PRISMA 3 (2020): 698-705
PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika
https://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/prisma/
ISSN 2613-9189

Penggunaan Metode *Dodgson's Condensation* Untuk Mencari Persamaan Karakteristik Matriks Vandermonde dan Estimasi Nilai Eigen Menggunakan Metode Newton-Raphson

Wafiq Fais [a,*], Firmanila Kurnia Ulfa[b]

[a,b] *Pendidikan Matematika/Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Semarang*

* *Alamat Surel: wafiqfais@students.unnes.ac.id*

Abstrak

Dalam *paper* ini kami menyajikan penggunaan metode *Dodgson's Condensation* dalam mencari persamaan karakteristik dari matriks Vandermonde dan metode Newton-Raphson untuk melakukan estimasi nilai eigen dari persamaan karakteristik matriks Vandermonde. Dengan menggunakan metode Newton-Raphson diperoleh nilai eigen dari matriks Vandermonde dengan galat yang minim.

Kata kunci:

matriks Vandermonde, nilai eigen, metode *Dodgson's Condensation*, metode Newton-Raphson

1. Pendahuluan

Banyak permasalahan riil dalam fenomena kehidupan yang dapat dijelaskan melalui pemodelan matematika. Dalam banyak kasus tidak semua model matematika tersebut dapat diselesaikan dengan mudah menggunakan metode analitik, sehingga digunakan metode numerik untuk mencari penyelesaiannya. Salah satu penerapan dari metode numerik ini yaitu untuk menghitung nilai eigen matriks Vandermonde.

Nilai eigen sangat penting untuk dicari karena manfaatnya sangat luas dalam kehidupan sehari-hari. Aplikasi nilai eigen yaitu digunakan dalam persamaan gelombang *Schrodinger* (Ledoux, Rizea, Van Daele, Vanden Berghe, & Silişteanu, 2009), masalah *Sturm-Liouville* (Kong & Zettl, 1996), analisis getaran (Satrijo, Suprihanto, & Kholil, 2005), teori optimasi (Lewis, 2017), analisis stabilisasi (Wang, Horn, & Strang, 2017), *face recognition* (Chakraborty, Kumar Saha, & Al-Amin Bhuiyan, 2012), analisis sinyal suara (Aminudin, 2011), sistem tenaga listrik *Power System Stabilizier* (PSS) (Yamlecha, Hermawan, & Handoko, 2012), *sound sources in robotics* (Rascon & Meza, 2017), *robust power system stabilizer* (Panda & Padhy, 2008), mengamati perbedaan genotip (Yuliani, Budhiati. V., & Mashuri, 2012), dan masih banyak lagi. Sedangkan aplikasi matriks Vandermonde sendiri tidak lain adalah analisis deret waktu, proses ARMA (*Auto Regressive Moving Average*) dan persamaan Stein (Klein & Spreij, 2003). Selain itu, matriks Vandermonde diaplikasikan dalam seismogram periode panjang (Gilbert, 2001).

Metode *Dodgson's Condensation* adalah suatu metode yang digunakan untuk menghitung determinan dari suatu matriks yang ditemukan oleh Lewis Carroll (Rice & Torrence, 2018). Selain digunakan untuk menghitung determinan, metode ini dapat digunakan untuk mencari persamaan karakteristik dari suatu matriks, termasuk matriks Vandermonde. Sedangkan metode Newton-Raphson merupakan salah satu metode yang digunakan untuk mengestimasi akar-akar dari fungsi dengan pendekatan satu titik, yang mana fungsi tersebut memiliki turunan (Munir, 2010). Metode Newton-Raphson dapat digunakan untuk mengestimasi akar-akar persamaan karakteristik atau nilai eigen dari suatu matriks karena setiap fungsi karakteristik memiliki turunan fungsi.

To cite this article:
Fais, W., & Ulfa, F.K. (2020). Penggunaan Metode Dodgson's Condensation Untuk Mencari Persamaan Karakteristik Matriks Vandermonde dan Estimasi Nilai Eigen Menggunakan Metode Newton-Raphson. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika 3*, 698-705

Dengan menggunakan metode *Dodgson's Condensation* akan diperoleh persamaan karakteristik suatu matriks dengan mudah termasuk matriks Vandermonde. Sedangkan dengan metode Newton-Raphson akan diperoleh estimasi nilai eigen dengan hasil mendekati nilai eksak. Kedua metode tersebut digunakan untuk mempermudah dalam menghitung nilai eigen pada matriks Vandermonde berordo $\mathbf{3} \times \mathbf{3}$ atau lebih dengan galat yang minimum.

2. Landasan Teori

2.1. Matriks Vandermonde

Pada bagian ini diberikan definsi tentang matriks Vandermonde seperti dinyatakan dalam (Kunze & Hoffman, 1971), (Richard v Mises, 1964) dan (Press, Teukolsky, Vetterling, & Flannery, 2007). Matriks Vandermonde adalah jenis matriks yang muncul pada interpolasi Lagrange dan rekonstruksi distribusi statistik dari momen distribusi.

Contoh matriks Vandermonde berordo $n \times n$:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 & \dots & {x_1}^{n-1} \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & \dots & {x_2}^{n-1} \\ 1 & x_3 & {x_3}^2 & \cdots & {x_3}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{bmatrix}$$

2.2. Nilai Eigen

Adapun definisi nilai eigen adalah sebagai berikut:

Jika A adalah matriks berordo $n \times n$, maka vektor taknol $\boldsymbol{x}$ di R^n disebut vektor eigen dari A jika $\boldsymbol{Ax}$ adalah perkalian skalar dari $\boldsymbol{x}$; yaitu, jika $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ untuk suatu skalar λ. Skalar λ disebut nilai eigen dari A dan $\boldsymbol{x}$ disebut vektor eigen dari A bersesuaian dengan λ. Selain itu juga dinyatakan bahwa determinan $\lambda I - A$ merupakan polinomial dalam λ, disebut polinomial karakteristik dari A dan Persamaan $det\ (\lambda I - A) = 0$ disebut persamaan karakteristik dari A (Anton & Rorres, 2005).

2.3. Dodgson's Condensation

Diberikan matriks A berordo $n \times n$, dengan $n \geq 3$, interior dari A, atau int A, adalah matriks minor berordo $(n-2) \times (n-2)$ yang berurutan dan diperoleh dengan menghapus baris pertama, kolom pertama, baris terakhir dan kolom terakhir (Rice & Torrence, 2018).

Metode ini terdiri dari langkah-langkah berikut:

(1) Gunakan operasi baris dan kolom elementer untuk menghilangkan semua nol dari int A. Sebut matriks ini dengan matriks $A^{(0)}$.

(2) Cari determinan minor berordo 2×2 untuk setiap empat elemen yang berdekatan dalam matriks $A^{(0)}$ untuk membuat matriks baru $A^{(1)}$ yang berordo $(n-1) \times (n-1)$.

(3) Sekarang cari determinan dari setiap minor 2×2 yang berturutan dalam matriks $A^{(1)}$ untuk membuat matriks berordo $(n-2) \times (n-2)$. Kemudian bagi setiap elemen dengan elemen yang bersesuaian dalam interior matriks $A^{(0)}$. Sebut matriks ini dengan matriks $A^{(2)}$.

(4) Secara umum, diberikan matriks $A^{(k)}$, hitung matriks baru berordo $(n-k-1) \times (n-k-1)$ terdiri dari determinan minor berordo 2×2 yang berturutan dari $A^{(k)}$. Untuk membuat matriks $A^{(k+1)}$, bagi setiap elemen dengan elemen yang bersesuaian dalam interior matriks $A^{(k-1)}$.

(5) Lanjutkan "memadatkan" matriks hingga bilangan satu-satu diperoleh. Bilangan terakhir adalah $det\ A$.

2.4. Metode Horner (Ahmad, 2016)

Metode horner merupakan metode yang ditemukan oleh William George Horner yang menciptakan algoritma yang efisien dalam mengevaluasi polinomial dalam bentuk monomial. Dalam metode numerik, metode Horner menjelaskan proses menghampiri nilai suatu akar dari polinom dengan cepat.

Diberikan polinomial:

$$f\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n \tag{1}$$

dibagi dengan $(x-k)$ memberikan hasil bagi $H(x)$ dengan sisa pembagian $S(x)$, maka akan diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$f\left(x\right)=\left(x-k\right).H\left(x\right)+S\left(x\right) \tag{2}$$

Oleh karena $f(x)$ berderajat n dan $(x - k)$ berderajat 1, dengan metode suku banyak $f(x)$ dibagi dengan $(x - k)$ maka $x = k$.

$$f(k)=a_nk^n+a_{n-1}k^{n-1}+\cdots+a_2k^2+a_1k+a_0$$

Dengan menggunakan algoritma, nilai $f(x)$ dan sisa pembagian $S(x)$ tersebut dapat disajikan dengan menggunakan bagan. Baris pertama dalam bagan itu ditulis nilai $x=k$, kemudian diikuti oleh koefisien-koefisien suku banyak. Koefisien-koefisien suku banyak disusun dari koefisien pangkat tertingginya sampai pangkat terendahnya.

$$\begin{array}{c|ccccc}
x=k & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 & a_0 \\
 & & kb_n & \ldots & kb_2 & kb_1 \quad + \\
\hline
 & b_n=a_n & b_{n-1}=a_{n-1}+kb_n & \ldots & b_1=a_1+kb_2 & b_0=a_0+kb_1=S(x)
\end{array}$$

1.5 Aturan Pangkat pada Turunan Fungsi Aljabar (Varberg, Purcell, & Rigdon, 2007)
Jika $f(x)=x^n$ dengan $n\in\mathbb{Z}^+$ maka

$$f'(x)=nx^{n-1} \tag{3}$$

atau dapat ditulis

$$D_x(x^n)=nx^{n-1}. \tag{4}$$

Bukti:

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{x^n+nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2+\cdots+nxh^{n-1}+h^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{h[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h+\cdots+nxh^{n-2}+h^{n-1}]}{h}=nx^{n-1}$$

2.5. Metode Newton-Raphson (Munir, 2010)
Dari semua metode pencarian akar yang ada, metode Newton-Raphson merupakan metode yang paling terkenal dan paling banyak dipakai dalam dunia sains dan terapan karena konvergensinya yang paling cepat. Ada dua pendekatan dalam menurunkan rumus metode Newton-Raphson yaitu dengan taksiran geometri dan deret Taylor. Pada makalah ini akan digunakan pendekatan dengan deret Taylor.
Uraikan $f(x_{r+1})$ di sekitar x_r ke dalam deret Taylor:

$$f(x_{r+1})\approx f(x_r)+(x_{r+1}-x_r)f'(x_r)+\frac{(x_{r+1}-x_r)^2}{2}f''(t),\ x_r<t<x_{r+1}$$

yang bila dipotong sampai suku orde-2 saja menjadi

$$f(x_{r+1}) \approx f(x_r) + (x_{r+1} - x_r)f'(x_r)$$

Sehingga untuk mencari akar haruslah $f(x_{r+1}) = 0$

$\Leftrightarrow f(x_r) + (x_{r+1} - x_r)f'(x_r) = 0$

atau

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}, \quad f'(x_r) \neq 0 \tag{5}$$

Persamaan di atas merupakan rumus metode Newton-Raphson.

2.6. Analisis Galat Relatif Hampiran (Munir, 2010)

Galat relatif hampiran dapat dihitung dengan menggunakan rumus

$$\varepsilon_{RA} = \frac{a_{r+1} - a_r}{a_{r+1}}, \tag{6}$$

yang dalam hal ini a_{r+1} adalah nilai hampiran lelaran sekarang dan a_r adalah nilai hampiran lelaran sebelumnya.

3. Metode Penelitian

Penelitian ini diawali dengan studi literatur berupa jurnal-jurnal, buku-buku referensi, dan sumber internet yang berkaitan dengan topik penelitian, yaitu: matriks Vandermonde, nilai eigen dan vektor eigen, polinomial karakteristik dan persamaan karakteristik, metode Dodgson's condensation, metode horner, aturan pangkat pada turunan fungsi aljabar, metode Newton-Raphson, dan galat relatif hampiran.

Langkah selanjutnya setelah melakukan studi literatur adalah: 1) membuat contoh matriks Vandermonde berordo 3×3, 2) mencari persamaan karakteristik dari matriks tersebut menggunakan metode Dodgson's condensation, 3) mencari turunan dari fungsi karakteristik, 4) menggunakan metode Newton-Raphson untuk memperkirakan akar-akar dari persamaan karakteristik yang tidak lain adalah nilai eigen dengan bantuan Ms Excel, 5) menganalisis galat relatif hampiran untuk memastikan hasil yang didapat mendekati nilai eksak.

4. Pembahasan

Penelitian ini membahas contoh kasus dalam penentuan nilai eigen matriks Vandermonde. Contoh kasus yang diberikan pada penelitian ini berupa matriks Vandermonde dengan ukuran $\mathbf{3 \times 3}$.

4.1. Contoh matriks Vandermonde

Di bawah ini adalah contoh dari matriks Vandermonde berukuran $\mathbf{3 \times 3}$.

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{9} & \mathbf{16} \end{bmatrix}$$

4.2. Penggunaan metode Dodgson's Condensation

Sebelum menggunakan metode *Dodgson's Condensation* untuk mencari persamaan karakteristik, kita cari dahulu matriks $\boldsymbol{\lambda I - V}$.

$$\lambda I - V = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 \\ -2 & \lambda - 3 & -4 \\ -4 & -9 & \lambda - 16 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik dari matriks V adalah $\det(\lambda I - V)$ yang akan dicari dengan menggunakan *Dodgson's Condensation* yang akan disajikan di bawah ini.

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3) - 2$$
$$= \lambda^2 - 4\lambda + 3 - 2$$
$$= \lambda^2 - 4\lambda + 1$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -9 & \lambda - 16 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda - 16) - 36$$
$$= \lambda^2 - 19\lambda + 48 - 36$$
$$= \lambda^2 - 19\lambda + 12$$

$$\begin{vmatrix} -2 & \lambda - 3 \\ -4 & -9 \end{vmatrix} = 18 + 4(\lambda - 3) = 18 + 4\lambda - 12 = 4\lambda + 6$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ \lambda - 3 & -4 \end{vmatrix} = 4 + \lambda - 3 = \lambda + 1$$

Sehingga diperoleh:

$$(\lambda - 3)\det(\lambda I - V) = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ \lambda - 3 & -4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & \lambda - 3 \\ -4 & -9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -9 & \lambda - 16 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda^2 - 4\lambda + 1 & \lambda + 1 \\ 4\lambda + 6 & \lambda^2 - 19\lambda + 12 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda^2 - 4\lambda + 1)(\lambda^2 - 19\lambda + 12) - (4\lambda + 6)(\lambda + 1)$$

$$= \lambda^4 - 23\lambda^3 + 13\lambda^2 + 76\lambda^2 - 67\lambda + 12 - (4\lambda^2 + 10\lambda + 6)$$

$$= \lambda^4 - 23\lambda^3 + 89\lambda^2 - 67\lambda + 12 - 4\lambda^2 - 10\lambda - 6$$

$$= \lambda^4 - 23\lambda^3 + 85\lambda^2 - 77\lambda + 6$$

$$\Leftrightarrow \det(\lambda I - V) = \frac{\lambda^4 - 23\lambda^3 + 85\lambda^2 - 77\lambda + 6}{\lambda - 3}.$$

Dengan menggunakan metode Horner,

	1	-23	85	-77	6	
3		3	-60	75	-6	+
	1	-20	25	-2	0	

diperoleh $\det(\lambda I - V) = \lambda^3 - 20\lambda^2 + 25\lambda - 2$.

Karena vektor eigen dari matriks $\lambda I - V$ bukan vektor nol, maka $\det(\lambda I - V) = 0$. Sehingga diperoleh persamaan karakteristik

$$\boldsymbol{\lambda^3 - 20\lambda^2 + 25\lambda - 2 = 0}.$$

4.3. Penggunaan aturan pangkat untuk mencari turunan fungsi

Dengan menurunkan $\boldsymbol{f(\lambda) = \lambda^3 - 20\lambda^2 + 25\lambda - 2}$ yang merupakan fungsi karakteristik diperoleh $\boldsymbol{f'(\lambda) = 3\lambda^2 - 40\lambda + 25}$. Dengan menggunakan metode Newton-Raphson akan diperoleh nilai eigen (akar dari persamaan karakteristik tersebut).

4.4. Penggunaan metode Newton-Raphson

Dengan menggunakan metode Newton-Raphson, diperoleh rumus untuk mencari akar-akar persamaan karakteristik atau nilai eigen dari matriks Vandermonde tadi seperti di bawah ini.

$$\boldsymbol{\lambda_{n+1} = \lambda_n - \frac{\lambda_n^3 - 20\lambda_n^2 + 25\lambda_n - 2}{3\lambda_n^2 - 40\lambda_n + 25}}$$

Selanjutnya masukkan rumus di atas ke program Ms Excel untuk mempermudah penghitungan. Untuk mencari nilai eigen yang pertama, pilih $\boldsymbol{\lambda_0 = 0}$. Dengan menggunakan program Ms. Excel diperoleh hasil pada Tabel 1.

Tabel 1. Nilai eigen pertama

λ_n	Nilai
λ_0	0
λ_1	0,08
λ_2	0,085842927
λ_3	0,085874166
λ_4	0,085874167
λ_5	0,085874167
λ_6	0,085874167

Untuk mencari nilai eigen yang kedua, pilih $\lambda_0 = 1$. Dengan menggunakan program Ms. Excel diperoleh hasil pada Tabel 2.

Tabel 2. Nilai eigen kedua

λ_n	Nilai
λ_0	1
λ_1	1,333333333
λ_2	1,252818035
λ_3	1,247708986
λ_4	1,247688031
λ_5	1,247688031
λ_6	1,247688031

Untuk mencari nilai eigen yang ketiga, pilih $\lambda_0 = 18$. Dengan menggunakan program Ms. Excel diperoleh hasil pada Tabel 3.

Tabel 3. Nilai eigen ketiga

λ_n	Nilai
λ_0	18
λ_1	18,72202166
λ_2	18,66677829
λ_3	18,66643781
λ_4	18,6664378
λ_5	18,6664378
λ_6	18,6664378

Jadi, nilai eigen dari matriks Vandermonde tersebut adalah $0{,}085874167$, $1{,}247688031$ dan $18{,}6664378$.

4.5. Analisis galat relatif hampiran

Galat relatif hampiran yang diperoleh ketika menghitung nilai eigen yang pertama adalah

$$\varepsilon_{RA} = \frac{\lambda_6 - \lambda_5}{\lambda_6} = \frac{0{,}085874167 - 0{,}085874167}{0{,}085874167} = 0.$$

Galat relatif hampiran yang diperoleh ketika menghitung nilai eigen yang kedua adalah

$$\varepsilon_{RA} = \frac{\lambda_6 - \lambda_5}{\lambda_6} = \frac{1{,}247688031 - 1{,}247688031}{1{,}247688031} = 0.$$

Galat relatif hampiran yang diperoleh ketika menghitung nilai eigen yang ketiga adalah

$$\varepsilon_{RA} = \frac{\lambda_6 - \lambda_5}{\lambda_6} = \frac{18{,}6664378 - 18{,}6664378}{18{,}6664378} = 0.$$

Karena galat relatif hampiran yang diperoleh ketika menghitung nilai eigen pertama, kedua dan ketiga sama dengan 0 maka nilai eigen yang diperoleh sangat dekat dengan nilai eksak.

5. Simpulan

Dalam menghitung nilai eigen matriks Vandermonde kita bisa menggunakan metode *Dodgson's Condensation* dan metode Newton Raphson. Metode *Dodgson's Condensation* dipilih untuk mempermudah kita dalam mendapatkan persamaan karakteristik matriks Vandermonde. Setelah mendapatkan persamaan karakteristik, dengan menggunakan metode Newton-Raphson kita bisa memperoleh akar-akar persamaan karakteristik dengan konvergen yang cepat, sehingga diperoleh nilai eigen dengan galat yang minimum dan hasil mendekati nilai eksak.

Daftar Pustaka

Ahmad, M. (2016). Pembagian suku banyak dengan metode pembagian sintetik di kelas XI IPA semester IV Taman Madya (SMA) Tamansiswa Medan T . P 2009 / 2010. *Jurnal Education and Development STKIP Tapanuli Selatan*, *1*(4), 32–40.

Aminudin, A. (2011). Analisis Eigen Sinyal Suara (Universitas Diponegoro). Retrieved from http://eprints.undip.ac.id/25725/1/ML2F302561.pdf

Anton, H., & Rorres, C. (2005). *Elementary Linear Algebra* (9th ed.). New Jersey: John Wiley & Sons, inc.

Chakraborty, D., Kumar Saha, S., & Al-Amin Bhuiyan, M. (2012). Face Recognition using Eigenvector and Principle Component Analysis. *International Journal of Computer Applications*, *50*(10), 42–49.

Gilbert, F. (2001). Vandermonde matrix analysis of long-period seismograms. *Geophysical Journal International*, *146*(3), 843–849.

Klein, A., & Spreij, P. (2003). Some Results on Vandermonde Matrices with an Application to Time Series Analysis. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, *25*(1), 213–223.

Kong, Q., & Zettl, A. (1996). Eigenvalues of regular Sturm-Liouville problems. *Journal of Differential Equations*, *131*(1), 1–19.

Kunze, R., & Hoffman, K. (1971). *Linear Algebra, 2Nd Edition - Kenneth Hoffmann And Ray Kunze* (2nd ed.). New Jersey: Prentice Hall, inc.

Ledoux, V., Rizea, M., Van Daele, M., Vanden Berghe, G., & Silişteanu, I. (2009). Eigenvalue problem for a coupled channel Schrödinger equation with application to the description of deformed nuclear systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, *228*(1), 197–211.

Lewis, A. S. (2017). The mathematics of eigenvalue optimization. *Mathematical Programming*, *97*(1), 155–176.

Munir, R. (2010). *Metode Numerik* (3rd ed.). Bandung: Penerbit Informatika.

Panda, S., & Padhy, N. P. (2008). Robust power system stabilizer design using particle swarm optimization technique. *International Journal of Electrical and Computer Engineering*, *2*(10), 2260–2267.

Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. (2007). *Numerical Recipes* (3rd ed.). Cambridge: Cambridge University Press.

Rascon, C., & Meza, I. (2017). Localization of sound sources in robotics: A review. *Robotics and Autonomous Systems*, *96*, 184–210.

Rice, A., & Torrence, E. (2018). "Shutting up like a telescope": Lewis Carroll's "Curious" Condensation Method for Evaluating Determinants. *The College Mathematics Journal*, *38*(2), 85–95.

Richard v Mises. (1964). *Mathematical Theory of Probability and Statistics* (1st ed.). New York: Academic Press.

Satrijo, D., Suprihanto, A., & Kholil, A. (2005). Simulasi dan analisa modus getar pada mesin Freis type vertical milling dengan menggunakan program bantu MSC Nastran. *Rotasi*, *7*(1), 1–13.

Varberg, D., Purcell, E., & Rigdon, S. (2007). *Calculus* (9th ed.). Edwardsville: Pearson.

Wang, L., Horn, B. K. P., & Strang, G. (2017). Eigenvalue and Eigenvector Analysis of Stability for a Line of Traffic. *Studies in Applied Mathematics*, *138*(1), 103–132.

Yamlecha, J., Hermawan, & Handoko, S. (2012). Perbandingan Desain Optimal Power System Stabilizer (Pss) Menggunakan PSO (Particle Swarm Optimization) Dan Ga (Genetic Algorithm) Pada Single Machine Infinite Bus (SMIB). *TRANSIENT*, *1*(4), 188–193.

Yuliani, S., Budhiati. V., R., & Mashuri. (2012). Penerapan diagonalisasi matriks dan matriks Leslie dalam memproyeksikan jumlah populasi perempuan. *Unnes Journal Mathematics*, *1*(1), 52–59.