{2} + m = w + m + 1$$

$$\{f(v_2^t) + f(c_2) |\ t = 1, \dots m-1\}$$
$$= \left\{\frac{n+1}{2}\left(m + \frac{n-3}{2}\right) + \frac{n+3}{2} + t + m |\ r = 1, \dots m-1\right\}$$
$$= \{w+m+2, w+m+3, \dots, w+2m\}$$

  Sehingga terbukti bahwa S_1 merupakan himpunan bilangan bulat terurut yaitu $S_1 = \{w+1, w+2, \dots, w+m-2, w+m-1, w+m, w+m+1, w+m+2, \dots, w+2m\}$

- Subkasus 1.2.2
  Akan dibuktikan anggota himpunan $S_2 \cup S_3$ terdiri dari bilangan bulat terurut

$$\{f(v_{i-1}) + f(v_i) |\ i = 3, 5, \dots, \mathrm{n}\} =$$

$$\left\{w + 2m + 1,\quad w + 4m + 6, \dots, w + \frac{n-1}{2}(2m + n - 2)\right\}$$

Selanjutnya, $\{f(v_i^p)+f(c_i)|\ i=3,5,\dots,n$ dan $p\in P\} = \left\{\frac{i+1}{2}\left(m+\frac{i-3}{2}\right) - \left(m+\frac{i-3}{2}\right)+p+\frac{n+1}{2}\left(m+\frac{n-3}{2}\right)+\frac{n+1}{2}+\frac{i-1}{2}\left(m+\frac{i-1}{2}\right)|\ i=3,5,\dots,n \text{ dan } p\in P\right\}=\{w+2m+2, w+2m+3,..w+3m, w+4m+7, w+4m+8,\dots,w+5m+6, w+\frac{n-1}{2}(2m+n-2)+1, w+\frac{n-1}{2}(2m+n-2)+2,\dots,w+\frac{n-1}{2}(2m+n-2)+m+\frac{n+1}{2}-3\}$

Selanjutnya, $\{f(v_i^p)+f(c_i)|\ i=3,5,\dots,n$ dan $p\in P\} = \left\{\frac{i+1}{2}\left(m+\frac{i-3}{2}\right) - \left(m+\frac{i-3}{2}\right)+p+\frac{n+1}{2}\left(m+\frac{n-3}{2}\right)+\frac{n+1}{2}+\frac{i-1}{2}\left(m+\frac{i-1}{2}\right)|\ i=3,5,\dots,n \text{ dan } p\in P\right\}=\{w+2m+2, w+2m+3,..w+3m, w+4m+7, w+4m+8,\dots,w+5m+6, w+\frac{n-1}{2}(2m+n-2)+1, w+\frac{n-1}{2}(2m+n-2)+2,\dots,w+\frac{n-1}{2}(2m+n-2)+m+\frac{n+1}{2}-3\}$

Selanjutnya, $\{f(c_i)+f(v_i)|\ i=3,5,..,\text{n}\} = \left\{\frac{n+1}{2}\left(m+\frac{n-3}{2}\right)+\frac{n+1}{2}+\frac{i-1}{2}\left(m+\frac{i-1}{2}\right)+\frac{i+1}{2}\left(m+\frac{i-3}{2}\right)\right\} = \left\{\frac{n+1}{2}\left(m+\frac{n-3}{2}\right)+\frac{n+1}{2}+mi+\frac{i^2-2i-1}{2}\right\} = \{w+3m+1, w+5m+7,\dots,w+\frac{n-1}{2}(2m+n-2)+m+\frac{n+1}{2}-2\}$

Selanjutnya, $f(v_i^q)+f(c_i)|\ i=3,5,..,$ n dan $q\in Q\} = \left\{\frac{i+1}{2}\left(m+\frac{i-3}{2}\right) - \left(m+\frac{i-3}{2}\right)+q+1+\frac{n+1}{2}\left(m+\frac{n-3}{2}\right)+\frac{n+1}{2}+\frac{i-1}{2}\left(m+\frac{i-1}{2}\right)|\ i=3,5,..,\text{n dan } q\in Q\right\} = \left\{w+3m+2, w+5m+8, w+5m+9,\dots,w+\frac{n-1}{2}(2m+n-2)+m+\frac{n+1}{2}-2+1, w+\frac{n-1}{2}(2m+n-2)+m+\frac{n+1}{2}-2+2,\dots,w+\frac{n-1}{2}(2m+n-2)+m+n-3+1\right\}$

$$\{f(v_{i-1})+f(v_i)|\ i=4,6,..,n-1\} = \left\{\frac{i}{2}\left(m+\frac{i-4}{2}\right)+\frac{n+1}{2}\left(m+\frac{n-3}{2}\right)+\frac{n+3}{2}+\frac{i-2}{2}\left(m+\frac{i}{2}\right)|\ i=4,6,..,n-1\right\}$$
$$=\left\{w+3m+3,\quad w+5m+10,\dots,w+\frac{n-2}{2}(2m+n-3)\right\}$$

Selanjutnya, $f(v_i^r)+f(c_i)|\ i=4,6,..,n-1$ dan $r\in R\} = \left\{\frac{n+1}{2}\left(m+\frac{n-3}{2}\right)+\frac{n+3}{2}+\frac{i-2}{2}\left(m+\frac{i}{2}\right)+r-\frac{i}{2}+\frac{i}{2}\left(m+\frac{i-2}{2}\right)|\ i=4,6,..,n-1 \text{ dan } r\in R\right\} = \left\{w+3m+4, w+5m+11, w+5m+12,..,w+(n-2)\left(m+\frac{n-3}{2}\right)+1, w+(n-2)\left(m+\frac{n-3}{2}\right)+2,\dots,w+(n-2)\left(m+\frac{n-3}{2}\right)+\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\right\}$

Selanjutnya, $\{f(c_i)+f(v_i)|\ i=4,6,..,n-1\} = \left\{\frac{i}{2}\left(m+\frac{i-2}{2}\right)+\frac{n+1}{2}\left(m+\frac{n-3}{2}\right)+\frac{n+3}{2}+\frac{i-2}{2}\left(m+\frac{i}{2}\right)\right\} = \left\{w+3m+5, w+5m+13,..,,w+(n-2)\left(m+\frac{n-3}{2}\right)+\left(\frac{n-1}{2}\right)\right\}$

Selanjutnya, $\{f(v_i^t)+f(c_i)|\ i=4,6,..,n-1$ dan $t\in T\} = \left\{\frac{n+1}{2}\left(m+\frac{n-3}{2}\right)+\frac{n+3}{2}+\frac{i-2}{2}\left(m+\frac{i}{2}\right)+t+1-\frac{i}{2}+\frac{i}{2}\left(m+\frac{i-2}{2}\right)|\ \ i=4,6,..,n-1 \text{ dan } t\in T\right\} =$ $\{w+3m+6, w+3m+7,\dots,w+4m+5, +5m+14, w+5m+15,\dots,w+6m+$

$14, .., w + \frac{(n-2)}{2}(2m+n-3)+1+1, w+\frac{(n-2)}{2}(2m+n-3)+2+1, \ldots, w+ \frac{(n-2)}{2}(2m+n-3)+(m+n-4)+1\Big\}$

Perhatikan,

$$S_2 \cup S_3 = \{w+2m+1, w+2m+2, \ldots, w+3m. w+3m+1, w+3m+2, \ldots, w + 4m+5, w+4m+6, w+4m+7, .., w+5m+6, w+5m + 7, \ldots, w+6m+14, \ldots, w+\frac{n-1}{2}(2m+n-3), w + \frac{n-1}{2}(2m+n-2), \ldots, w+\frac{n-1}{2}(2m+n-2)+m+n-3 + 1\}$$

Sehingga terbukti bahwa anggota himpunan $S_2 \cup S_3$ bilangan bulat terurut.

Dari subkasus 1.2.1 dan 1.2.2 didapat $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{w+1, w+2, \ldots, w+m-2, w+m-1, w+m, w+m+1, w+m+2, \ldots, w+2m, w+2m+1, w+2m+2, \ldots, w+3m. w+3m+1, w+3m+2, \ldots, w+4m+5, w+4m+6, w+4m+7, .., w+5m+6, w+5m+7, \ldots, w+6m+14, \ldots, w+\frac{n-1}{2}(2m+n-3), w+\frac{n-1}{2}(2m+n-2), \ldots, w+\frac{n-1}{2}(2m+n-2)+m+n-3+1\}$

Terbukti bahwa himpunan $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ terdiri dari $mn - \frac{n}{2}+\frac{n^2}{2}-1$ bilangan bulat terurut sehingga sisi dapat dilabel dengan $f: E(F'_{m.n}) \rightarrow \left\{\frac{2n(n-1)}{4}+mn+1, .., \frac{2n(n-1)}{4}+mn+mn-\frac{n}{2}+\frac{n^2}{2}+m-5\right\}$ sedemikian sehingga $F'_{m,n}$ memiliki konstanta ajaib $c = \frac{10mn+5n^2-4n+2m-1}{4}$

Karena sudah dibuktikan pemetaan simpul $f: V(F'_{m.n}) \rightarrow \left\{1,2, \ldots, \frac{n^2+2mn-n}{2}\right\}$ merupakan pemetaan bijektif dan terdapat $\mathrm{S} = \mathrm{S}_1 \cup \mathrm{S}_2 \cup \mathrm{S}_3$ yang merupakan himpunan bilangan bulat terurut yang terdiri dari $mn - \frac{n}{2}+\frac{n^2}{2}-1$ anggota. Maka menurut Lemma 1, $\mathrm{F'}_{\mathrm{m,n}}$ dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 3,$ dengan n bilangan ganjil merupakan graf super sisi ajaib.

- Kasus 2: untuk n genap

  Definisikan pelabelan simpul graf kembang api termodifikasi $F'_{m,n}$ sebagai berikut:

$$f(v_i) = \begin{cases} \frac{i+1}{2}\left(m+\frac{i-3}{2}\right) & \text{Jika } i \text{ ganjil, } 1 \leq i \leq n \text{ -1} \\ \frac{n}{2}\left(m+\frac{n-4}{2}\right)+\frac{n+4}{2}+\frac{i-2}{2}\left(m+\frac{i}{2}\right) & \text{Jika } i \text{ genap, } 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$f(c_i) = \begin{cases} \frac{n}{2}\left(m+\frac{n-4}{2}\right)+\frac{n+2}{2}+\frac{i-1}{2}\left(m+\frac{i-1}{2}\right) & \text{Jika } i \text{ ganjil, } 1 \leq i \leq n-1 \\ \frac{i}{2}\left(m+\frac{i-2}{2}\right) & \text{Jika } i \text{ genap, } 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

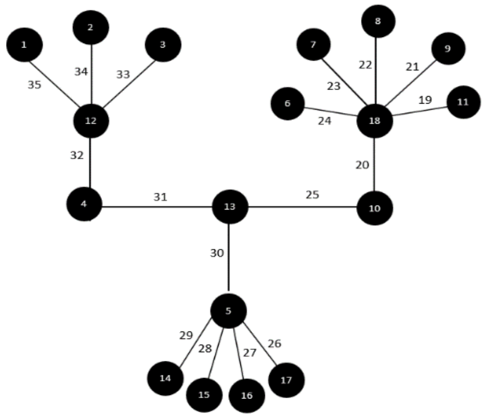
$$f(v_i^j) = \begin{cases} \frac{i-1}{2}\left(m+\frac{i-3}{2}\right) + j & \text{Jika } i \text{ ganjil, } 1 \leq i \leq n-1 \text{ dan } 1 \leq j \leq m+\frac{i-3}{2}-1 \\ \frac{i-1}{2}\left(m+\frac{i-3}{2}\right) + j + 1 & \text{Jika } i \text{ ganjil, } 3 \leq i \leq n-1 \text{ dan } m+\frac{i-3}{2} \leq j \leq m+i-3 \\ \frac{n}{2}\left(m+\frac{n-4}{2}\right)+\frac{n+4}{2}+\frac{i-2}{2}\left(m+\frac{i}{2}\right) + j - \frac{i}{2} & \text{Jika } i \text{ genap, } 4 \leq i \leq n \text{ dan } 1 \leq j \leq \frac{i}{2}-1 \\ \frac{n}{2}\left(m+\frac{n-4}{2}\right)+\frac{n+4}{2}+\frac{i-2}{2}\left(m+\frac{i}{2}\right) + j - \frac{i}{2}+1 & \text{Jika } i \text{ genap, } 2 \leq i \leq n \text{ dan } \frac{i}{2} \leq j \leq m+i-3 \end{cases}$$

Dengan cara serupa dengan kasus 1 dapat dibuktikan definisi pelabelan diatas injektif dan terdapat himpunan $S = \{f(x) + f(y) | \, xy \in E(F'(m,n)\}$ merupakan himpunan yang anggotanya terdiri dari bilangan bulat terurut sehingga syarat dari Lemma 1 terpenuhi sedemikian sehingga untuk n genap, $n \geq 4$ graf kembang api termodifikasi ($F'_{m,n}$) memiliki konstanta ajaib $c = \frac{10mn+5n^2-6n+4}{4}$

Sehingga dari kasus 1 dan kasus 2 terbukti bahwa terdapat pelabelan super sisi ajaib pada graf kembang api termodifikasi untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$. ■

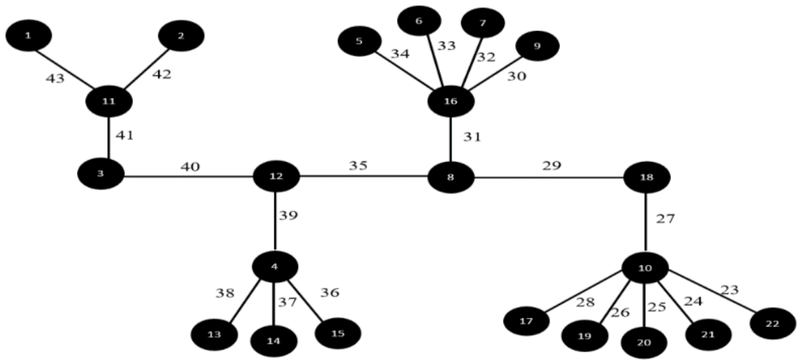
Berikut merupakan dua contoh pelabelan graf kembang api termodifikasi$F'_{m,n}$

Contoh 1: Pelabelan super sisi ajaib pada graf kembang api termodifikasi $\mathrm{F}'_{5,3}$ dengan konstanta ajaib $c = 48$ dapat dilihat pada Gambar 2.



Gambar 2. Pelabelan super sisi ajaib pada graf kembang api $F'_{5,3}$

Contoh 2: Pelabelan super sisi ajaib pada graf kembang api termodifikasi $\mathrm{F}'_{4,4}$ dengan konstanta ajaib $c = 55$ dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 3. Pelabelan super sisi ajaib pada graf kembang api $F'_{4,4}$

3. Simpulan

Terbukti bahwa terdapat pelabelan super sisi ajaib pada graf kembang api termodifikasi untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$ dengan pelabelan seperti yang telah dijabarkan pada Teorema 2 dengan konstanta ajaib yaitu $s = \frac{10mn+5n^2-4n+2m-1}{4}$ untuk n ganjil dan $s = \frac{10mn+5n^2-6n+4}{4}$ untuk n genap.

Daftar Pustaka

Chen, W.C., Lu, H.I. & Yeh (1997). Operations of Interlaced Trees and Graceful Trees, Southeast Asian Bull. Math., 21, 337-348

Enomoto, H., Llado, A.S., Nakamigawa, T., & Ringel, G. (1998). Super Edge-Magic Graphs, *SUT J. Math.*, 34 (2), 105-109

Gallian, J.A. (2018). A Dynamic Survey of Graph Labelling. The Electronic Journal of Combinatorics DS # 6.

Sedláček, J., Proc (1963). Symposium Smolenice 163-167.

Sepang, A., Wibowo, P.A., Herawati, B.N., Sugeng, K.A. (2008). Super Edge Magic Total Labeling On Unicyclic Graphs. Makara, Sains, 12 (1), 31-36.

Swaminathan, V., Jeyanthi, P. (2006). Super Edge-Magic Strength of Fire Crackers, Banana Trees and Uncyclic Graphs, Discrete mathematics 306 (14), 1624-1636.