PRISMA 3 (2020): 25-28
PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika
https://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/prisma/
ISSN 2613-9189

Pelabelan Harmonis Pada Graf Tangga Segitiga Jembatan XJ_n

Kurniawan Atmadja[a,*], Marhaeni[a]

[a] *Instiitut Sains dan Teknologi Nasional, Jl. M.Kahfi II Jagakarsa Jakarta Selatan 12640 Indonesia,*

**Alamat Surel: kurniawan_atmadja@istn.ac.id*

Abstrak

Misalkan $G = (V, E)$ atau sering ditulis G adalah graf dengan himpunan tak kosong simpul $V = V(G)$ dan himpunan busur $E = E(G)$ dimana $|V(G)|$ dan $|E(G)|$ menyatakan banyaknya simpul dan banyaknya busur pada G. Suatu pemetaan f dari V ke $\mathbb{Z}_{|E(G)|}$ dimana $|E(G)| \geq |V(G)|$ disebut pelabelan harmonis jika f merupakan pemetaan injektif sedemikian hingga ketika setiap busur xy dilabel dengan $f^*(xy) = f(x) + f(y)(mod|E(G)|)$ menghasilkan label busur yang berbeda. Pada penelitian ini, dikaji graf tangga segitiga jembatan XJ_n. Konstruksi Graf tangga segitiga jembatan XJ_n adalah graf yang mengalami perluasan dari sebuah graf tangga segitiga variasi X_n. Dengan memberi penambahan satu simpul dan dua busur dibagian awal dan akhir pada graf segitiga variasi X_n didapatkan graf baru. Graf tangga segitiga variasi X_n adalah perluasan graf tangga segitiga L_n yang mengalami variasi. Dinamakan graf tangga segitiga jembatan karena bentuk hasil dari temuan konstruksinya menyerupai bentuk seperti jembatan. Diteliti graf tangga segitiga jembatan XJ_n merupakan graf harmonis.

Kata kunci:

Graf Tangga Segitiga, Graf Tangga Segitiga Variasi, Pelabelan Graf Harmonis.

1. Pendahuluan

Teori graf salah satu cabang Matematika yang dewasa ini pesat perkembangannya. Dengan teori graf banyak hal - hal baru yang tergali, di antaranya mempelajari jenis pelabelan. Dari sebanyak jenis pelabelan graf, dibahas pelabelan harmonis pada graf yang menjadi topik artikel penelitian ini. Misalkan $G(V, E)$ atau dapat ditulis G, adalah graf dengan himpunan simpul tak kosong $V(G)$ dan himpunan busur $E(G)$. Banyak simpul dinotasikan dengan $|V| = p$, dan banyak busur dinotasikan dengan $|E| = q$. Untuk mengkonstruksi pelabelan harmonis dari suatu graf haruslah dipenuhi syarat $|E(G)| \geq |V(G)|$, dimana $V(G)$ adalah himpunan simpul dan $E(G)$ adalah himpunan busur pada graf. Pelabelan harmonis adalah suatu fungsi injektif $f: V(G) \to \mathbb{Z}_q$ sedemikian hingga menginduksi fungsi bijektif $f^*: E(G) \to \mathbb{Z}_q$ yang didefinisikan oleh $f^*(uv) = \big(f(u) + f(v)\big) mod\ q$ dimana $\mathbb{Z}_q$ adalah himpunan bilangan bulat modulo q (Graham dan Sloan,1980). Pada artikel penelitian ini dikaji pelabelan harmonis pada graf tangga segitiga L_n yang digeneralisasi. Diawali mengkaji pelabelan harmonis pada graf tangga segitiga L_n, dan hasilnya dapat dilihat pada prosiding KNM XVII di Institut Sepuluh November Surabaya (Atmadja K, Sugeng.KA, Yuniarko T, 2014). Lalu graf L_n oleh kembali digeneralisasi, dan mendapatkan temuan pelabelan graf harmonis pada graf tangga segitiga variasi X_n, hasilnya telah dimuat pada prosiding Seminar Nasional Matematika tahun 2017 di Universitas Indonesia (Atmadja K, Kiki KA, 2017). Kemudian penulispun kembali melakukan penelitan dengan kajian pelabelan harmonis pada graf tangga segitiga ganda G_n dan hasilnya telah dimuat pada prosiding KNM XIX tahun 2018 di Universitas Brawijaya Malang (Atmadja K, Kiki KA, 2018). Dari ketiga graf (L_n, X_n, G_N) merupakan graf harmonis. Kini dikaji graf tangga segitiga variasi X_n yang mengalami generalisasi, dengan metode menambahkan satu simpul dan dua busur lalu menempelkannya pada bagian awal graf X_n dan mendapatkan graf tangga segitiga jembatan XJ_n . Dalam artikel ini diberi nama graf tangga segitiga jembatan, karena graf yang diperoleh menyerupai bentuk seperti jembatan. Ditunjukan bahwa graf tangga segitiga jembatan merupakan graf harmonis.

To cite this article:
Atmadja, Kurniawan & Marhaeni (2020). Pelabelan Harmonis Pada Graf Tangga Segitiga Jembatan XJ_n. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika 3*, 25-28.

1.1. Rumusan Masalah.

Kajian pada penelitian ini adalah:

"Apakah graf tangga segitiga jembatan XJ_n merupakan graf harmonis?"

1.2. Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah menunjukan bahwa graf tangga segitiga jembatan XJ_n adalah graf harmonis.

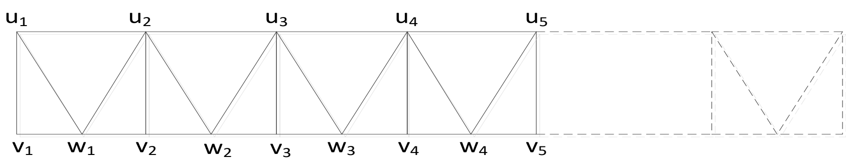
2. Metode Penelitian

Metode yang dilakukan pada penelitian ini adalah:

- Melakukan pengkajian tentang graf tangga segitiga variasi X_n
- Memodifikasi graf tangga segitiga X_n sehingga membentuk graf baru
- Menentukan pola dari graf yang didapat untuk memberi label dari setiap simpul dan busur.
- Menunjukan pelabelan yang didapat sesuai konsep pelabelan harmonis, sehingga didapatkan konstruksi pelabelan harmonis untuk graf tangga segitiga yang baru (ditemukan) XJ_n.

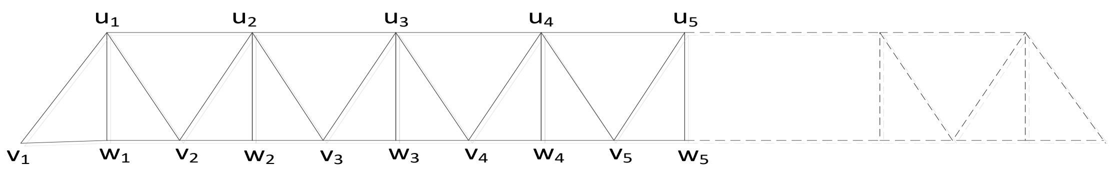
3. Pembahasan

Graf tangga segitiga jembatan XJ_n dengan $p = 3n,$ dan $q = 6n - 3$. Graf tangga segitiga jembatan didapat dari hasil modifikasi graf tangga segitiga variasi X_n dengan $p = 3n - 1$ dan $q = 6n - 5$. (Atmadja K, Kiki KA, 2017). Terlebih dahulu diberikan graf tangga segitiga variasi X_n pada Gambar 1.



Gambar 1. Graf tangga segitiga variasi X_n

Diberikan kajian graf tangga segitiga jembatan XJ_n dimana $p = 3n,$ dan $q = 6n - 3$. Hasil Konstruksi graf tangga segitiga jembatan XJ_n dapat dilihat pada Gambar 2.



Gambar 2. Graf tangga segitiga jembatan XJ_n

Terlihat pada Gambar 2 konstruksi graf XJ_n didapat dari hasil perluasan generalisasi graf tangga segitiga variasi X_n. Bentuknya menyerupai seperti jembatan. Karena menyerupai jembatan maka peneliti beri nama graf tangga segitiga jembatan XJ_n. Dijabarkan sesuai definisi rumusan pelabelan simpul dan busur pada sub bab berikut ini.

3.1. Teorema: Graf Tangga Segitiga jembatan XJ_n merupakan graf harmonis

Pelabelan simpul graf XJ_n dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$f(u_i) = \begin{cases} 3i - 1\,; i \text{ ganjil} \\ 3i - 2\,; i \text{ genap} \end{cases}$$

$(f_{u_i}) \in \{2,4,8,10,14,16,20,22,\ldots\} \subset ((2\ mod\ 6) \cup (4\ mod\ 6))$ (1)

$f(v_i) = 3i - 3\ \ ; i = 1,2,3,\ldots$

$f(v_i) \in \{0,3,6,9,12,15,18,21,\ldots\} \subset ((0\ mod\ 6)\ \cup (3\ mod\ 6))$ (2)

$f(w_i) = \begin{cases} 3i - 2\ ; i \text{ ganjil} \\ 3i - 1\ ; i \text{ genap} \end{cases}$

$f(w) \in \{1,5,7,11,13,17,19\} \subset ((1\ mod\ 6) \cup (5\ mod\ 6))$ (3)

3.2. Pelabelan busur XJ_n

Pelabelan busur XJ_n dapat dirumuskan sebagai berikut:

$f^*(u_iv_i) = \begin{cases} f(u_i) + f(v_i) = 3i - 1 + 3i - 3 = 6i - 4\ ;\ \ i \text{ ganjil} \\ f(u_i) + f(v_i) = 3i - 2 + 3i - 3 = 6i - 5\ ;\ \ i \text{ genap} \end{cases}.$

$f^*(u_iv_i) \in \{2,7,14,19,26,31,38,43,\ldots\} \subset ((2\ mod\ 12) \cup (7\ mod\ 12))$ (4)

$f^*(u_iw_i) = \begin{cases} f(u_i) + f(w_i) = (3i - 1) + (3i - 2) = 6i - 3\ ;\ \ i \text{ ganjil} \\ f(u_i) + f(w_i) = (3i - 2) + (3i - 1) = 6i - 3\ ;\ \ i \text{ genap} \end{cases}$

Cukup ditulis $f^*(u_iw_i) = 6i - 3; i = 1,2,3,\ldots$

$f^*(u_iw_i) \in \{3,9,15,21,27,33,39,45,\ldots\} \subset ((3\ mod\ 12) \cup (9\ mod\ 12))$ (5)

$f^*(u_iv_{i+1}) = \begin{cases} f(u_i) + f(v_{i+1}) = 3i - 1 + 3(i + 1) - 3 = 6i - 1\ ;\ i \text{ ganjil} \\ f(u_i) + f(v_{i+1}) = 3i - 2 + 3(i + 1) - 3 = 6i - 2\ ;\ i \text{ genap} \end{cases}$

$f^*(u_iv_{i+1}) \in \{5,10,17,22,29,34,41,46,\ldots\} \subset ((5\ mod\ 12) \cup (10\ mod\ 12))$ (6)

$f^*(u_iu_{i+1}) = f(u_i) + f(u_{i+1}) = (3i - 1) + 3(i + 1) - 2 = 6i\ ;\ i = 1,2,3\ldots$

$f^*(u_iu_{i+1}) \in \{6,12,18,24,30,36,42,\ldots\} \subset 6\ mod\ 12$ (7)

$f^*(v_iw_i) = \begin{cases} f(v_i) + f(w_i) = 3i - 3 + 3i - 2 = 6i - 5\ ;\ \ i \text{ ganjil} \\ f(v_i) + f(w_i) = 3i - 3 + 3i - 1 = 6i - 4\ ;\ \ i \text{ genap} \end{cases}$

$f^*(v_iw_i) \in \{1,8,13,20,25,32,37,44,\ldots\} \subset ((1\ mod\ 12) \cup (8\ mod\ 12))$ (8)

$f^*(w_iv_{i+1}) = \begin{cases} f(w_i) + f(v_{i+1}) = 3i - 2 + 3(i + 1) - 3 = 6i - 2\ ; i \text{ ganjil} \\ f(w_i) + f(v_{i+1}) = 3i - 1 + 3(i + 1) - 3 = 6i - 1\ ; i \text{ genap} \end{cases}$

$f^*(w_iv_{i+1}) \in \{4,11,16,23,28,35,40,47,\ldots\} \subset ((4\ mod\ 12) \cup (11\ mod\ 12))$ (9)

Himpunan Simpul

$f(V(XJ_n)) = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,\ldots\}$

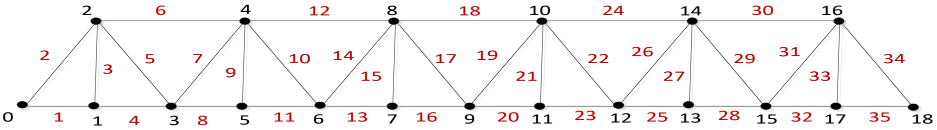
Hal ini sesuai dengan definisi pelabelan simpul $f(V(G)) \to \mathbb{Z}_q$

Himpunan busur :

$f(E(XJ_n)) = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,\ldots\}$

Hal ini sesuai dengan definisi pelabelan busur $f^\star(uv) = (f(u) + f(v))mod\ q$.

Konstruksi Pelabelan harmonis graf tangga segitiga jembatan $XJ_n\ (n \geq 2)$,untuk $n = 6$, dimana $p = 3n,$ dan $q = 6n - 3.$ disajikan pada Gambar 3 di bawah ini :



Gambar 3. Pelabelan harmonis graf tangga segitiga Jembatan $XJ_n(n \geq 2)$

4. Simpulan

Dengan hasil pelabelan simpul graf tangga segitiga jembatan XJ_n sesuai definisi $f\big(V(G)\big) \to \mathbb{Z}_q$ menghasilkan label busur yang saling berbeda. Hal ini sesuai definisi pelabelan busur $f^{*}(uv) = \big(f(u) + f(v)\big) mod\ q.$ Maka graf tangga segitiga jembatan XJ_n merupakan graf harmonis.

Daftar Pustaka

Atmadja. K Sugeng, K.A, Yuniarko.T, (2014). *Pelabelan Harmonis Pada Graf Tangga Segitiga, Prosiding Konferensi Nasional Matematika XVII-2014*, ITS Surabaya

Atmadja. K Sugeng, K.A, (2017). *Pelabelan Harmonis Pada Graf Tangga Segitiga Variasi, Prosiding Seminar Nasional Matematika 2017*, Universitas Indonesia

Atmadja. K Sugeng, K.A, (2018). *Pelabelan Harmonis Pada Graf Tangga Segitiga Ganda, Prosiding Konferensi Nasional Matematika XIX-2018*, Universitas Brawijaya Malang Surabaya

Graham, R.L & Sloan, N.J., (1980). *On Additive Bases and Harmonius Graphs*. SIAM.J.*Alg Discrete Math*. Vol.1, No 3, 382-404