PRISMA 4 (2021): 743-754
PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika
https://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/prisma/
ISSN 2613-9189

Teorema Pythagoras: Aplikasinya terhadap Teorema Heron dan Dimensi Tiga

Rosida Marasabessy[a,*]

[a] *Universitas Pendidikan Indonesia, Jl. Dr. Setiabudi No 227, Isola, Kec. Sukasari, Bandung, Indonesia*

* *Alamat Surel: rosidamarasabessy@upi.edu*

Abstrak

Teorema pythagoras pada dasarnya merupakan suatu teorema yang berlaku pada segitiga. Beberapa peneliti telah mengembangkan temuan mereka dengan memanfaatkan teorema ini misalkan saja teorema heron. Teorema heron adalah rumus untuk menentukan luas suatu segitiga dengan menggunakan panjang ketiga sisi segitiganya. Ada beberapa cara untuk membuktikan teorema heron ini, diantaranya dengan mengaplikasikan teorema pythagoras. Tak hanya teorema heron, pada dimensi tiga juga dapat diterapkan teorema phytagoras. Akan sangat bermanfaat jika memikirkan teorema pythagoras secara mendalam. Dengan demikian, dalam artikel ini akan dibahas mengenai teorema pythagoras. Pada pembahasan pertama meliputi uraian teorema pythagoras beserta buktinya. pada bagian ini disajikan tiga bukti berbeda dari teorema pythagoras. Pembahasan kedua meliputi konvers teorema pythagoras beserta buktinya. Ketiga, aplikasi dari teorema pythagoras, akan diuraikan melalui beberapa contoh dalam konteks pemecahan masalah dan pembuktian teorema heron. Pada bagian keempat akan diuraikan tentang teorema pythagoras di dimensi tiga. Dengan uraian keempat hal ini pembaca diharapkan memiliki pemahaman yang komprehensif tentang teorema pythagoras. Metode yang digunakan dalam artikel ini adalah studi pustaka.

Kata kunci:

Teorema pythagoras, teorema heron, konvers pythagoras, dimensi tiga.

1. Pendahuluan

Teorema yang secara umum paling dikenal adalah teorema pythagoras. Selain dikenal, teorema ini merupakan teorema tertua dan sangat penting dalam matematika ((Sparks, 2013); (Maor, 2007)). Kurang lebih 4000 tahun yang lalu, teorema ini pertama kali muncul (Sparks, 2013). Semenjak masa itu, sudah banyak pakar yang membuktikannya dengan cara yang bervariasi. Sebagai contoh , terdapat 371 bukti yang dipaparkan dalam buku *The Pytagorean Theorem: A 4000-Year History* (Maor, 2007). Nama teorema ini diambil dari nama seorang matematikawan Yunani yang benama Pythagoras. Pythagoras lahir di pulau Samos, sekitar tahun 570 SM (Strathern, 2009)**.**

Diantara gurunya, Thaleslah yang memiliki pengaruh untuk Pythagoras. Thales memperkenalkan Pythagoras pada matematika dan astronomi. Berdasarkan nasehat gurunya Thales, Pythagoras muda mengunjungi Mesir sekitar tahun 547 SM dan menetap di sana untuk mempelajari lebih lanjut tentang matematika dan astronomi (Veljan, 2000). Pythagoras kembali ke Samos, tetapi segera meninggalkan pulau itu untuk melarikan diri dari kejaliman Polycrates, dan menetap di Croton, Italia Selatan. Disana ia mendirikan sekolah filsafat dan agama yang memiliki banyak pengikut. Para pengikut Pythagoras dikenal dengan sebutan *mathematikoi* (Veljan, 2000). *Mathematikoi* tinggal bersama masyarakat, tidak memiliki harta benda pribadi, dan bervegetarian. Mereka diajar oleh Pythagoras sendiri dan mematuhi aturan yang ketat. Menurut Veljan (2000), diantara keyakinan Pythagoras adalah, (1) realitas adalah dasar dari matematika, (2) filsafat dapat mengarah pada pemurnian spiritual, (3) jiwa bisa bangkit untuk bersatu

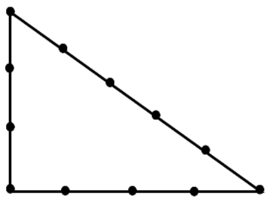
To cite this article:
Marasabessy, R. (2021). Teorema Pythagoras: Aplikasinya terhadap Teorema Heron dan Dimensi Tiga. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika 4*, 743-754

bersama ilahi, (4) simbol tertentu memiliki makna mistik, dan (5) semua anggota harus menjaga kerahasiaan dan kesetiaan.

Dalam Veljan (2000) dijelaskan bahwa Pythagoras dan *Mathematikoi* mempelajari matematika, konsep bilangan, segitiga, dan bentuk ruang serta abstraksi dalam pembuktian. Mereka kurang tertarik dalam merumuskan dan memecahkan masalah. Pythagoras percaya bahwa semua alam dan keteraturannya dapat direduksi menjadi hubungan numerik. Ia mempelajari sifat-sifat bilangan genap, ganjil, segitiga dan bilangan sempurna, serta ia menetapkan "sifat" pada masing-masing angka. Angka mungkin cantik atau jelek, lengkap atau tidak lengkap, dan lain-lain. Sepuluh dianggap bilangan sempurna, hal ini disebabkan jika penulisan dalam bentuk titik maka akan membentuk segitiga sempurna, dan sepuluh terdiri dari jumlah empat bilangan bulat pertama (1 + 2 + 3 + 4 = 10).

Pythagoras dan para pengikutnya adalah yang pertama dalam sejarah yang memberikan pertimbangan geometris rasa ilmiah, dan mereka pertama kali menyadari perlunya pembuktian secara sistematis. Hanya dua abad kemudian, Euclid (1908) sepenuhnya memahami pendekatan ini dengan elemennya, yang berisi banyak gagasan Pythagoras, dan menetapkan standar baru untuk ketelitian matematika dan struktur logis (Veljan, 2000). Warisan terpenting Pythagoras adalah teorema terkenalnya. Namun, dalam beberapa bentuk, teorema ini telah dikenal jauh lebih awal, seperti yang kita ketahui dari gambar, teks, legenda, dan cerita dari Babilonia, Mesir, dan Cina, yang berasal dari tahun 1800-1500 SM (Veljan, 2000). Satu cerita terkenal menyatakan bahwa para petani Mesir menggunakan tali dengan simpul-simpul yang berjarak sama untuk membentuk segitiga siku-siku $3-4-5$, yang mereka gunakan untuk mengukur ulang plot pertanian mereka yang dibanjiri Sungai Nil setiap tahun.

Segitiga dengan panjang sisi $3, 4,$ dan 5, telah diketahui oleh Bangsa Mesir Kuno akan membentuk sebuah sudut siku-siku. Mereka menggunakan tali yang diberi simpul pada beberapa tempat dan menggunakannya untuk membentuk sudut siku-siku pada bangunan-bangunan mereka termasuk piramid (Sparks, 2013). Seperti gambar 1 di bawah ini.



Gambar 1. ilustrasi segitiga siku-siku yang dibentuk dari seutas tali

Diyakini bahwa Bangsa Mesir Kuno memiliki banyak pengetahuan tentang segitiga dengan sisi $3, 4,$ dan 5 yang akan membentuk segitiga siku-siku. Sedangkan, teorema yang berlaku secara umum untuk segitiga siku-siku belum mereka ketahui. Di Cina, Tschou-Gun yang hidup sekitar 1100 SM juga mengetahui teorema ini. Demikian juga di Babylonia, teorema phytagoras ini telah dikenal pada masa lebih dari 1000 tahun sebelum Pythagoras. Sebuah keping tanah liat dari Babilonia pernah ditemukan dan memuat naskah yang bertuliskan sebagai berikut: "4 *is length and* 5 *the diagonal. What is the breadth*?" (Strathern, 2009).

Pythagoras menemukan teoremanya saat menunggu di aula istana untuk diterima oleh Polycrates. Karena bosan, Pythagoras mempelajari ubin persegi batu di lantai dan membayangkan segitiga siku-siku "tersembunyi" di ubin bersama dengan bujur sangkar yang didirikan di sisi-sisinya. Setelah "melihat" bahwa luas persegi di atas hipotenusa sama dengan jumlah luas persegi di atas kaki, Pythagoras berpikir bahwa hal yang sama mungkin juga berlaku jika kedua kaki memiliki panjang yang tidak sama. Bagaimanapun, Pythagoras dengan tepat digambarkan sebagai ahli matematika murni pertama dalam sejarah. Pythagoraslah yang telah membuat generalisasi dan membuat teorema ini menjadi populer (Veljan, 2000). Secara singkat teorema Pythagoras berbunyi "Pada sebuah segitiga siku-siku, kuadrat sisi miring (sisi di depan sudut siku-siku) sama dengan jumlah kuadrat sisi-sisi yang lain".

Teorema pythagoras pada dasarnya merupakan suatu teorema yang berlaku pada segitiga (Givental, 2006). Beberapa peneliti telah mengembangkan temuan mereka dengan memanfaatkan teorema ini misalkan saja teorema heron. Teorema heron adalah rumus untuk menentukan luas suatu segitiga dengan menggunakan panjang ketiga sisi segitiganya tersebut (Jupri, 2019). Ada beberapa cara untuk membuktikan teorema heron ini, diantaranya dengan mengaplikasikan teorema pythagoras. Tak hanya teorema heron, pada dimensi tiga juga dapat diterapkan teorema phytagoras. Konvers dari teorema pythagoras juga memiliki tempat tersendiri dalam pembahasan geometri dan sudah lama dijelaskan dalam buku I element karya Euclid (1908). Lebih tepatnya, konvers ini dimuat dalam proposisi ke 48 yang merupakan preposisi terakhir dari buku I (Euclid, 1908). Dalam buku tersebut, pembuktiannya dipaparkan dengan menggunakan konsep kekongruenan. Selain iu, Moise (1990) juga membuktikan teorema konvers pythagoras dengan cara yang sedikit berbeda namun dengan ide yang serupa. Meskipun demikian, masih terhitung sedikit upaya untuk membuktikan teorema ini dengan cara yang lain.

Akan sangat bermanfaat jika membahas teorema pythagoras, konvers dan aplikasinya secara mendalam. Artikel-artikel nasional maupun internasional yang berkaitan dengan teorema pythagoras, konvers pythagoras, teorema heron dan dimensi tiga dikumpulkan untuk ditelaah secara mendalam. Dengan demikian, metode yang digunakan dalam penulisan artikel ini adalah studi pustaka. Menurut Shuttleworth (2009), studi pustaka adalah evaluasi kritis dan mendalam dari penelitian sebelumnya. Dari penjelasan Shuttleworth (2009) tersebut dapat disimpulkan bahwa studi pustaka tidak hanya bermakna membaca literatur, akan tetapi lebih ke arah evaluasi yang mendalam dan kritis tentang penelitian sebelumnya mengenai suatu topik. Sedangkan menurut Creswell & Creswell (2017), mencari, memilih, menimbang, dan membaca literatur adalah pekerjaan pertama dalam proyek penelitian apapun. Pada pembahasan pertama dalam artikel ini meliputi uraian teorema pythagoras beserta buktinya. Pada bagian ini disajikan tiga bukti berbeda dari teorema pythagoras. Pembahasan kedua meliputi konvers teorema pythagoras beserta buktinya. Ketiga, aplikasi dari teorema pythagoras, akan diuraikan pembuktian teorema heron dan beberapa contoh dalam konteks pemecahan masalah. Pada bagian keempat akan diuraikan tentang teorema pythagoras di dimensi tiga. Dengan uraian keempat hal ini, pembaca diharapkan memiliki pemahaman yang komprehensif tentang teorema pythagoras.

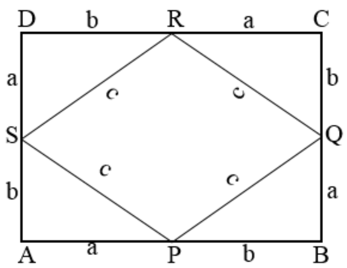
2. Hasil dan Pembahasan

2.1. Teorema 1 *(Teorema Pythagoras)*

Berikut ini adalah bunyi dari teorema pythagoras yang di ambil dari buku *The Pytagorean Theorem* (Sparks, 2013), pada sembarang segitiga siku-siku, kuadrat dari panjang sisi terpanjang (*hypotenusa*) sama dengan jumlah dari kuadrat panjang masing-masing sisi-sisi segitiga yang lain.

2.1.1. Bukti Cara 1

Pembuktian paling sederhana tentang kebenaran teorema pythagoras dengan menggunakan luas segitiga dan luas persegi (Strathern, 2009). Jika kita punya segitiga siku-siku, cobalah menyusunnya membentuk persegi seperti di bawah ini. Penyusunannya bisa dimulai dari mana saja, misalkan kita susun dari kiri atas, kemudian kanan atas, lalu kanan bawah, dan terakhir kiri bawah. Maka akan terbentuk persegi besar (persegi ABCD) dan pesergi kecil (persegi PQRS) seperti pada gambar 2 di bawah ini:



Gambar 2. persegi

Misalkan ABCD adalah sebuah persegi dengan panjang sisinya $a+b$ satuan panjang. Misalkan P adalah titik pada AB dengan demikian $PB=b$. Hal serupa berlaku untuk titik-titik Q, R, S pada sisi BC, CD dan DA. Dapat ditunjukkan bahwa PQRS, dengan panjang sisi masing-masing c adalah sebuah persegi. Perhatikan bahwa:

$$Luas\ Persegi\ ABCD = Luas\ Persegi\ PQRS + (4 \times Luas\ \Delta\ APS)$$

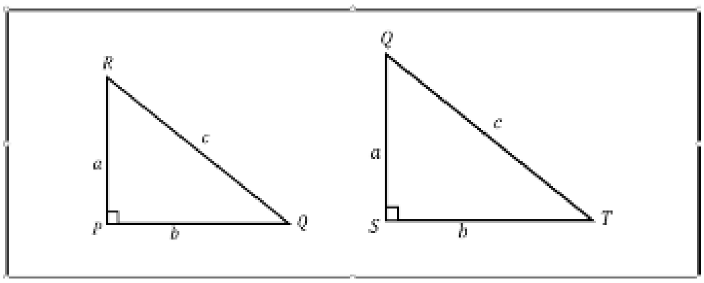
$$(a+b)^2 = c^2 + (4 \times \tfrac{1}{2} \times a \times b)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

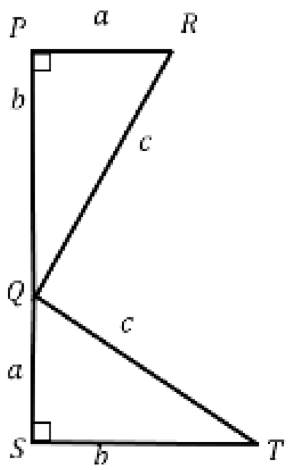
2.1.2. Bukti Cara 2

Bukti cara 2 ini ditemukan oleh Presiden Amerika Serikat J.A. Garfield pada tahun 1876 (Jupri, 2019). Dalam pembuktiannya, ia menggunakan rumus luas trapesium. Pertama dibuatkan segitiga yang identik yaitu ΔPQR dan ΔSTQ. Panjang sisi $PR = SQ = a$, $PQ = ST = b$ dan $QR = TQ = c$. Dimana $QR = TQ = c$ sebagai sisi miring.



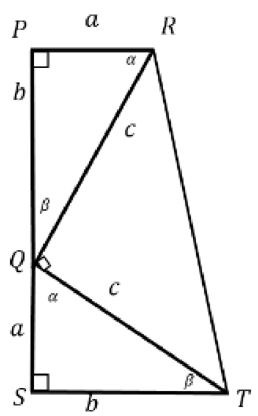
Gambar 3. segitiga identik

Kemudian pada sisi $PQ = b$ disusun dan bertemu dengan sisi $QS = a$ sehingga membentuk suatu garis PS seperti gambar berikut:



Gambar 4. penyusunan dua segitiga dimana sisi PQ dan QS bertemu

Selanjutnya, tarik titik garis TR sehingga membentuk sebuah trapesium PSTR seperti gambar di bawah ini:



Gambar 5. trapesium PSTR

Diketahui bahwa $\angle RPQ = \angle QST = 90°$. Dimisalkan $\angle QRP = \alpha$ dan $\angle PQR = \beta$. Karena $\Delta PQR \cong \Delta QST$ (kongruen), maka $\angle TQS = \alpha$ dan $\angle STQ = \beta$. Diketahui juga jumlah sudut di dalam segitiga adalah $180°$.

$$\angle RPT + \angle QRP + \angle PQR = 180°$$
$$90° + (\alpha + \beta) = 180°$$
$$(\alpha + \beta) = 90°$$

Sudut yang dibentuk oleh garis PS adalah 180°.

$$\angle PQR + \angle QST + \angle RQT = 180°$$
$$(\beta + \alpha) + \angle RQT = 180°$$
$$90° + \angle RQT = 180°$$
$$\angle RQT = 90°$$

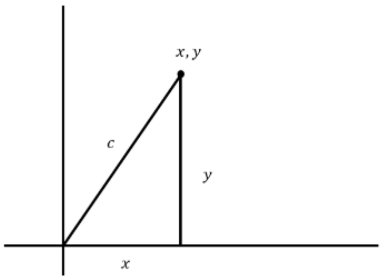
Trapesium $PSTR$ terbentuk dari 3 segitiga siku-siku yaitu ΔPQR, ΔSTQ, dan ΔQTR sehingga luas daerah trapesium $PSTR$ sama dengan luas daerah ketiga segitiga siku-siku sebagai penyusunnya yang dijelaskan sebagai berikut:

$$Luas\ daerah\ trapesium\ PSTR = Luas\ daerah\ \Delta PQR + luas\ daerah\ \Delta STQ + luas\ daerah\ \Delta QTR$$
$$\frac{1}{2}(a+b)(a+b) = \frac{1}{2}(a \times b) + \frac{1}{2}(b \times a) + \frac{1}{2}(c \times c)$$
$$\frac{1}{2}(a^2 + 2ab + b^2) = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$

2.1.3. Bukti Cara 3

Pembuktian cara 3 menggunakan persamaan diferensial. Pembuktian teorema pythagoras dengan persamaan differensial dibuktikan oleh Molokach (2010). Sistematika pembuktian yang dikemukakan oleh Molokach (2010) sebagai berikut:

- Gambarkan segitiga siku-siku pada kuadran satu, dengan panjang sisi-sisi penyiku x dan y serta hipotenusa c seperti pada gambar dibawah ini:



Gambar 6. segitiga siku-siku pada kuadran satu pada bidang koordinat

- Berdasarkan gambar 6 di atas, dapat kita ketahui bahwa kemiringan garis (gradien) c adalah $m = \frac{y}{x}$.
- Dapat dianggap bahwa himpunan dari semua titik-titik (x, y) adalah c.
- Semua kemungkinan titik (x, y) akan terletak pada kurva penyelesaian $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.
- Untuk menemukan penyelesaian umum persamaan diferensial yakni: $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, kita mempunyai:

$$y\,dy = -x\,dx$$
$$\int y\,dy = \int -x\ dx$$
$$\int y\,dy = -\int x\ dx$$
$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + D$$
$$x^2 + y^2 = E; E = 2D$$

dengan menggunakan kondisi $(x, y) = (c, 0)$ kita mempunyai:

$$x^2 + y^2 = E$$
$$0^2 + c^2 = E$$
$$c^2 = E$$

Sehingga dengan penyelesaian umum $x^2 + y^2 = c^2$. Ambil nilai untuk (x, y) pada kurva di kuadran pertama, misal (a, b) maka akan di dapatkan persamaan $a^2 + b^2 = c^2$.

2.2. Teorema 2 (Konvers Teorema Pythagoras)

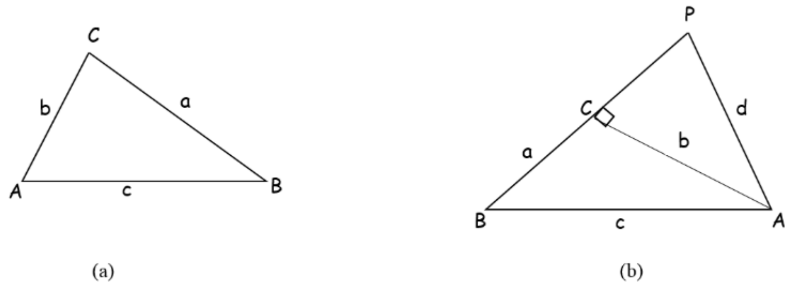
Berikut ini adalah bunyi dari konvers teorema pythagoras yang diambil dari buku *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint* karya Moise (1990). Diberikan sebuah segitiga dengan panjang sisinya adalah $a, b,$ dan c. Jika $a^2 + b^2 = c^2$, maka segitiga tersebut adalah segitiga siku-siku, dimana sudut siku-sikunya berada di hadapan sisi dengan panjang c. Selanjutnya akan dipaparkan dua bukti konvers teorema pythagoras.

2.2.1. Bukti 1

Jika pada sembarang segitiga berlaku hubungan kuadrat dari panjang sisi terpanjang sama dengan jumlah dari kuadrat panjang masing-masing sisi segitiga yang lain, maka segitiga tersebut adalah segitiga siku-siku (Jupri, 2019). Dengan perkataan lain, misalkan jika pada ΔABC, dengan $AB = c, AC = b$ dan $BC = a$ serta berlaku $a^2 + b^2 = c^2$, maka ΔABC siku-siku di C.

Bukti:

$a^2 + b^2 = c^2$



Gambar 7. (a) gambar pertama; (b) gambar kedua

Diketahui ΔABC, dengan $AB = c, AC = b$ dan $BC = a$ serta berlaku $a^2 + b^2 = c^2$ (gambar (a)). Selanjutnya, kita mengkonstruksikan ΔAPC, dengan $PC = BC = a$, serta $\angle ACP = 90°$ (gambar (b)). Dapat ditunjukkan bahwa $\Delta ABC \cong \Delta ACP$. Hal ini dapat ditunjukkan seperti berikut:

Perhatikan bahwa $PC = a = BC; AC = AC = b$ dan

$$AP^2 = AC^2 + PC^2$$

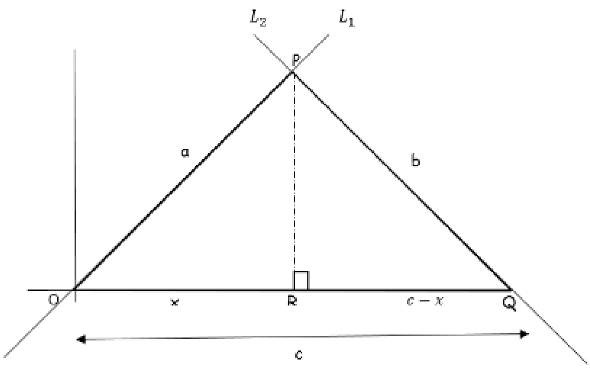
$$d^2 = b^2 + a^2$$

$$d^2 = a^2 + b^2$$

Di lain sisi, kita punya $a^2 + b^2 = c^2$. Sehingga $d = c$. Dengan demikian, $\angle ACP = 90° = \angle ACB$.

2.2.2. Bukti 2

Diberikan sebuah segitiga OPQ pada bidang kartesius, dengan $OP = a, PQ = b, OQ = c$ dan berlaku $a^2 + b^2 = c^2$. Misalkan $L_1 = \overleftrightarrow{OP}$ dan $L_2 = \overleftrightarrow{QP}$, akan dibuktikan bahwa $m\angle OPQ = 90°$ dengan membuktikan $M_{L1} \times M_{L2} = -1$. Langkah pertama dengan menggambarkan garis tinggi $\overleftrightarrow{PR}$.



Gambar 8. segitiga OPQ pada bidang kartesius

Diketahui koordinat titik O adalah $(0,0)$ dan titik Q adalah $(c, 0)$. Misalkan koordinat titik P adalah $\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)$ akan dicari nilai x. Dengan menggunakan teorema Pytagoras pada ΔORP dan ΔQRP, diperoleh:

$$
\begin{aligned}
PR^2 &= PR^2 \\
OP^2 - OR^2 &= PQ^2 - RQ^2 \\
a^2 - x^2 &= b^2 - (c - x)^2 \\
a^2 - x^2 &= b^2 - (c^2 - 2cx + x^2) \\
a^2 - x^2 &= b^2 - c^2 + 2cx - x^2 \\
a^2 - b^2 + c^2 &= 2cx \\
a^2 - b^2 + (a^2 + b^2) &= 2cx \\
2a^2 &= 2cx \\
a^2 &= cx \\
x &= \frac{a^2}{c}
\end{aligned}
$$

Sehingga diperoleh $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2}{c}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^4}{c^2}} = \sqrt{\frac{a^2 b^2}{c^2}} = \frac{ab}{c}$. M_{L1} dan M_{L2} dapat diperoleh dengan:

$$M_{L1} = \frac{PR}{RO} = \frac{y}{x} = \frac{ab/c}{a^2/c} = \frac{b}{a}$$

$$M_{L2} = \frac{PR}{QX} = \frac{y}{x - c} = \frac{ab/c}{a^2/c - c} = \frac{-a}{b}$$

Sehingga diperoleh $M_{L1} \times M_{L2} = -1$. Ini berarti $\angle OPQ = 90°$.

2. 3. Aplikasi Teorema Phytagoras

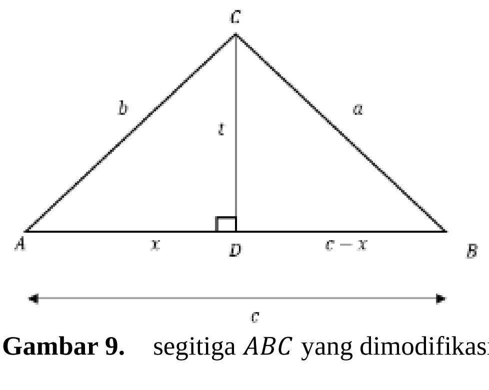
Setelah kita memahami teorema phytagoras dan konversnya, serta aneka ragam pembuktiannya, berikut ini disajikan beberapa contoh aplikasinya. Untuk contoh pertama, disajikan aplikasi teorema pythagoras untuk membuktikan teorema heron (Moise, 1990).

2.3.1. Aplikasi 1: Teorema Heron

Jika ABC sembarang segitiga, dengan $AB = c, BC = a$ dan $AC = b, 2s = a + b + c$, maka buktikan bahwa luas daerah segitiga tersebut adalah $Luas_{\Delta ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Bukti:

Berdasarkan informasi yang diketahui, misalkan kita dapat mengkonstruksikan $CD = t$ sebagai garis tinggi, dan $AD = x$ seperti pada gambar di bawah ini:



Gambar 9. segitiga ABC yang dimodifikasi

Dengan menerapkan teorema pythagoras pada ΔADC, maka diperoleh hubungan: $t^2 = b^2 - x^2$. Dengan menerapkan teorema pythagoras pada ΔBDC, maka diperoleh hubungan: $t^2 = a^2 - (c-x)^2$. Dari kedua persamaan tersebut, diperoleh hubungan:

$$b^2 - x^2 = a^2 - (c-x)^2$$
$$b^2 - x^2 = a^2 - (c^2 - 2cx + x^2)$$
$$b^2 - x^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2$$
$$b^2 = a^2 - c^2 + 2cx$$
$$b^2 - a^2 + c^2 = 2cx$$
$$x = \frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c}$$

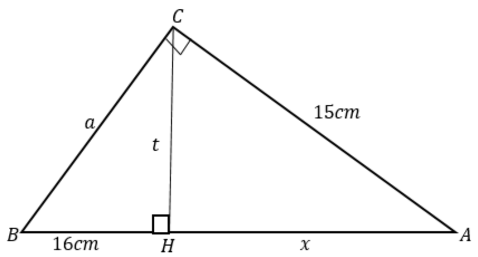
Dengan mensubtitusikan nilai $x = \frac{b^2-a^2+c^2}{2c}$ ke $t^2 = b^2 - x^2$ maka diperoleh:

$$t^2 = b^2 - \left(\frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c}\right)^2$$
$$t^2 = \left[b - \left(\frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c}\right)\right]\left[b + \left(\frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c}\right)\right]$$
$$t^2 = \left[\frac{2bc - b^2 + a^2 - c^2}{2c}\right]\left[\frac{2bc + b^2 - a^2 + c^2}{2c}\right]$$
$$t^2 = \left[\frac{a^2 - b^2 + 2bc - c^2}{2c}\right]\left[\frac{b^2 + 2bc + c^2 - a^2}{2c}\right]$$
$$t^2 = \left[\frac{a^2 - (b-c)^2}{2c}\right]\left[\frac{(b+c)^2 - a^2}{2c}\right]$$
$$t^2 = \left[\frac{(a - (b-c))(a + (b-c))}{2c}\right]\left[\frac{\big((b+c) - a\big)\big((b+c) + a\big)}{2c}\right]$$
$$t^2 = \left[\frac{(a - b + c))(a + b - c)}{2c}\right]\left[\frac{(b + c - a)(b + c + a)}{2c}\right]$$
$$t^2 = \left(\frac{(a+b+c-2b)(a+b+c-2c)(a+b+c-2a)(a+b+c)}{(2c)(2c)}\right)$$
$$t^2 = \frac{(2s-2b)(2s-2c)(2s-2a)(2s)}{4c^2}$$
$$t^2 = \frac{2(s-b)\,2(s-c)\,2(s-a)(2s)}{4c^2}$$
$$t^2 = \frac{4(s-b)\,(s-c)\,(s-a)(s)}{c^2}$$
$$t = \sqrt{\frac{4(s-b)\,(s-c)\,(s-a)(s)}{c^2}}$$
$$t = \frac{2}{c}\sqrt{(s-b)\,(s-c)\,(s-a)(s)}$$
$$Luas_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times t$$
$$Luas_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \times c \times \frac{2}{c}\sqrt{(s-b)\,(s-c)\,(s-a)(s)}$$
$$Luas_{\Delta ABC} = \sqrt{(s-b)\,(s-c)\,(s-a)(s)}$$
$$Luas_{\Delta ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)\,(s-c)}$$

2.3.2. Aplikasi 2: Contoh soal

Diketahui ΔABC siku-siku di C dan $AC = 15cm$. Garis tinggi $\overline{CH}$ membagi $\overline{AB}$ menjadi $\overline{AH}$ dan $\overline{HB}$, dengan $HB = 16\ cm$. Tentukan luas daerah ΔABC!

Jawab:



Gambar 10. segitiga ABC

Pada ΔCHB berlaku $t^2 = a^2 - 16^2$.
Pada ΔCHA berlaku $t^2 = 15^2 - x^2$.
Dari kedua persamaan tersebut diperoleh:

$a^2 - 16^2 = 15^2 - x^2$

$a^2 = 16^2 + 15^2 - x^2$ .... (1)

Pada ΔABC yang siku-siku di C berlaku:

$a^2 = c^2 - b^2$

$a^2 = (16 + x)^2 - 15^2$

$a^2 = 16^2 + 32x + x^2 - 15^2$......................... (2)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh:

$16^2 + 15^2 - x^2 = 16^2 + 32x + x^2 - 15^2$

$2x^2 + 32x - 2\,.\,15^2 = 0$

$x^2 + 16x - 225 = 0$

$(x - 9)(x + 25) = 0$

$x = 9 \bigvee x = -25$

Nilai x yang memenuhi permasalahan adalah $x = 9$. Oleh karena itu,

$t^2 = 15^2 - 9^2$

$t^2 = 144$

$t = 12$

Dengan demikian luas daerah $\Delta ABC = \frac{1}{2} \times (25) \times 12 = 150$.

2.3.3. Aplikasi 3

Selain seperti pada kedua aplikasi di atas, aplikasi teorema pythagoras dapat pula digunakan untuk menentukan apakah suatu segitiga itu lancip atau tumpul. Berikut ini uraian penjelasannya.

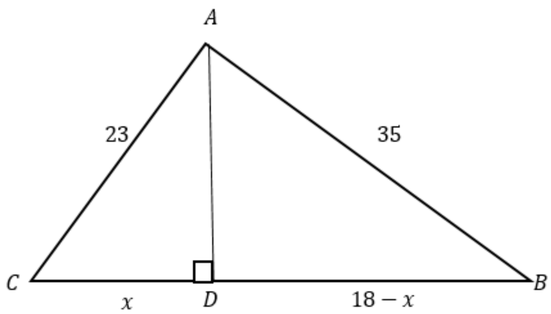
Diketahui ΔABC dengan $AB = 35, BC = 18$ dan $AC = 23$. Periksa apakah ΔABC lancip atau tumpul!

Jawab:

Proses pemeriksaan lancip atau tumpulnya suatu segitiga dapat dilakukan dengan menyelidiki apakah garis tinggi yang ditarik ke sisi terpendek berada di dalam segitiga atau diluar segitiga.

- Jika garis tinggi ke sisi terpendek berada di dalam segitiga maka segitiga tersebut lancip.
- Jika garis tinggi ke sisi terpendek berada di luar segitiga maka segitiga tersebut tumpul.

Sebagai upaya penyelidikan, kita konstruksikan ΔABC, dengan $\overline{AD}$ sebagai garis tinggi, $CD = x$.



Gambar 11. segitiga ABC

Dengan menerapkan teorema pythagoras pada ΔADC, maka:

$AD^2 = AC^2 - CD^2$
$AD^2 = 23^2 - x^2$

Dengan menerapkan teorema pythagoras pada ΔADB, maka:

$AD^2 = AB^2 - DB^2$
$AD^2 = 35^2 - (18 - x)^2$

Oleh karena itu, diperoleh:

$$23^2 - x^2 = 35^2 - (18 - x)^2$$
$$23^2 - x^2 = 35^2 - (18^2 - 36x + x^2)$$
$$23^2 - x^2 = 35^2 - 18^2 + 36x - x^2$$
$$23^2 - 35^2 + 18^2 = 36x$$
$$36x = -372$$
$$x = -\frac{372}{36}$$
$$x \approx -10{,}33$$

Oleh karena itu nilai $DB = 18 - (-10{,}33) = 28{,}33$. Nilai ini tidak sesuai keterangan dalam soal. Hal ini berarti $\overline{AD}$ seharusnya terletak di luar daerah ΔABC. Dengan demikian dapat disimpulkan ΔABC tumpul. Dengan mengikuti cara yang serupa dengan aplikasi 3, dapat ditunjukkan tiap pernyataan berikut (Jupri 2019):

- Pada sembarang segitiga dengan panjang sisi terpanjang c, dan panjang sisi-sisi lainnya adalah a dan b. Jika $a^2 + b^2 < c^2$, maka segitiga tersebut tumpul.
- Pada sembarang segitiga dengan panjang sisi terpanjang c, dan panjang sisi-sisi lainnya adalah a dan b. Jika $a^2 + b^2 > c^2$, maka segitiga tersebut lancip.

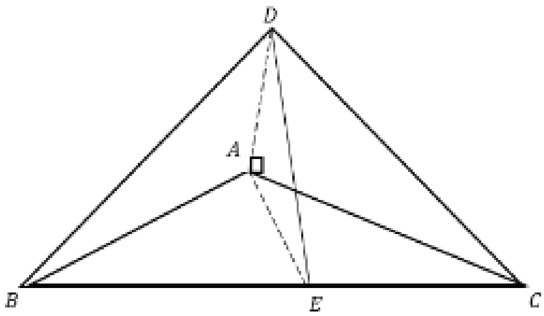
2. 4. Teorema Phytagoras dalam Ruang Dimensi Tiga

- Contoh 1

Teorema pythagoras dapat pula berlaku di dimensi tiga dengan bentuk yang serupa. Misalkan $D.ABC$ adalah bidang empat tegak, siku-siku di A, maka berlaku hubungan kuadrat luas bidang di hadapan titik A sama dengan jumlah kuadrat dari luas daerah tiga bidang tegak lainnya (Jupri, 2019). Dengan perkataan lain, $(Luas\ \Delta BCD)^2 = (Luas\ \Delta ABD)^2 + (Luas\ \Delta ADC)^2 + (luas\ \Delta ABC)^2$.

Bukti:

Perhatikan bidang empat tegak $D.ABC.$ siku-siku di A, pada Gambar di bawah ini! Dengan mengkonstruksikan $\overline{DE} \perp \overline{BC}$, titik E pada $\overline{BC}$, maka akan terbentuk segitiga siku-siku DAE.



Gambar 12. bidang empat tegak $D.ABC$

Berdasarkan teorema pythagoras pada bidang, untuk ΔDAE berlaku hubungan $DE^2 = AD^2 + AE^2$. Kedua ruas di kali $\frac{1}{4}BC^2$.

$$\frac{1}{4}BC^2 \times DE^2 = \frac{1}{4}BC^2(AD^2 + AE^2)$$
$$\frac{1}{4}BC^2 \times DE^2 = \left(\frac{1}{4}BC^2 \times AD^2\right) + \left(\frac{1}{4}BC^2 \times AE^2\right)$$
$$\frac{1}{4}BC^2 \times DE^2 = \left(\frac{1}{4}(AB^2 + AC^2) \times AD^2\right) + \left(\frac{1}{4}BC^2 \times AE^2\right)$$
$$\frac{1}{4}BC^2 \times DE^2 = \left(\frac{1}{4}AB^2 \times AD^2\right) + \left(\frac{1}{4}AC^2 \times AD^2\right) + \left(\frac{1}{4}BC^2 \times AE^2\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}BC \times DE\right)^2 = \left(\frac{1}{2}AB \times AD\right)^2 + \left(\frac{1}{2}AC \times AD\right)^2 + \left(\frac{1}{2}BC \times AE\right)^2$$

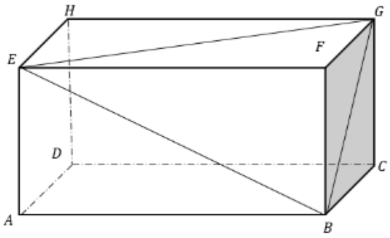
$$(Luas\ \Delta BCD)^2 = (Luas\ \ \Delta ABD)^2 + (Luas\ \ \Delta ADC)^2 + (Luas\ \ \Delta ABC)^2$$

- Contoh 2

Diketahui balok $ABCD.EFGH$, dengan $AB = 8, BC = 4$, dan $CG = 6$. Tentukan jarak titik F ke bidang BEG dengan menggunakan teorema Pythagoras di dimensi tiga!

Jawab:

Perhatikan gambar balok $ABCD.EFGH$ dan bidang BEG pada gambar berikut:



Gambar 13. balok $ABCD.EFGH$ dan bidang BEG

Pertama, kita tentukan terlebih dahulu volume bidang empat tegak (Limas) $F.BEG$ seperti berikut:

$$Volume\ Limas\ F.BEG = \frac{1}{3} \times Luas_{\Delta BEF} \times FG$$
$$Volume\ Limas\ F.BEG = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times BF \times FE \times FG$$
$$Volume\ Limas\ F.BEG = \frac{1}{6} \times 6 \times 8 \times 4$$

$$Volume\ Limas\ F.BEG = 32$$

Kedua, luas daerah ΔABC dapat ditentukan dengan menggunakan teorema Pythagoras di Demensi Tiga.

$$(Luas\ \Delta BEG)^2 = (Luas\ \ \Delta EFB)^2 + (Luas\ \ \Delta FBG)^2 + (Luas\ \ \Delta FGE)^2$$

$$(Luas\ \Delta BEG)^2 = \left(\frac{1}{2} \times EF \times FB\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \times FG \times FB\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \times EF \times FG\right)^2$$

$$(Luas\ \Delta BEG)^2 = \left(\frac{1}{2} \times 8 \times 6\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 6\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \times 8 \times 4\right)^2$$

$$(Luas\ \Delta BEG)^2 = 24^2 + 12^2 + 16^2$$

$$(Luas\ \Delta BEG)^2 = 976$$

$$Luas\ \Delta BEG = 4\sqrt{61}$$

Ketiga, jarak antara F ke bidang BEG sama dengan tinggi limas $F.BEG$ dengan bidang alasnya adalah bidang BEG.

$$Volume\ Limas\ F.BEG = \frac{1}{3} \times Luas_{\Delta BEG} \times jarak\ F\ ke\ BEG$$
$$jarak\ F\ ke\ BEG = \frac{3 \times Volume\ Limas\ F.BEG}{Luas_{\Delta BEG}}$$
$$jarak\ F\ ke\ BEG = \frac{3 \times 32}{4\sqrt{61}} = \frac{24}{\sqrt{61}}$$

3. Simpulan

Pembuktian-pembuktian yang telah dipaparkan menunjukkan bahwa teorema pythagoras dapat di aplikasikan di berbagai bidang geometri. Hal ini menyebabkan banyak ilmuan yang menjadikan teorema pythagoras sebagai dasar bagi penemuan-penemuan mereka. 3 bukti teorema pythagoras, 2 bukti konvers teorema pythagoras dan beberapa aplikasi teorema pythagoras hanyalah sebagian dari berbagai pembuktian dan aplikasi yang mungkin. Karenanya, pembaca dapat mengeksplorasi lebih jauh pembuktian dan pengaplikasian dengan cara-cara yang berbeda.

Daftar Pustaka

Creswell, J. W., & Creswell, J. D. (2017). Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches. Sage publications.

Euclid. (1908). *The Thirteen Books of The Elements Vol. (Books I and II)*. Cambridge: University Press.

Givental, A. (2006). The Pythagorean theorem: What is it about?. *The American Mathematical Monthly*, *113*(3), 261-265.

Molokach, J. 2010. *Calculus Proof of the Pythagorean Theorem*. (Online). (http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/CalculusProof.shtml).

Jupri, A. (2019). *Geometri Dengan Pembuktian Dan Pemecahan Masalah*. ed. Bumi Aksara. Bandung.

Maor, E. (2007). The Pythagorean Theorem: A 4.000-Year History. *Journal of Chemical Information and Modeling*. Oxford: Princeton University Press.

Moise, E. E. (1990). *Elementary Geometri from an Advanced Standpoint*. New York: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Sparks, J. C. (2013). The Pythagorean Theorem: Crown Jewel of Mathematics.

Strathern, P. (2009). *Pythagoras & His Theorem*. Arrow.

Shuttleworth, M. 2009. What is a Literature Review?. (*Online*). (https://explorable.com/what-is-a-literature-review, diakses 4 November 2020).

Veljan, D. (2000). The 2500-Year-Old Pythagorean Theorem. *Mathematics Magazine*, *73*(4): 259–272.