PRISMA 4 (2021): 621-627
PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika
https://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/prisma/
ISSN 2613-9189

Estimasi Parameter Model *Vector Autoregressive with Exogenous Generalized Space Time Autoregressive* (VARX-GSTAR)

Dwi Alifah Nurcahyani[a,*], Dewi Retno Sari Saputro[b]

[a, b] *Universitas Sebelas Maret, Surakarta 57126, Indonesia*

**Alamat Surel: dwialifahn@student.uns.ac.id*

Abstrak

Model dengan data *time series multivariat* yang dipengaruhi oleh variabel eksogen adalah model *Vector Autoregressive with Exogenous* (VARX). Pada model VARX, berdasarkan studi empiris diperoleh data *time series* yang dicatat secara bersamaan pada sejumlah lokasi dan menghasilkan data *time series* spasial (*space time*). Dengan demikian, *space time* merupakan data yang dipengaruhi oleh waktu dan keterkaitan antar lokasi amatan. Apabila lokasi amatan tersebut bersifat heterogen maka digunakan model *Generalized Space Time Autoregressive* (GSTAR). Jika model VARX dikonstruksi dengan memertimbangkan lokasi amatan yang heterogen maka model gabungannya menjadi model *Vector Autoregressive with Exogenous Generalized Space Time Autoregressive* (VARX-GSTAR). Pengkajian model VARX-GSTAR dan estimasi parameter pada model VARX-GSTAR menjadi tujuan dari penelitian ini. Metode *least square* (LS) atau kuadrat terkecil digunakan dalam estimasi parameter pada model VARX-GSTAR. Hasil kajian menunjukkan bahwa model VARX-GSTAR merupakan model VARX yang direpresentasikan ke dalam model GSTAR dengan menggunakan orde *autoregressive* p dari model VARX pada model GSTAR, serta dengan metode *least square* diperoleh estimasi parameter dengan asumsi orde *autoregressive* 1 dan orde spasialnya 1.

Kata kunci:

Time series, exogenous, autoregressive, space time, VARX, GSTAR, least square.

1. Pendahuluan

Menurut Box *et al.* (1994), data runtun waktu (*time series*) merupakan rangkaian pengamatan terhadap suatu peristiwa, kejadian atau variabel yang dicatat secara berurutan dalam rentang waktu tertentu. Salah satu model yang menggunakan data *time series multivariat* dipengaruhi oleh variabel eksogen adalah *Vector Autoregressive with Exogenous* (VARX). Model VARX ialah kasus baru atau variasi dari model VAR dengan adanya pelibatan variabel eksogen ke dalam model VAR. Dalam model ini variabel eksogen memengaruhi variabel endogen. Model VARX dinotasikan VARX(p,q) dengan p adalah orde variabel endogen atau *autoregressive* sedangkan q adalah orde variabel eksogen (Ocampo & Rodriguez, 2012).

Pada studi empiris, data *time series* memiliki kompleksitas seperti beberapa *time series* yang dicatat secara bersamaan pada sejumlah lokasi dan menghasilkan data *time series* spasial (*space time*). Dengan demikian, *space time* merupakan data yang dipengaruhi oleh waktu dan keterkaitan antar lokasi amatan. Pfiefer dan Deutsch pada tahun 1980 mengenalkan salah satu model *space time* yaitu model *Space Time Autoregressive* (STAR), kemudian pada tahun 2002 Borovkova mengenalkan model *Generalized Space Time Autoregressive* (GSTAR) sebagai model yang memerbaiki kelemahan dari model STAR. Model GSTAR dinotasikan GSTAR$(p,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p)$ dengan p merupakan orde *autoregressive* dan $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p$ merupakan orde spasial. Model STAR memiliki kelemahan pada asumsi parameter, hal ini yang menyebabkan kedua model tersebut berbeda. Lokasi amatan pada model GSTAR diasumsikan bersifat

To cite this article:
Nurcahyani, D. A., & Saputro, D. R. S. (2021). Estimasi Parameter Model *Vector Autoregressive with Exogenous Generalized Space Time Autoregressive* (VARX-GSTAR). *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika 4*, 621-627

heterogen, sedangkan pada model STAR diasumsikan homogen. Menurut Ruchjana, lokasi yang heterogen dapat dicirikan melalui karakteristik lokasi yang dikuantifikasi melalui matriks bobot lokasi (Masdin, Eni, & Lusiyanti, 2018).

Beberapa penelitian yang berkaitan dengan model ini telah dilakukan. Diantaranya, metode estimasi untuk model VARMAX (Spliid, 1983), pengembangan teori GSTAR-1D (Huang *et al.*, 2006), uji kausalitas *robust granger* pada VARX (Bauer & Maynard, 2006), model VAR-GSTAR pada peramalan deret waktu multivariat musiman (Wutsqa & Suhartono, 2010), pengkajian matriks bobot lokasi STAR (Suryamah *et al.*, 2013). Kemudian, perbandingan model AR, VAR, STAR, dan GSTAR pada peramalan (Wijaya *et al.*, 2015), model S-GSTAR-SUR untuk peramalan data temporal spasial musiman (Setiawan *et al.*, 2016), pengkajian model Sparse VARX dengan metode Kalman-Smoother (Su *et al.*, 2016).

Beberapa kajian penelitian yang telah dilakukan tersebut, Wutsqa & Suhartono (2010) hanya melibatkan variabel endogen ke dalam model. Dengan demikian, belum pernah dilakukan penelitian mengenai model data *time series multivariat* yang dipengaruhi variabel eksogen dengan mempertimbangkan keterkaitan lokasi amatan. Oleh karena itu, dalam penelitian ini dikaji model VARX-GSTAR dan estimasi parameter pada model tersebut.

2. Hasil dan Pembahasan

Pada pembahasan, dibahas model VARX, GSTAR, dan VARX-GSTAR, serta menurunkan ulang estimasi parameter pada model tersebut dengan metode *least square*.

2.1. Model VARX, GSTAR, dan VARX-GSTAR

Menurut Ocampo & Rodriguez (2012), model VARX(p,q) ditulis sebagai

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{a} + \phi_1 \mathbf{z}_{t-1} + \ldots + \phi_p \mathbf{z}_{t-p} + \theta_1 \mathbf{x}_{t-1} + \ldots + \theta_q \mathbf{x}_{t-q} + \varepsilon_t \tag{1}$$

dengan

$\mathbf{z}_{t-1}$: vektor berukuran $(m \times 1)$ berisi m variabel endogen pada waktu t dan $t-i$, $i = 1, 2, \ldots, p$

$\mathbf{a}$: vektor berukuran $(m \times 1)$ berisi konstanta

ϕ_i : matriks parameter variabel endogen berukuran $(m \times m)$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, p$

$\mathbf{x}_{t-j}$: vektor dari variabel eksogen pada waktu $t-j$, $j = 1, 2, \ldots, p$

θ_j : matriks parameter variabel eksogen berukuran $(m \times q)$ untuk setiap $j = 1, 2, \ldots, p$

ε_t : vektor *error* berukuran $(m \times 1)$

Menurut Box *et al.* (1994), model GSTAR ($p, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$) ditulis sebagai

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{s=1}^{p} \left[\phi_{s0} + \sum_{k=1}^{\lambda_s} \phi_{sk} W^{(k)} \right] \mathbf{z}(t-s) + \varepsilon(t) \tag{2}$$

dengan

$\mathbf{z}(t)$: vektor acak ukuran $(N \times 1)$ pada waktu t, yaitu $\mathbf{z}(t) = [\mathbf{z}_1(t)\mathbf{z}_2(t)\mathbf{z}_N(t)]$.

λ_s : orde spasial pada *autoregressive* ke-s

ϕ_{s0} : matriks parameter waktu $(s = 1, 2, \ldots, p)$ yang merupakan matriks diagonal $(\phi_{s0}{}^{(1)}, \ldots, \phi_{s0}{}^{(N)})$

ϕ_{sk} : matriks parameter spasial $(k = 1, 2, \ldots, \lambda_s)$ yang merupakan matriks diagonal $(\phi_{sk}{}^{(1)}, \ldots, \phi_{sk}{}^{(N)})$

$W^{(k)}$: matriks bobot ukuran $(N \times N)$ pada *lag* spasial ke-k

$\varepsilon(t)$: *white noise* dengan vektor *mean* 0 dan matriks *varian kovarian* $\sigma^2 I$

Model VARX-GSTAR merupakan model VARX yang direpresentasikan ke model GSTAR. Model VARX-GSTAR menggunakan orde *autoregressive* p dari model VARX pada model GSTAR.

2.2. Asumsi Model VARX-GSTAR

Asumsi model VARX-GSTAR yang harus dipenuhi adalah

- Stasioneritas
  Jika suatu *time series* konstan pada setiap waktu maka dapat dikatakan stasioner dalam rata-rata dan varian pada setiap *lag*. *Differencing* merupakan suatu langkah atau tahapan yang harus dilakukan untuk mengatasi data *time series* yang tidak stasioner dalam rata-rata, sementara itu jika tidak stasioner dalam varian, perlu dilakukan transformasi untuk mengatasi ketidakstasioneran tersebut (Wei, 2006). *Plot Matrix Autocorrelation Function* (MACF) dapat digunakan untuk mengidentifikasi kestasioneran data *time series* multivariat dalam rata-rata, sedangkan untuk mengidentifikasi kestasioneran data *time series* multivariat dalam varian dapat dilihat melalui *plot* Box-Cox.

  Menurut Wei (2006), korelasi silang sampel untuk data pengamatan ke-i dan ke-j pada *lag* waktu ditulis sebagai

$$\hat{\rho}_{ij}(k)=\frac{\sum_{t=1}^{n-k}(z_{i,t}-\bar{z}_i)(z_{j,t+k}-\bar{z}_j)}{\left[\sum_{t=1}^{n}(z_{i,t}-\bar{z}_i)^2\sum_{t=1}^{n}(z_{j,t}-\bar{z}_j)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{3}$$

  dengan $\bar{z}_i$ dan $\bar{z}_j$ merupakan rata-rata sampel dari komponen atau data pengamatan yang sepadan.

- Identifikasi Model
  Pada umumnya, pemilihan orde spasial pada model GSTAR dibatasi pada orde satu, hal ini disebabkan orde yang lebih besar daripada satu akan tidak mudah untuk diinterpretasikan (Wutsqa, 2012). *Akaike's Information Criterion* (AIC) digunakan untuk mengidentifikasi model VARX-GSTAR. Menurut Wei (2006), persamaan VAR dengan nilai AIC terkecil dipilih sebagai *lag* yang optimal. Perhitungan AIC ditulis sebagai $AIC(p)=\ln\left(\left|\hat{\Sigma}_p\right|\right)+\frac{2K^2p}{T}$ dengan $\hat{\Sigma}_p=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat{\mathbf{u}}_t[\hat{\mathbf{u}}_t]'$ adalah matriks penduga kovarian sisaan untuk model VAR (p), $\hat{\mathbf{u}}_t$ adalah residual pada waktu ke-t untuk model VAR (p), T merupakan banyaknya pengamatan, dan K adalah banyaknya parameter dalam model.
- Bobot Lokasi
  Permasalahan sederhana pada konstruksi model GSTAR yaitu pemilihan dan penentuan bobot lokasi. Pemilihan bobot lokasi pada model GSTAR menggunakan bobot lokasi normalisasi korelasi silang. Perhitungan bobot lokasi normalisasi korelasi silang diselesaikan dengan menormalisasikan korelasi silang antara satu lokasi dengan lokasi yang lainnya pada *lag* yang sesuai.

  Korelasi silang kedua lokasi pada *lag* ke-k, $corr\left[Z_i(t),Z_j(t-k)\right]$ ditulis sebagai $\rho_{ij}(k)=\frac{\gamma_{ij}(k)}{\sigma_i\sigma_j}, k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$ dengan $\gamma_{ij}(k)$ adalah kovarian silang antara kedua pengamatan pada *lag* ke-k, σ_i dan σ_j adalah standar deviasi dari kedua pengamatan. Penentuan bobot lokasi ini harus memenuhi

  $W_{ij}=\frac{\hat{\rho}_{ij}(1)}{\sum_{k\neq 1}\left|\hat{\rho}_{ik}(1)\right|}; i\neq j\wedge\sum_{j\neq i}\left|W_{ij}\right|=1$ dengan $\hat{\rho}_{ij}(k)$ seperti pada Persamaan (3).

  Hubungan antar lokasi ditimbulkan dari bobot lokasi. Bobot lokasi ini memberikan besar dan tanda hubungan antar lokasi berlainan yang bersifat fleksibel (Suhartono & Subanar, 2007).

2.3. Estimasi Parameter dengan Estimasi Parameter Least Square

Least square (kuadrat terkecil) digunakan sebagai metode untuk estimasi parameter pada model VARX-GSTAR. Menurut Gujarati dalam Deria *et al.* (2020), metode *least square* merupakan metode estimasi parameter yang meminimumkan jumlah kuadrat sisaan (residual). Prinsip metode *least square* yaitu mengkuadratkan *error* agar didapatkan *error* yang minimum.

- Model VARX
  Metode *least square* digunakan dalam estimasi parameter β pada model VARX. Diasumsikan terbentuk model VARX (1,1), sehingga persamaan modelnya dapat ditulis sebagai $\mathbf{z}_t=\phi_1\mathbf{z}_{t-1}+\theta_1\mathbf{x}_{t-1}+\varepsilon_t$ dengan $\varepsilon_t\sim N(0,\sigma^2)$.

  Persamaan (1) dinyatakan dalam matriks sebagai

$$\begin{bmatrix} Z_{1t} \\ Z_{2t} \\ \vdots \\ Z_{Kt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{11(1)} & \phi_{12(1)} & \cdots & \phi_{1K(1)} \\ \phi_{21(1)} & \phi_{22(1)} & \cdots & \phi_{2K(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{K1(1)} & \phi_{K2(1)} & \cdots & \phi_{KK(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{1t-1} \\ Z_{2t-1} \\ \vdots \\ Z_{Kt-1} \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} \phi_{11(p)} & \phi_{12(p)} & \cdots & \phi_{1K(p)} \\ \phi_{21(p)} & \phi_{22(p)} & \cdots & \phi_{2K(p)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{K1(p)} & \phi_{K2(p)} & \cdots & \phi_{KK(p)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{1t-p} \\ Z_{2t-p} \\ \vdots \\ Z_{Kt-p} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \theta_{11(1)} & \theta_{12(1)} & \cdots & \theta_{1T(1)} \\ \theta_{21(1)} & \theta_{22(1)} & \cdots & \theta_{2T(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{T1(1)} & \theta_{T2(1)} & \cdots & \theta_{TT(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1t-1} \\ X_{2t-1} \\ \vdots \\ X_{Tt-1} \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} \theta_{11(q)} & \theta_{12(q)} & \cdots & \theta_{1T(q)} \\ \theta_{21(q)} & \theta_{22(q)} & \cdots & \theta_{2T(q)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{T1(q)} & \theta_{T2(q)} & \cdots & \theta_{TT(q)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1t-q} \\ X_{2t-q} \\ \vdots \\ X_{Tt-q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{Kt} \end{bmatrix}$$

Model untuk pengamatan ke-i dinyatakan sebagai $\mathbf{Z}_i = \mathbf{Z}_i^* \beta + \varepsilon$. Menurut Ocampo & Rodriguez (2012), persamaan model VARX untuk n pengamatan dinyatakan sebagai

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^* \beta + \varepsilon \tag{4}$$

sehingga dalam matriks sebagai

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z_{1-1} & \cdots & z_{1-p} & z_{1-1} & \cdots & z_{1-q} \\ 1 & z_{2-1} & \cdots & z_{2-p} & z_{2-1} & \cdots & z_{2-q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_{n-1} & \cdots & z_{n-p} & z_{n-1} & \cdots & z_{n-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_p \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

dengan

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}, \mathbf{Z}^* = \begin{bmatrix} 1 & z_{1-1} & \cdots & z_{1-p} & z_{1-1} & \cdots & z_{1-q} \\ 1 & z_{2-1} & \cdots & z_{2-p} & z_{2-1} & \cdots & z_{2-q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_{n-1} & \cdots & z_{n-p} & z_{n-1} & \cdots & z_{n-q} \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} a \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_p \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_q \end{bmatrix}, \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan definisi menurut Gujarati dalam Deria *et al.* (2020), berdasarkan Persamaan (4) diperoleh $\varepsilon = \mathbf{Z} - \mathbf{Z}^* \beta$ sehingga jumlah kuadrat sisaan model dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} \varepsilon' \varepsilon &= (\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^* \beta)' (\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^* \beta) \\ &= \mathbf{Z}'\mathbf{Z} - \mathbf{Z}'\mathbf{Z}^* \beta - \beta' \mathbf{Z}^{*}\mathbf{Z} + \beta' \mathbf{Z}^{*'} \mathbf{Z}^* \beta \\ &= \mathbf{Z}'\mathbf{Z} - 2\beta \mathbf{Z}^* \mathbf{Z} + \beta' \mathbf{Z}^{*'} \mathbf{Z}^* \beta . \end{aligned}$$

Berdasarkan definisi metode *least square* yang telah disebutkan, langkah selanjutnya yaitu meminimumkan jumlah kuadrat sisaan. Untuk memperoleh nilai minimum dari jumlah kuadrat sisaan dilakukan perhitungan berikut.

$$\frac{\partial \varepsilon' \varepsilon}{\partial \beta} = -2\beta' \mathbf{Z}^* \mathbf{Z} + \beta' \mathbf{Z}^{*'} \mathbf{Z}^* \beta$$

$$0 = -2\beta' \mathbf{Z}^* \mathbf{Z} + \beta' \mathbf{Z}^{*'} \mathbf{Z}^* \beta$$

$$\hat{\beta} = \left(\mathbf{Z}^{*'} \mathbf{Z}^*\right)^{-1} \left(\mathbf{Z}^{*'} \mathbf{Z}\right) \tag{5}$$

Dengan demikian, diperoleh estimasi parameter pada model VARX seperti pada Persamaan (5).

- Model GSTAR

Metode *least square* (kuadrat terkecil) digunakan dalam estimasi parameter ϕ pada model GSTAR. Prinsip metode *least square.* Model GSTAR memiliki $Z_i(t)$ yang menyatakan pengamatan pada $t = 0,1,2,\ldots,T$, dengan lokasi $i = 0,1,2,\ldots,N$. Model GSTAR dengan orde *autoregressive* $p = 1$ dan spasial 1 dinyatakan $\phi_{ki} = \phi_{1k}{}^{(i)}$ untuk $k = 0,1$ ditulis sebagai

$$z_i(t) = \phi_{10}{}^{(i)} Z_i(t-1) + \phi_{11}{}^{(i)} \sum_{j=1}^{N} W_{ij} Z_j(t-1) + \varepsilon_i(t)$$

Persamaan (2) dinyatakan dalam matriks sebagai

$$\begin{bmatrix} Z_1(1) \\ \vdots \\ Z_1(T) \\ \vdots \\ Z_N(1) \\ \vdots \\ Z_N(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{s0}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{s0}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{s0}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi_{s0}^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{s0}^5 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{s0}^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1(T-s) \\ \vdots \\ Z_2(T-s) \\ \vdots \\ Z_3(T-s) \\ \vdots \\ Z_N(T-s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{sk}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{sk}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{sk}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi_{sk}^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{sk}^5 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{sk}^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & w_{12}(s) & w_{13}(s) & \cdots & w_{1N}(s) \\ w_{21}(s) & 0 & w_{23}(s) & \cdots & w_{2N}(s) \\ w_{31}(s) & w_{32}(s) & 0 & \cdots & w_{3N}(s) \\ w_{41}(s) & w_{42}(s) & w_{43}(s) & \cdots & w_{4N}(s) \\ w_{51}(s) & w_{52}(s) & w_{53}(s) & \ddots & w_{5N}(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ w_{N1}(s) & w_{N2}(s) & w_{N3}(s) & w_{N4}(s) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Z_1(T-s) \\ \vdots \\ Z_2(T-s) \\ \vdots \\ Z_3(T-s) \\ \vdots \\ Z_N(T-s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1(T) \\ \vdots \\ \varepsilon_2(T) \\ \vdots \\ \varepsilon_3(T) \\ \vdots \\ \varepsilon_N(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{s0}^1 Z_1(T-s) \\ \phi_{s0}^2 Z_2(T-s) \\ \phi_{s0}^3 Z_3(T-s) \\ \phi_{s0}^4 Z_4(T-s) \\ \phi_{s0}^5 Z_5(T-s) \\ \vdots \\ \phi_{s0}^N Z_N(T-s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{sk}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{sk}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{sk}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi_{sk}^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{sk}^5 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{sk}^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{12}(s)Z_2(T-s)+\cdots+w_{1N}(s)Z_N(T-s) \\ w_{21}(s)Z_1(T-s)+\cdots+w_{2N}(s)Z_N(T-s) \\ w_{31}(s)Z_1(T-s)+\cdots+w_{3N}(s)Z_N(T-s) \\ w_{41}(s)Z_1(T-s)+\cdots+w_{4N}(s)Z_N(T-s) \\ w_{51}(s)Z_1(T-s)+\cdots+w_{5N}(s)Z_N(T-s) \\ \vdots \\ w_{N1}(s)Z_1(T-s)+\cdots+w_{NN}(s)Z_N(T-s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1(T) \\ \vdots \\ \varepsilon_2(T) \\ \vdots \\ \varepsilon_3(T) \\ \vdots \\ \varepsilon_N(T) \end{bmatrix}$$

dengan $V_i(t) = \sum_{j=1}^{N} W_{ij} Z_j(t)$ sehingga matriks model GSTAR ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} Z_1(1) \\ \vdots \\ Z_1(T) \\ \vdots \\ Z_N(1) \\ \vdots \\ Z_N(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{s0}^1 Z_1(T-s) \\ \phi_{s0}^2 Z_2(T-s) \\ \phi_{s0}^3 Z_3(T-s) \\ \phi_{s0}^4 Z_4(T-s) \\ \phi_{s0}^5 Z_5(T-s) \\ \vdots \\ \phi_{s0}^N Z_N(T-s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{sk}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{sk}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{sk}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi_{sk}^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{sk}^5 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{sk}^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(T-s) \\ \vdots \\ V_2(T-s) \\ \vdots \\ V_3(T-s) \\ \vdots \\ V_N(T-s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1(T) \\ \vdots \\ \varepsilon_2(T) \\ \vdots \\ \varepsilon_3(T) \\ \vdots \\ \varepsilon_N(T) \end{bmatrix}$$

Model untuk pengamatan ke-i ditulis sebagai $\mathbf{Z}_i = \mathbf{Z}_i^* \phi + \varepsilon$ sehingga masing-masing lokasi dapat mengestimasi parameter ϕ secara terpisah. Persamaan model GSTAR untuk semua lokasi ditulis sebagai

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^* \phi + \varepsilon \tag{6}$$

sehingga dalam matriks ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} Z_1(1) \\ Z_1(2) \\ \vdots \\ Z_1(T) \\ \vdots \\ Z_N(1) \\ Z_N(2) \\ \vdots \\ Z_N(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1(T-s) & \cdots & V_1(T-s) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ Z_1(T-s) & \cdots & V_1(T-s) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_1(T-s) & \cdots & V_1(T-s) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & Z_N(T-s) & \cdots & V_N(T-s) \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & Z_N(T-s) & \cdots & V_N(T-s) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & Z_N(T-s) & \cdots & V_N(T-s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{s0}^1 \\ \phi_{s0}^2 \\ \vdots \\ \phi_{s0}^N \\ \vdots \\ \phi_{sk}^1 \\ \phi_{sk}^2 \\ \vdots \\ \phi_{sk}^N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1(1) \\ \varepsilon_1(2) \\ \vdots \\ \varepsilon_1(T) \\ \vdots \\ \varepsilon_2(1) \\ \varepsilon_2(2) \\ \vdots \\ \varepsilon_N(T) \end{bmatrix}$$

dengan

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} Z_1(1) \\ Z_1(2) \\ \vdots \\ Z_1(T) \\ \vdots \\ Z_N(1) \\ Z_N(2) \\ \vdots \\ Z_N(T) \end{bmatrix}, \mathbf{z}^* = \begin{bmatrix} Z_1(T-s) & \cdots & V_1(T-s) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ Z_1(T-s) & \cdots & V_1(T-s) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_1(T-s) & \cdots & V_1(T-s) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & Z_N(T-s) & \cdots & V_N(T-s) \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & Z_N(T-s) & \cdots & V_N(T-s) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & Z_N(T-s) & \cdots & V_N(T-s) \end{bmatrix}, \phi = \begin{bmatrix} \phi_{s0}^1 \\ \phi_{s0}^2 \\ \vdots \\ \phi_{s0}^N \\ \vdots \\ \phi_{sk}^1 \\ \phi_{sk}^2 \\ \vdots \\ \phi_{sk}^N \end{bmatrix}, \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1(1) \\ \varepsilon_1(2) \\ \vdots \\ \varepsilon_1(T) \\ \vdots \\ \varepsilon_2(1) \\ \varepsilon_2(2) \\ \vdots \\ \varepsilon_N(T) \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan definisi menurut Gujarati dalam Deria *et al.* (2020), berdasarkan Persamaan (6) diperoleh $\varepsilon = \mathbf{Z} - \mathbf{Z}^* \phi$ sehingga jumlah kuadrat sisaan model dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} \varepsilon^{'} \varepsilon &= (\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^* \phi)^{'} (\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^* \phi) \\ &= \mathbf{Z}^{'}\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^{'}\mathbf{Z}^* \phi - \phi^{'}\mathbf{Z}^* \mathbf{Z} + \phi^{'}\mathbf{Z}^{*'}\mathbf{Z}^* \phi \\ &= \mathbf{Z}^{'}\mathbf{Z} - 2\phi \mathbf{Z}^* \mathbf{Z} + \phi^{'}\mathbf{Z}^{*'}\mathbf{Z}^* \phi \,. \end{aligned}$$

Berdasarkan definisi metode *least square* yang telah disebutkan, langkah selanjutnya yaitu meminimumkan jumlah kuadrat sisaan. Untuk memperoleh nilai minimum dari jumlah kuadrat sisaan dilakukan perhitungan berikut.

$$\frac{\partial \varepsilon^{'} \varepsilon}{\partial \phi} = -2\phi^{'}\mathbf{Z}^* \mathbf{Z} + \phi^{'}\mathbf{Z}^{*'}\mathbf{Z}^* \phi$$

$$0=-2\phi' \mathbf{Z}^{*}\mathbf{Z}+\phi' \mathbf{Z}^{*'}\mathbf{Z}^{*}\phi$$

$$\hat{\phi}=\left(\mathbf{Z}^{*'}\mathbf{Z}^{*}\right)^{-1}\left(\mathbf{Z}^{*'}\mathbf{Z}\right) \quad (7)$$

Dengan demikian, diperoleh estimasi parameter pada model GSTAR seperti pada Persamaan (7).

3. Simpulan

Berdasarkan pembahasan diperoleh dua simpulan berikut. Model VARX-GSTAR menggunakan data *time series multivariat* yang dipengaruhi variabel eksogen dengan memertimbangkan keterkaitan antara satu lokasi dengan lokasi yang lain. Model VARX-GSTAR merupakan model VARX yang direpresentasikan ke dalam model GSTAR dengan menggunakan orde *autoregressive p* dari model VARX pada model GSTAR. Model VARX(p, q) ditulis pada Persamaan (1), kemudian model GSTAR $(p, \lambda_{1,} \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ dalam notasi matriks ditulis pada Persamaan (2) dengan asumsi stasioneritas, identifikasi model, dan bobot lokasi.

Estimasi parameter pada model VARX-GSTAR menggunakan metode *least square*. Metode *least square* merupakan metode dengan mengkuadratkan *error* agar didapatkan *error* yang minimum. Estimasi parameter untuk asumsi VARX (1,1) seperti pada Persamaan (5), kemudian estimasi parameter untuk model GSTAR dengan orde *autoregressive* 1 dan orde spasialnya 1 seperti pada Persamaan (7).

Daftar Pustaka

Bauer, D., & Maynard, A. (2006). *Robust Granger Causality Tests in the VARX Framework*. 1–37.

Box, G. E. P., Jenkins, G. M., dan Reinsel G. C. (1994). *Time Series Analysis: Forecasting and Control. Third Edition.* Englewood Cliffs: Prentice Hall.

Deria, A. D., Hoyyi, A., & Mustafid, M. (2020). Regresi Robust Estimasi-M Dengan Pembobot Andrew, Pembobot Ramsay Dan Pembobot Welsch Menggunakan Software R. *Jurnal Gaussian*, *8*(3), 377-388.

Huang, J. V., Greimann, B. P., & Bauer, T. (2006). Development and application of GSTAR-1D. In *Proceedings of the eighth Federal Interagency Sedimentation Conference (8th FISC), Reno, NV, USA*.

Masdin, M. A., Eni, N., & Lusiyanti, D. (2018). Peramalan Menggunakan Model Generalized Space Time Autoregressive (GSTAR) untuk Indeks Harga Konsumen 4 Kota di Provinsi Sulawesi Selatan. *Jurnal Matematika Integratif*, *14*(1), 39-49.

Ocampo, S., & Rodríguez, N. (2012). An introductory review of a structural VAR-X estimation and applications. *Revista Colombiana de Estadística*, *35*(3), 479-508.

Su, D., Oba, S., Koyama, M., Fujii, M., Kuroda, S., & Ishii, S. (2016). Sparse VARX model with Kalman-Smoother for metabolomics. *IPSJ SIG Technical Report*, *2016*(8), 1–6.

Setiawan, Suhartono, & Prastuti, M. (2016). S-GSTAR-SUR model for seasonal spatio temporal data forecasting. *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*, *10*, 53–65.

Spliid, H. (1983). A fast estimation method for the vector autoregressive moving average model with exogenous variables. *Journal of the American Statistical Association*, *78*(384), 843–849.

Suhartono, S., & Subanar, S. (2007). Some Comments on the Theorem Providing Stationarity Condition for Gstar Models in the Paper by Borovkova Et Al. *Jurnal of The Indonesian Mathematical Society*, *13*(1), 115-121.

Suryamah, E., Ruchjana, B. N., & Joebaedi, K. (2013). Kajian Matriks Bobot Lokasi Model Space Time Autoregresi (STAR). *Jurnal Matematika Integratif*, *9*(2), 119.

Wei, W. W. (2006). Time series analysis. In *The Oxford Handbook of Quantitative Methods in Psychology: Vol. 2*.

Wijaya, F. B., Sumertajaya, I. M., & Erfiani. (2015). Comparison of Autoregressive (AR), Vector Autoregressive (VAR), Space Time Autoregressive (STAR), and Generalized Space Time Autoregressive (GSTAR) in forecasting (Case: Simulation study with autoregressive pattern). *International Journal of Applied Engineering Research*, *10*(21), 42388–42395.

Wutsqa, D. U., & Suhartono. (2010). Peramalan Deret Waktu Multivariat Seasonal pada Data Pariwisata dengan Model Var-Gstar. *Jurnal Ilmu Dasar*, *11*(1), 101–109.

Wutsqa, D. U., Suhartono, S., & Sutijo, B. (2012). Aplikasi Model Generalized Space Time Autoregressive Pada Data Pencemaran Udara Di Kota Surabaya. *Pythagoras: Jurnal Pendidikan Matematika*, *7*(2).