

# Pemodelan Persebaran Spasial Rabies di Kalimantan Barat

Yudhi<sup>a,\*</sup>, Mariatul Kiftiah<sup>a</sup>

<sup>a</sup> "Universitas Tanjungpura", "Jalan Prof. H. Hadari Nawawi", "Pontianak 78124", Indonesia

\* Alamat Surel: [yudhi@math.untan.ac.id](mailto:yudhi@math.untan.ac.id)

## Abstrak

Rabies masih menyebar pada populasi anjing, oleh karena itu penting untuk memahami laju penyebaran rabies ke area geografis yang tidak terinfeksi. Model matematika pada penelitian ini menggunakan tiga sub-populasi anjing, yaitu anjing sehat ( $S$ ), anjing terinfeksi rabies ( $I$ ), dan anjing yang divaksinasi ( $V$ ) dengan menambahkan difusi ke dalam model untuk mendapatkan model persamaan reaksi-difusi. Tujuan dari penelitian ini untuk mengetahui penyebaran spasial rabies di Kalimantan Barat. Hasil penelitian menunjukkan bahwa kecepatan minimum *travelling wave* untuk penyebaran spasial dari model rabies di Kalimantan Barat sebesar 0,0088 km/bulan.

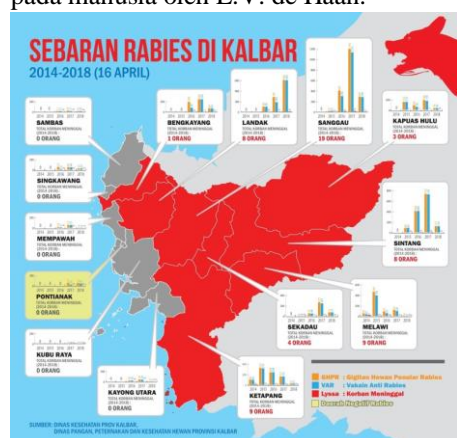
Kata kunci: "spasial, reaksi-disfusi, rabies, travelling wave, model SIV"

© 2020 Dipublikasikan oleh Jurusan Matematika, Universitas Negeri Semarang

## 1. Pendahuluan

Rabies merupakan penyakit yang disebabkan oleh virus RNA dari genus *Lyssavirus* dan termasuk kedalam famili *Rhabdoviridae* (Kaplan, 1985). Rabies merupakan penyakit zoonosis yang dapat menyerang semua hewan berdarah panas dan manusia. Virus rabies ditransmisikan melalui gigitan hewan yang terinfeksi rabies, ketika air liur hewan terinfeksi rabies yang mengandung virus ke dalam luka akibat gigitan. Virus rabies tidak bisa menyusup/melewati kulit dalam kondisi utuh (tanpa luka). Begitu sampai ke otak, virus rabies dapat bereplikasi lebih lanjut, sehingga menghasilkan tanda klinis pada pasien (Kemenkes RI, 2017).

Menurut WHO dalam Kemenkes RI (2017), anjing domestik merupakan reservoir yang paling umum dari virus rabies, dengan lebih dari 95% kematian manusia yang disebabkan oleh anjing yang memiliki virus rabies. Penyakit ini dikenal di Indonesia sejak diketahui dan dilaporkan adanya seekor kerbau menderit rabies oleh Esser pada tahun 1884. Kemudian pada tahun 1894 pertama kali dilaporkan rabies pada manusia oleh E.V. de Haan.



**Gambar 1.** Sebaran Rabies di Kalimantan Barat (ANTARA, 2018)

Pada tahun 2014, penyakit rabies di Kalimantan Barat termasuk dalam kejadian luar biasa (KLB). Berdasarkan data dari Dinas Kesehatan Provinsi Kalimantan Barat ada beberapa kabupaten yang

To cite this article:

Yudhi, Kiftiah, M. (201920). "Pemodelan Penyebaran Spasial Rabies di Kalimantan Barat". *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika* 3, 719-724

mengalami KLB, diantaranya kabupaten Sanggau, kabupaten Sekadau, kabupaten Bengkayang, kabupaten Ketapang, kabupaten Melawi, kabupaten Sintang, kabupaten Landak, dan kabupaten Kapuas Hulu. Sejak tahun 2014-2016 sudah 29 orang meninggal dunia. Data yang diperoleh dari Dinas Peternakan dan Kesehatan Hewan Provinsi, terhitung sampai tanggal 13 Desember 2016 jumlah anjing di Kalimantan Barat mencapai 199.950 ekor dan yang sudah divaksin 47.007 ekor (Roberta, Kiftiah dan Partiw, 2018).

Rabies masih menyebar pada populasi anjing, oleh karena itu penting untuk memahami laju penyebaran rabies ke area geografis yang tidak terinfeksi. Ada berbagai model matematika yang dikembangkan untuk penyebaran rabies, baik dalam bentuk persamaan diferensial biasa maupun dalam bentuk persamaan diferensial parsial. Selama tiga dekade terakhir, berbagai model matematika telah mempelajari dinamika transmisi rabies (Ruan, 2017b).

Murray, Stanley dan Brown (1986) mempelajari penyebaran spasial rabies rubah dan meneliti wabah rabies, mulai tahun 1939 di Polandia dan pindah terus ke arah barat dengan kecepatan 30-60 km per tahun. Model spasial dari Murray *et al.* (1986) merupakan perluasan dari model persamaan diferensial biasa di Anderson, Jackson, May, dan Smith (1981) dengan memasukkan penyebaran penyakit secara spasial, yang disebabkan oleh penyebaran acak rubah. Ruan (2017b) telah menggambarkan penyebaran spasial rabies di antara hewan dengan model reaksi-difusi.

Penelitian ini menambahkan difusi ke populasi anjing dalam model SIV yang dibahas dalam penelitian Roberta *et al.* tahun 2018 untuk mendapatkan model persamaan reaksi-difusi.

---

## 2. Metode

Penelitian ini tentang model penyebaran spasial rabies di Kalimantan Barat. Model spasial pada penelitian ini menggunakan persamaan diferensial parsial dengan menambahkan bentuk difusi untuk persamaan diferensial biasa. Model spasial ini dibentuk dari model dinamika populasi anjing rabies dengan vaksinasi yang merupakan hasil penelitian dari Roberta *et al.* pada tahun 2018 dengan menambahkan bentuk difusi. Kemudian menentukan titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemi penyakit. Selanjutnya mencari kecepatan minimum *travelling wave* untuk penyebaran spasial dari model rabies di Kalimantan Barat.

---

## 3. Hasil dan Pembahasan

### 3.1. Model Spasial Rabies

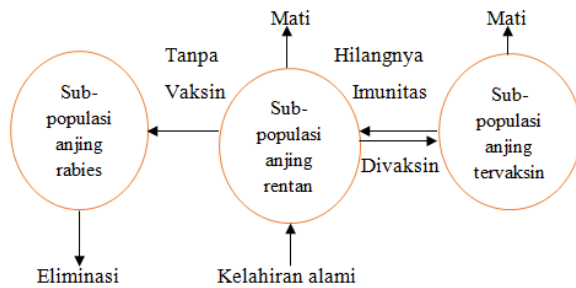
Pada penelitian ini, model yang digunakan yaitu model matematika pada Roberta *et al.* (2018) dengan tidak hanya mempertimbangkan waktu tetapi juga daerah pergerakan anjing dalam menularkan virus rabies. Diasumsikan bahwa terdapat 3 sub-populasi anjing, yaitu anjing sehat, anjing terinfeksi rabies, dan anjing yang divaksinasi. Banyaknya anjing pada masing-masing sub-populasi tersebut pada posisi  $x$  dan waktu  $t$  secara berturut-turut dinotasikan dengan  $S(x, t)$ ,  $I(x, t)$ , dan  $V(x, t)$ .

Pada sistem yang dibentuk, diasumsikan sub-populasi  $S$  bertambah karena adanya kelahiran alami anjing sebesar  $A$  dan berakhirnya masa efektifitas vaksin atau habisnya masa imun sebesar  $\omega$  pada anjing sehingga kembali ke sub-populasi  $S$ . Sub-populasi  $S$  juga berkurang karena adanya laju kematian nonrabies sebesar  $\mu$  dan perpindahan anjing ke sub-populasi  $V$ .

Dinamika pada sub-populasi  $I$  meningkat karena belum dilakukan vaksinasi atau keterlambatan pencegahan selama proses penularan. Sub-populasi ini berkurang akibat adanya laju eliminasi anjing sebesar  $\gamma$  yang telah dinyatakan positif.

Pada akhirnya dinamika pada sub-populasi  $V$  meningkat akibat adanya perpindahan individu dari sub-populasi  $S$  yang diberikan vaksin sebesar  $\rho$  dan berkurang karena adanya laju kematian nonrabies sebesar  $\mu$  dan diasumsikan konstan, berakhirnya masa efektifitas vaksin sebesar  $\omega$  sehingga individu kembali ke sub-populasi  $S$  karena tidak semua anjing yang divaksinasi dapat meningkatkan atau mempertahankan kekebalan tubuhnya maka individu tersebut mungkin saja terinfeksi. Namun, dengan kemungkinan yang lebih rendah dibandingkan anjing yang tidak divaksinasi.

Penularan virus rabies pada sub-populasi anjing rentan karena interaksi dengan sub-populasi anjing yang terinfeksi rabies dengan vaksinasi memberikan kontribusi pada perubahan ketiga sub-populasi yang diilustrasikan pada Gambar 2 berikut:



**Gambar 2.** Diagram Dinamika Penyebaran Rabies

Penelitian ini mempertimbangkan bahwa pergerakan virus rabies diasumsikan sebagai akibat dari pergerakan anjing-anjing pada populasi. Berdasarkan hal tersebut maka sistem penyebaran penyakit rabies yang dibentuk akan melibatkan koefisien difusi. Koefisien difusi ini menginterpretasikan bagaimana anjing berpindah dengan efisien dari satu sub-populasi ke sub-populasi lainnya (panjang/waktu) dan digunakan untuk memperoleh sistem difusi yang melibatkan reaksi kinetik. Bentuk umum sistem persamaan reaksi difusi dan kinetik adalah :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u)$$

dengan  $D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  menunjukkan reaksi difusi,  $f(u)$  menunjukkan reaksi kinetik dan  $u$  tergantung pada  $x$  dan  $t$ . Persamaan reaksi difusi dan kinetik merupakan bentuk persamaan diferensial parsial.

Berdasarkan asumsi yang telah dipaparkan, maka model matematika penyebaran penyakit rabies pada populasi anjing dengan vaksinasi yang dinyatakan dalam bentuk sistem reaksi difusi adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &= A + \omega V - (1 - \rho)\beta SI - (\rho + \mu)S + D \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \\ \frac{\partial I}{\partial t} &= (1 - \rho)\beta SI - \gamma I + D \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= \rho S - (\omega + \mu)V + D \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \end{aligned} \tag{1}$$

untuk  $t > 0$ ,  $x \in \Omega$  dengan syarat batas Neumann,

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial I}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \Omega$$

dan nilai awal

$$S(x, 0) = S_0(x), \quad I(x, 0) = I_0(x), \quad V(x, 0) = V_0(x), \quad x \in \Omega.$$

dimana  $A, \omega, \mu, \beta, \gamma > 0$ ,  $S, I, V \geq 0$ ,  $0 < \rho < 1$ .

Keterangan parameter diberikan pada Tabel 1 berikut.

**Tabel 1.** Penjelasan Paramater-Pamater dari Model Rabies

Parameter	Keterangan
$A$	kelahiran alami dari populasi anjing
$\mu$	laju kematian dari populasi anjing (konstan)
$\rho$	persentase pemberian vaksin pada anjing rentan
$\beta$	laju penularan rabies dari anjing rentan menjadi anjing yang terinfeksi rabies

$\gamma$	laju eliminasi terhadap populasi anjing yang terinfeksi rabies
$\omega$	laju individu yang kehilangan imunitas atau hilangnya kekebalan
$S$	jumlah individu pada sub-populasi anjing rentan
$V$	jumlah individu pada sub-populasi anjing yang dilakukan vaksinasi
$I$	jumlah individu pada sub-populasi anjing yang telah terinfeksi rabies
$D$	koefisien difusi

Titik kesetimbangan dari Sistem (1) diperoleh dengan mengabaikan bagian difusi dari Sistem (1). Adapun titik kesetimbangan bebas penyakit, yaitu

$$E_* = (S_*, I_*, V_*)$$

dengan

$$S_* = \frac{(\omega + \mu)A}{\mu(\rho + \omega + \mu)}$$

$$I_* = 0$$

$$V_* = \frac{\rho A}{\mu(\rho + \omega + \mu)}$$

dan titik kesetimbangan endemi penyakit

$$E^* = (S^*, I^*, V^*)$$

dengan

$$S^* = \frac{\gamma}{(1 - \rho)\beta}$$

$$I^* = \frac{\beta(1 - \rho)(\omega + \mu)A - \rho\mu\gamma - \mu\omega\gamma - \mu^2\gamma}{(1 - \rho)(\omega + \mu)\gamma\beta}$$

$$V^* = \frac{\rho\gamma}{(1 - \rho)(\omega + \mu)\beta}$$

### 3.2. Pembahasan

Pembahasan pada penelitian ini mengenai kecepatan minimum *travelling wave* dari model spasial rabies. Model spasial rabies merupakan sistem persamaan diferensial parsial ditransformasikan menjadi sistem persamaan diferensial biasa dengan misalkan  $z = x + ct$ , sehingga diperoleh

$$S' = \frac{1}{c}(A + \omega V - (1 - \rho)\beta SI - (\rho + \mu)S) + \frac{D}{c}S''$$

$$I' = \frac{1}{c}((1 - \rho)\beta SI - \gamma I) + \frac{D}{c}I''$$

$$V' = \frac{1}{c}(\rho S - (\omega + \mu)V) + \frac{D}{c}V''$$

Misalkan  $S_1 = S'$ ,  $I_1 = I'$  dan  $V_1 = V'$ , maka

$$S_1' = S_1$$

$$S_1' = \frac{1}{D}(cS_1 - (A + \omega V - (1 - \rho)\beta SI - (\rho + \mu)S))$$

$$I_1' = I_1$$

$$I_1' = \frac{1}{D}(cI_1 - ((1 - \rho)\beta SI - \gamma I))$$

$$V_1' = V_1$$

$$V_1' = \frac{1}{D}(cV_1 - (\rho S - (\omega + \mu)V))$$
(2)

Matriks Jacobian dari Sistem (2)

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & c/D & A_2 & 0 & -\omega/D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ A_3 & 0 & A_4 & c/D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\rho/D & 0 & 0 & 0 & A_5 & c/D \end{bmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{1}{D}((1-\rho)\beta I + \rho + \mu) \\
 A_2 &= \frac{1}{D}(1-\rho)\beta S \\
 A_3 &= -\frac{1}{D}(1-\rho)\beta I \\
 A_4 &= -\frac{1}{D}((1-\rho)\beta S + \gamma) \\
 A_5 &= \frac{1}{D}(\omega + \mu)
 \end{aligned}$$

Matriks Jacobian dari Sistem (2) di titik kesetimbangan  $E_* = (S_*, I_*, V_*)$

$$J_* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\rho + \mu}{D} & \frac{c}{D} & B_1 & 0 & -\frac{\omega}{D} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 & \frac{c}{D} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\rho}{D} & 0 & 0 & 0 & \frac{\omega + \mu}{D} & \frac{c}{D} \end{bmatrix} \quad (3)$$

dengan

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \frac{(1-\rho)(\omega + \mu)\beta A}{D\mu(\rho + \omega + \mu)} \\
 B_2 &= \frac{(1-\rho)(\omega + \mu)\beta A + \mu\gamma(\rho + \omega + \mu)}{D\mu(\rho + \omega + \mu)}
 \end{aligned}$$

Nilai eigen dari matriks Jacobian (3)

$$\begin{aligned}
 \lambda_{1,2} &= \frac{c \pm \sqrt{c^2 + 4\mu}}{2} \\
 \lambda_{3,4} &= \frac{c \pm \sqrt{c^2 + 4(\mu + \omega + \rho)}}{2} \\
 \lambda_{5,6} &= \frac{c}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(c^2(\mu^2 + \mu\omega + \mu\rho) - 4A\beta(1-\rho)(\mu + \omega) + 4\gamma\mu(\mu + \omega + \rho))}{\mu(\mu + \omega + \rho)}}
 \end{aligned}$$

Diketahui bahwa nilai parameter dan  $c$  adalah positif, maka nilai eigen dari  $\lambda_1$  dan  $\lambda_3$  bernilai positif dan  $\lambda_2$  dan  $\lambda_4$  bernilai negatif.

Karena nilai eigen harus bernilai real, baik itu bernilai real negatif atau setidaknya satu bernilai positif, maka nilai eigen dari  $\lambda_5$  dan  $\lambda_6$  harus bilangan real. Oleh karena itu nilai dari

$$\begin{aligned}
 c^2(\mu^2 + \mu\omega + \mu\rho) - 4A\beta(1-\rho)(\mu + \omega) + 4\gamma\mu(\mu + \omega + \rho) &\geq 0 \\
 c^2 &\geq \frac{4A\beta(1-\rho)(\mu + \omega)}{\mu(\mu + \omega + \rho)} - 4\gamma
 \end{aligned} \quad (4)$$

Berdasarkan Persamaan (4) diperoleh kecepatan minimum *travelling wave*, yaitu

$$c_{\min} = \frac{4A\beta(1-\rho)(\mu + \omega)}{\mu(\mu + \omega + \rho)} - 4\gamma \quad (5)$$

Berdasarkan Persamaan (5) semua nilai eigen dari Sistem (1) bernilai real dan terdapat real positif, maka titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_*$  tidak stabil sehingga solusi dari Sistem (1) akan menjauhi titik kesetimbangannya dengan cara yang tidak beresilasi menuju titik kesetimbangan endemik  $E^*$ .

Nilai parameter pada penelitian ini berdasarkan penelitian Roberta *et al.* (2018), yaitu kelahiran ( $A$ ) 500 ekor per bulan,  $\mu = 0,0079$ ,  $\rho = 0,0196$ ,  $\beta = 0,00000055$ ,  $\gamma = 0,0076$  dan  $\omega = 0,0000035$  bahwa kecepatan minimum *travelling wave* untuk penyebaran spasial dari model rabies di Kalimantan Barat sebesar 0,0088 km/bulan.

#### 4. Simpulan

Berdasarkan hasil pembahasan penelitian ini ada dua kesimpulan, yaitu model spasial rabies dan kecepatan minimum *travelling wave*. Adapun kesimpulannya sebagai berikut,

##### 4.1. Model Spasial Rabies

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial t} &= A + \omega V - (1 - \rho)\beta SI - (\rho + \mu)S + D \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \\ \frac{\partial I}{\partial t} &= (1 - \rho)\beta SI - \gamma I + D \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= \rho S - (\omega + \mu)V + D \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\end{aligned}$$

untuk  $t > 0$ ,  $x \in \Omega$  dengan syarat batas Neumann,

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial I}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \Omega$$

dan nilai awal

$$S(x, 0) = S_0(x), \quad I(x, 0) = I_0(x), \quad V(x, 0) = V_0(x), \quad x \in \Omega.$$

dimana  $A, \omega, \mu, \beta, \gamma > 0$ ,  $S, I, V \geq 0$ ,  $0 < \rho < 1$ .

##### 4.2. Kecepatan Minimum Travelling Wave Model Spasial Rabies

Kecepatan minimum *travelling wave*

$$c_{\min} = \frac{4A\beta(1-\rho)(\mu+\omega)}{\mu(\mu+\omega+\rho)} - 4\gamma$$

untuk penyebaran spasial dari model rabies di Kalimantan Barat atau sebesar 0,0088 km/bulan.

#### Daftar Pustaka

- Anderson, R. M., Jackson, H. C., May, R. M., and Smith, A. M. (1981). Population dynamics of fox rabies in Europe. *Nature*, 289, 765-771.
- ANTARA. (2018). Sebaran Rabies Yang Menghantui Kalbar. <https://kalbar.antaraneews.com/berita/361282/sebaran-rabies-yang-menghantui-kalbar> diakses 31 Maret 2019
- Kaplan, C. (1985). Rabies: A worldwide disease.”, in “Population dynamics of rabies in wildlife”, edited by P. Bacon. Academic Press, London, Orlando.
- Kementerian Kesehatan RI. (2017). PUSDATIN (Pusat dan Informasi Kementerian Kesehatan RI). (Online) tersedia di <https://www.kemkes.go.id/download.php?file=download/pusdatin/infodatin/infodatin%20rabies%202017.pdf>, diakses pada tanggal 20 April 2019.
- Murray, J. D., Stanley, E. A., and Brown, D. L. (1986). On the spatial spread of rabies among foxes. *Proceedings of the Royal Society of London Series B*, 229, 111-150
- Roberta, D., Kiftiah, M. dan Partiw, W. B. (2018). Analisis Kestabilan Model Dinamika Populasi Anjing Rabies Dengan Vaksinasi. *Bimaster*, 07(1), 47 – 54.
- Ruan, Shigui. (2017b). Spatiotemporal Epidemic Models For Rabies Among Animals. *Infectious Disease Modelling*, 2, Issue 3, 277-287