PRISMA 3 (2020): 29-34
PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika
https://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/prisma/
ISSN 2613-9189

Pelabelan Total Tak Ajaib Sisi pada Gabungan Dua Sikel

Dominikus Arif Budi Prasetyo[a,*]

[a] *Prodi S1 Pendidikan Matematika Universitas Sanata Dharma, Paingan Maguwoharjo Depok, Sleman DIY 55282, Indonesia*

* *Alamat Surel: dominic_abp@usd.ac.id*

Abstrak

Pelabelan total tak ajaib sisi adalah pemetaan bijektif dari seluruh unsur graf ke himpunan bilangan asli $\{1,2,\ldots,|V|+|E|\}$ dengan titik $|V|$ dan $|E|$ berturut-turut banyaknya titik dan sisi sehingga bobot dari sisi-sisinya berbeda. Pelabelan total tak ajaib sisi (a,d) adalah pelabelan total tak ajaib sisi dimana bobot sisi-sisinya membentuk barisan aritmetika dengan suku awal a dan selisih d. Bobot dari sisi yang dimaksud adalah jumlahan label sisi dan label-label titik yang terhubung dengan sisi dievaluasi. Pada makalah ini akan membahas pelabelan total tak ajaib sisi (a,d) pada gabungan dua buah sikel yang tidak terhubung. Graf ini dinyatakan $C_m \cup C_n$ dengan m dan n berturut-turut menyatakan banyaknya titik pada masing-masing sikel. Label-label dari titiknya adalah bilangan dari himpunan $\{(m+n+1),(m+n+2),\ldots,(2m+2n)\}$ dan label-label dari sisinya adalah bilangan dari himpunan $\{1,2,3,\ldots,(m+n)\}$. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui keberlakuan pelabelan total tak-ajaib sisi (a,d) pada graf $C_m \cup C_n$ serta syarat keberlakuan pelabelannya. Penelitian ini merupakan penelitian studi pustaka dengan mengkaji beberapa hasil penelitian sebelumnya. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa pada graf $C_m \cup C_n$ berlaku pelabelan total tak-ajaib sisi (a,d). Diperoleh syarat keberlakuan pelabelan ini adalah $a \geq 6$ dan d ≤ 5 untuk $m, n \geq 3$.

Kata kunci:

Gabungan dua graf sikel, Pelabelan Total Tak-ajaib Sisi, dan Pola Pelabelan.

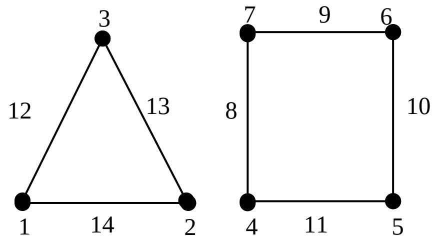
1. Pendahuluan

Gallian (2017) membuat rangkuman penelitian mengenai pelabelan graf. Kajian pelabelan graf dapat dengan mudah dirunut bagian mana saja yang telah dibahas dan bagian lain yang memungkinkan untuk dilakukan penelitian lebih lanjut. Pelabelan graf merupakan pemetaan bijektif dari unsur-unsur graf ke himpunan bilangan asli. Tahun 1970, Kotzig dan Rosa memperkenalkan pelabelan graf sebagai suatu cara memberikan label pada unsur-unsur sebuah graf dengan bilangan bulat positif mulai dari 1 sampai dengan sebanyak unsur graf yang akan diberi label. Pada pelabelan yang dilakukannya tersebut akan menghasilkan bobot setiap titik atau setiap sisinya yang dievaluasi sama. Selanjutnya penamaan pelabelan mengikuti unsur graf mana saja yang akan diberikan label dan berdasarkan unsur graf yang mana pula akan dievaluasi atau dilakukan perhitungan.

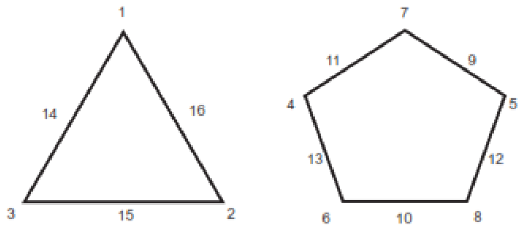
Baca *et al* (2003) mendefinisikan pelabelan total tak ajaib (a,d) sebagai pelabelan graf dengan bobot semua titik atau sisinya membentuk barisan aritmetika naik dengan suku awal a dan beda d. Kajian mengenai pelabelan total tak-ajaib sisi kuat (a,d) telah dilakukan oleh Sanjaya dan Prasetyo. Sanjaya (2013) menunjukkan bahwa pelabelan total takajaib sisi kuat (a,d) dapat dilakukan pada graf multisikel. Sedangkan Prasetyo (2019) menunjukkan bahwa pelabelan total takajaib sisi kuat (a,d) dapat dilakukan pada gabungan dua graf sikel. Selain itu, Prasetyo (2018) juga telah menunjukkan bahwa pada gabungan dua graf sikel dapat dilakukan pelabelan total takajaib titik kuat (a,d).

Berikut ini beberapa contoh pelabelan graf yang telah dikaji oleh Sanjaya dan Prasetyo.

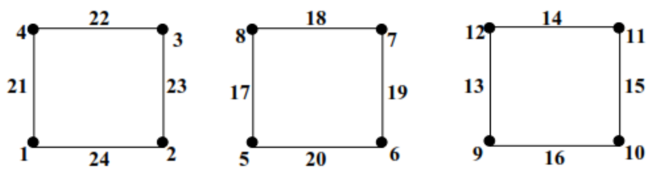
To cite this article:
Prasetyo, D. A. B. (2020). Pelabelan Total Tak Ajaib Sisi pada Gabungan Dua Sikel. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika* 3, 29-34



Gambar 1. Pelabelan total tak-ajaib sisi kuat (16, 1) pada $(C_3 \cup C_4)$ (Prasetyo, 2019)



Gambar 2. Pelabelan Total Tak-ajaib Titik Kuat (26,1) pada $C_3 \cup C_5$ (Prasetyo, 2018)



Gambar 3. Pelabelan Total Tak-ajaib Sisi Kuat (26,1) pada $3C_4$ (Sanjaya, 2013)

Sebagaimana telah dikaji oleh Sanjaya dan Prasetyo, penulis akan melanjutkan penelitian untuk menunjukkan apakah pelabelan total tak-ajaib sisi (*a*,*d*) juga berlaku pada gabungan dua graf sikel dengan mengkaji keberlakuan syaratnya.

Untuk membantu kajian ini, berikut ini disajikan beberapa definisi dan teorema dari hasil penelitian sebelumnya yang berkaitan dengan pelabelan graf.

Definisi 1 (Baca *et al*, 2003)
Suatu pemetaan bijektif yang mengawankan unsur graf dengan himpunan bilangan asli disebut pelabelan total takajaib titik pada graf G(*p*,*q*) jika bobot dari setiap titiknya berbeda. Pemetaan tersebut ditulis sebagai $f : V(G) \cup E(G) \to \{1,2,\cdots,p+q\}$.
Misalkan *u* adalah satu titik dari suatu graf dengan titik v_i adalah semua titik yang terhubung dengan titik *u*, maka bobot titik *u* dihitung dengan menjumlahkan label titik *u* dengan label semua sisi uv_i. Selanjutnya bobot titik *u* tersebut dinyatakan sebagai $w_f(u) = f(u) + \sum f(uv_i)$

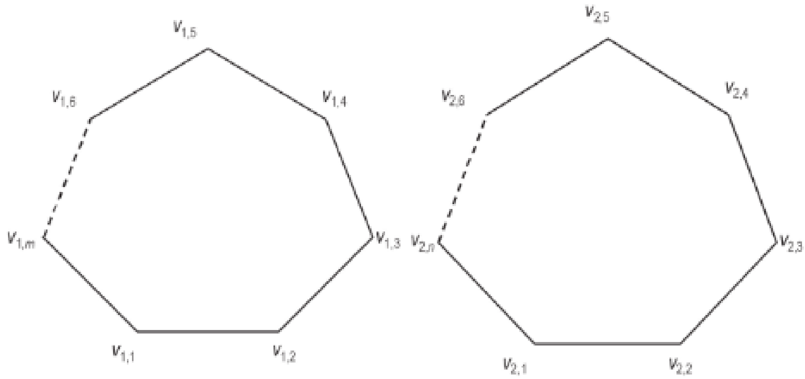
Demikian pula, jika bobot dari setiap sisi pada graf G(*p*,*q*) yang berbeda maka pelabelan tersebut dinamakan pelabelan total takajaib sisi.
Misalkan *uv* adalah salah satu sisi graf dengan ujungnya titik *u* dan titik *v*, maka bobot sisi *uv* dihitung dengan menjumlahkan label sisi *uv* dan label titik *u* dan titik *v*. Selanjutnya bobot sisi *uv* tersebut dinyatakan sebagai $w_f(uv) = f(u) + f(u) + f(uv)$, untuk setiap $u, v \in V(G)$ dan $uv \in E(G)$.

Definisi 2 (Baca *et al*, 2003)
Pelabelan total tak-ajaib sisi (*a*, *d*) pada graf *G*(*p*,*q*) adalah suatu pemetaan bijektif *f* dengan bobot dari setiap sisinya membentuk barisan aritmetika naik dengan suku pertama *a* dan beda *d*.
Himpunan dari bobot-bobot sisi graf tersebut tersebut dinyatakan dengan:

$$W = \{w_f(u) \mid u \in V\}$$
$$= \{a, a+d, a+2d, \cdots, a+(p-1)d\}.$$

Menurut Wallis (2001), pelabelan pada graf G(*V*,*E*) dikatakan kuat jika label titik-titiknya berupa bilangan dari himpunan {1, 2, 3, …, |*V*|}. Dari Definisi 1 dan Definisi 2 ini nantinya akan dikaji keberlakuannya pada gabungan dua graf sikel. Selanjutnya, berikut ini beberapa hasil penelitian sebelumnya mengenai pelabelan total tak-ajaib titik (*a*, *d*) dan pelabelan total takajaib sisi kuat pada gabungan dua graf sikel.

Teorema 4. (Prasetyo, 2018)
Pada gabungan dua graf sikel $C_m \cup C_n$ untuk $m,n \geq 3$ dapat dilakukan pelabelan total tak-ajaib titik kuat $(3m+3n+2,1)$.
Teorema 5 (Prasetyo, 2018)
Pada gabungan dua graf sikel $C_m \cup C_n$ untuk $m,n \geq 3$ dapat dilakukan pelabelan total tak-ajaib titik kuat $\left(\frac{5m+5n+5}{2},2\right)$.
Teorema 6 (Prasetyo, 2019)
Pada gabungan dua graf sikel $C_m \cup C_n$ untuk $m,n \geq 3$ dapat dilakukan pelabelan total tak-ajaib sisi kuat $(2m+2n+2,1)$.
Teorema 7 (Prasetyo, 2019)
Pada gabungan dua graf sikel $C_m \cup C_n$ untuk $m,n \geq 3$ dapat dilakukan pelabelan total tak-ajaib sisi kuat $\left(\frac{3m+3n+5}{2},2\right)$.
Pada artikel ini akan menggunakan gabungan dua graf sikel yang telah dibentuk oleh Prasetyo (2018). Pada Gambar 4 berikut adalah representasi gabungan dua graf sikel yang dimaksud.



Gambar 4. Gabungan Dua Graf Sikel $C_m \cup C_n$ (Prasetyo, 2018)

2. Metode

Penelitian ini menggunakan studi pustaka dengan melakukan pengkajian dari beberapa hasil penelitian yang terkait sebelumnya. Peneliti mengumpulkan literatur yang berkaitan dengan pelabelan graf, khususnya gabungan dua graf sikel, pelabelan total tak-ajaib titik, dan pelabelan total tak-ajaib sisi. Setelah melakukan kajian berdasarkan literatur tersebut, peneliti melakukan langkah penelitian dengan melakukan perhitungan dasar pelabelan total takajaib sisi pada gabungan dua graf sikel, kemudian menentukan batasan untuk nilai *a* dan *d*, dan menentukan batasan pelabelan yang memenuhi syarat.

3. Hasil dan Pembahasan

Misalkan S_w adalah jumlahan semua bobot sisi, S_v adalah jumlahan label semua titik dan S_e adalah jumlahan label semua sisi. Berdasarkan Definisi 1, maka jumlahan bobot sisi pada pelabelan total tak-ajaib sisi merupakan jumlah dari label semua sisi yang dihitung sebanyak dua kali dan label semua titik dihitung satu kali. Sehingga diperoleh $S_w = 2S_v + S_e$.

Pada gabungan dua graf sikel $C_m \cup C_n$, banyaknya semua titik dan sisi masing-masing $m+n$ dengan $m, n \geq 3$. Sehingga berdasarkan Definisi 2 diperoleh bahwa:

$$a + (a+d) + \cdots + (a + (m+n-1)d) = 2S_v + S_e$$

$$(m+n)a + \frac{(m+n)(m+n-1)d}{2} = 2S_v + S_e \qquad (1)$$

Label-label titik dan sisinya berupa bilangan bulat dari himpunan {1, 2, …, (m+n), (m+n+1), …, 2(m+n)}.

3.1. *Batasan nilai a dan d*

Selanjutnya untuk memperoleh batasan nilai a dan d, ditentukan terlebih dahulu label-label terkecil untuk sisi dan titiknya. Label terkecilnya adalah 1, 2, dan 3, sehingga nilai minimal untuk a adalah 6 atau

$$a \geq 6. \qquad (2)$$

Untuk menentukan nilai d, dapat diperoleh dari persamaan (1) yang menyajikan deret bobot pelabelan. Pada persamaan (1) diketahui bahwa bobot terbesar dari pelabelan ini adalah $a + (m+n-1)d$. Dan dari himpunan labelnya dapat diperoleh label-label terbesarnya adalah (2m+2n-2), (2m+2n-1), dan (2m+2n). sehingga diperoleh bobot terbesar dari label-label adalah (6m+6n-3) atau

$$a + (m+n-1)d \leq (6m+6n-3). \qquad (3)$$

Dari persamaan (2) dan (3) diperoleh bahwa

$$(m+n-1)d \leq 6m+6n-9$$
$$d < 6 \qquad (4)$$

Sehingga diperoleh nilai d yang mungkin adalah 1, 2, 3, 4, atau 5.

3.2. *Batasan Pelabelan*

Karena label-label titik dan sisi adalah bilangan dari {1, 2, …, (m+n), (m+n+1), …, 2(m+n)}, maka jumlahan dari label titik S_v dan jumlahan dari label sisi S_e adalah

$$\begin{aligned} S_v + S_e &= (1 + 2 + \cdots + 2m + 2n) \\ &= (m+n)(2m+2n+1) \end{aligned}$$

Dan untuk mendapatkan batasan pelabelan, jumlahan dari keseluruhan bobot diperoleh sebagai berikut

$$\begin{aligned} S_w &= 2S_v + S_e \\ &= (S_v + S_e) + S_v \\ &= (1 + 2 + \cdots + 2m + 2n) + S_v \\ &= (m+n)(2m+2n+1) + S_v \end{aligned} \qquad (5)$$

Pada persamaan (5) harus ditentukan terlebih dahulu label-label untuk titiknya sehingga dapat dilakukan perhitungan S_v.Ada 2 kemungkinan untuk nilai S_v berdasarkan label titiknya, yakni

(a) jika label titiknya{1, 2, …, m+n} maka $S_v = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2}$, dan

(b) jika label titiknya {m+n+1, m+n+2, …, 2m+2n} maka $S_v = \frac{(m+n)(3m+3n+1)}{2}$ (6)

Sehingga dari persamaan (1), (5), dan (6) diperoleh pertidaksamaan

$$(m+n)(2m+2n+1) + \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} \leq (m+n)a + \frac{(m+n)(m+n-1)}{2}d \leq (m+n)(2m+2n+1) + \frac{(m+n)(3m+3n+1)}{2}$$

$$\leftrightarrow (2m+2n+1) + \frac{(m+n+1)}{2} \leq a + \frac{(m+n-1)}{2}d \leq (2m+2n+1) + \frac{(3m+3n+1)}{2}$$

$$\leftrightarrow \frac{(5m+5n+3)}{2} \le a + \frac{(m+n-1)}{2}d \le \frac{(7m+7n+3)}{2} \qquad (7)$$

Dari persamaan (7) dan persamaan (4) dapat diperoleh batasan nilai *a* untuk setiap nilai *d* yakni dengan mensubstitusikan nilai *d* ke persamaan (7), sehingga

(a) untuk nilai $d = 1$

dari persamaan (7) menjadi $\frac{(5m+5n+3)}{2} \le a + \frac{(m+n-1)}{2}1 \le \frac{(7m+7n+3)}{2}$

Sehingga batasan nilai *a* adalah $2m+2n+2 \le a \le 3m+3n+2$

(b) untuk nilai $d = 2$

dari persamaan (7) menjadi $\frac{(5m+5n+3)}{2} \le a + \frac{(m+n-1)}{2}2 \le \frac{(7m+7n+3)}{2}$

batasan nilai *a* adalah $\frac{(3m+3n+5)}{2} \le a \le \frac{(5m+5n+5)}{2}$

(c) untuk nilai $d = 3$

dari persamaan (7) menjadi $\frac{(5m+5n+3)}{2} \le a + \frac{(m+n-1)}{2}3 \le \frac{(7m+7n+3)}{2}$

batasan nilai *a* adalah $m+n+3 \le a \le 2m+2n+3$

(d) untuk nilai $d = 4$

dari persamaan (7) menjadi $\frac{(5m+5n+3)}{2} \le a + \frac{(m+n-1)}{2}4 \le \frac{(7m+7n+3)}{2}$

batasan nilai *a* adalah $\frac{(m+n+7)}{2} \le a \le \frac{(3m+3n+7)}{2}$

(e) untuk nilai $d = 5$

dari persamaan (7) menjadi $\frac{(5m+5n+3)}{2} \le a + \frac{(m+n-1)}{2}5 \le \frac{(7m+7n+3)}{2}$

batasan nilai *a* adalah $4 \le a \le m+n+4$. Dari hasil ini dan berdasarkan persamaan (2) maka batasan nilai *a* menjadi $6 \le a \le m+n+4$.

Batasan nilai *a* yang diperoleh pada bagian di atas menjadi lebih tepat jika dibandingkan dengan batasan nilai *a* pada persamaan (2).
Batasan terkecil nilai *a* untuk setiap nilai *d* tersebut sejalan dengan hasil dari Prasetyo (2019) yang mengkaji tentang pelabelan total takajaib sisi kuat (*a*, *d*) pada gabungan dua graf sikel yang tercantum pada Teorema 6 dan Teorema 7.

4. Simpulan

Berdasarkan pembahasan di atas, dapat diperoleh kesimpulan bahwa pada gabungan graf sikel dapat dilakukan pelabelan total takajaib sisi (a,d). Gabungan dua graf sikel merupakan dua graf sikel yang tidak terhubung. Pelabelan dilakukan pada semua titik dan sisi kedua graf sikel kemudian dilakukan pembobotan pada sisinya dengan cara menjumlahkan label sisi tersebut dan label kedua titik yang dihubungkan oleh sisi tersebut. Bobot sisi akan membentuk barisan aritmetika naik dengan suku awal $a \geq 6$ dan beda $d \leq 5$. Untuk setiap nilai *d* diperoleh batasan *a* yang berbeda pula, yakni (1) $d = 1$, $2m+2n+2 \le a \le 3m+3n+2$; (2) $d = 2$, $\frac{(3m+3n+5)}{2} \le a \le \frac{(5m+5n+5)}{2}$; (3) $d = 3$, $m+n+3 \le a \le 2m+2n+3$; (4) $d = 4$, $\frac{(m+n+7)}{2} \le a \le \frac{(3m+3n+7)}{2}$; dan (5) $d = 5$, $6 \le a \le m+n+4$.

Pembaca yang tertarik pada pelabelan ini dapat melanjutkan dengan menentukan pola pelabelan dengan lebih detil untuk setiap nilai *d* nya.

Daftar Pustaka

Baca, M., Bertault, F., MacDougall, J. A., Miller, M., Simanjuntak, R., dan Slamin. (2003). Vertex-Antimagic Total Labelings of Graphs. *Discussiones Mathematicae. Graph Theory* 23, 67-83.

Gallian, J. A. (2017). A Dynamic Survey of Graph Labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics*. #DS6.

Kotzig, A. dan Rosa, A. (1970). Magic Valuations of Finite Graphs. *Canad. Math. Bull*

Prasetyo, D. A. B. (2018). Pelabelan Total Tak-ajaib Titik Super pada Gabungan Dua Graf Sikel. *Jurnal Penelitian. Volume 22, No. 1, Mei 2018*, 44-50.

Prasetyo, D. A. B. (2019). Pelabelan Total Takajaib Sisi Super pada Gabungan Dua Graf Sikel. *Prosiding Sendika tahun 2019*, 5(2), 33-37.

Sanjaya, Ryan. (2013). Pelabelan Total Tak-ajaib Sisi Kuat pada Graf Multisikel (mC_p). *Skripsi*. Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma.

Wallis, W. D. (2001). Magic Graph. *Birkhauser*, 12.