PRISMA 4 (2021): 635-639
PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika
https://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/prisma/
ISSN 2613-9189

Estimasi Parameter Model *Robust Multivariate Exponential Smoothing* dengan *Minimum Covariance Determinant*

Fidya Nur Aini Gunawan[a,*], Dewi Retno Sari Saputro[b]

[a, b] *Universitas Sebelas Maret, Surakarta 57126, Indonesia*

* *Alamat Surel: fidya.n_aini@student.uns.ac.id*

Abstrak

Peramalan muncul karena adanya waktu senjang (*timelag*) antara kesadaran akan peristiwa atau kebutuhan mendatang dengan peristiwa itu sendiri. Model peramalan deret waktu yang populer adalah *Autoregressive* (AR), *Moving Average* (MA), *Simple Exponential Smoothing* (SES), dan *Autoregressive Integrated Moving Average* (ARIMA). Model dengan data *deret waktu* multivariat yang populer digunakan untuk melaksanakan proses tersebut adalah model *multivariate exponential smoothing*. Model tersebut belum tangguh apabila terdapat data *pencilan* sehingga diperlukan model yang kekar terhadap data tersebut yakni *robust multivariate exponential smoothing*. Bentuk *robust multivariate* diperoleh dari penggantian bentuk multivariat klasik dengan bentuk *multivariate cleaned* yang bergantung pada estimasi matriks kovarian dari *error* satu langkah periode tertentu. Namun, estimasi matriks *error* satu langkah tetap rentan terhadap pencilan apabila rangkaian pengamatan mengandung pencilan. Tujuan penelitian ini mengestimasi parameter model dengan *Minimum Covariance Determinant* (MCD) sehingga diperoleh model *multivariate exponential smoothing* yang *robust* terhadap pencilan. Metode dalam penelitian yang digunakan adalah studi literatur yang diperoleh dari beberapa artikel, jurnal, dan buku yang mendukung dalam mencapai tujuan penelitian. Hasil kajian diperoleh model *robust multivariate exponential smoothing* dengan estimasi parameter MCD.

Kata kunci:

Multivariate exponential smoothing, *robust*, *minimum covariance determinant*, pencilan.

1. Pendahuluan

Amatan deret waktu dalam beberapa studi empiris seringkali terdiri dari pengamatan beberapa variabel atau dikenal dengan deret waktu multivariat. Deret waktu multivariat dapat dimodelkan dalam berbagai model peramalan untuk mendapat hasil yang mungkin. Model untuk meramalkan deret waktu multivariat yang paling populer adalah model *exponential smoothing*. Pada awalnya model *exponential smoothing* digunakan untuk amatan univariat, namun model tersebut dikembangkan sehingga dapat digunakan untuk data deret waktu multivariat. Model *exponential smoothing* untuk data deret waktu multivariat dinamakan model *multivariate exponential smoothing*. Model *Multivariate Exponential Smoothing* (MES) pertama kali dikenalkan pada tahun 1966 oleh Jones dengan berdasar model Kalman dan matriks terboboti yang selanjutnya dikembangkan oleh Pfefferman dan Allon (1989).

Model MES memiliki kelemahan tidak kekar terhadap pencilan yang dapat memengaruhi estimasi parameter dan peramalan (Koehler, 2012). Model yang dapat digunakan untuk mengatasi pencilan adalah model *robust* (Andrews, 1972). Model *robust* dari MES merupakan pengembangan dari model *robust exponential smoothing*. Pada tahun 1992 oleh Cipra, model *robust exponential smoothing* menggunakan estimasi parameter *M* yang kemudian oleh Gelper *et al.* (2010) model tersebut dikembangkan dengan mekanisme *pre-cleaning* untuk mengidentifikasi dan pembobotan pada pencilan.

Model *robust* untuk MES diperkenalkan sebagai model *Robust Multivariate Exponential Smoothing* oleh Croux *et al.* (2010). Model tersebut menggunakan model *multivariate cleaned* yakni model *multivariate* setelah dilakukan *cleaning* sebagai pengganti dari model multivariat klasik yang bergantung

To cite this article:
Gunawan, F. N. A., & Saputro, D. R. S. (2021). Estimasi parameter Model *Robust Multivariate Exponential Smoothing* dengan *Minimum Covariance Determinant*. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika 4*, 635-639

pada estimasi matriks kovarian dari *error* peramalan. Pada penelitian ini dilakukan kajian tentang model *robust multivariate exponential smoothing* dan estimasi parameter dengan *Minimum Covariance Determinant* (MCD).

2. Pembahasan

Model *robust exponential smoothing* merupakan salah satu model *smoothing* data deret waktu yang kekar terhadap pencilan. Pencilan pada suatu data dapat memengaruhi keakuratan model dalam meramalkan suatu kejadian (Affandi, 2020). Begitu pula jika pencilan tersebut merupakan pencilan multivariat. Pada deret waktu multivariat, pencilan pada satu variabel akan memengaruhi *smoothing* variabel lainnya. Model *robust exponential smoothing* tidak dapat mengatasi pencilan tesebut. Pada pembahasan, dikaji tentang model *Multivariate Exponential Smoothing* (MES), model *Robust Multivariate Exponential Smoothing* (RMES), menentukan estimasi skala multivariat, dan mengestimasi parameter model RMES menggunakan *Minimum Covariance Determinant* (MCD).

2.1 Model Multivariate Exponential Smoothing

Model *exponential smoothing* merupakan model *smoothing* dengan prosedur perbaikan terus menerus pada peramalan terhadap objek pengamatan terbaru (Makridakis, 1999). Model peramalan ini menitik beratkan pada penurunan prioritas secara eksponensial pada objek pengamatan yang lama Model MES adalah model *exponential smoothing* yang digunakan untuk data deret waktu multivariat. Model MES untuk deret waktu multivariat $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_T$ ditulis sebagai

$$\mathbf{y}_t^* = \mathbf{Q}\mathbf{y}_t + (\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{y}_{t-1}^* \tag{1}$$

untuk waktu $t = 2,...,T$ dengan $\mathbf{Q}$ adalah matriks parameter *smoothing* dengan ordo $p \times p$. Matriks $\mathbf{Q}$ dipilih dengan meminimalkan determinan matriks kovarian dari *error* peramalan. Sebagai penyederhanaan lebih lanjut, diasumsikan bahwa matriks tersebut adalah matriks simetris. Dalam amatan multivariat diperlukan $\mathbf{Q}$ yang ditulis sebagai

$$\mathbf{Q}_{opt} = \underset{\mathbf{Q} \in S_1(p)}{\arg\min} \det Cov(R) \tag{2}$$

dengan $S_1(p)$ adalah himpunan matriks simetris $p \times p$ dengan semua nilai eigen pada interval [0,1] dan $R := \{\mathbf{r}_{m+1}, \ldots, \mathbf{r}_T\}$ merupakan himpunan *error*.

2.2 Model Robust Multivariate Exponential Smoothing

Model MES tidak kekar terhadap pencilan sehingga digunakan model yang *robust* terhadap pencilan. Model *robust exponential smoothing* merupakan model *exponential smoothing* yang berdasarkan pendekatan estimasi M pada regresi terboboti (Cipra & Hanzak, 2011). Model tersebut dikembangkan menjadi model yang dapat digunakan untuk data deret waktu multivariat dengan berdasar pada mekanisme *pre-cleaning* untuk mengidentifikasi dan memberi bobot pada pencilan. Mekanisme tersebut juga berguna untuk menghindari efek pencilan yang berpengaruh pada variabel amatan lainnya. Model multivariat berdasarkan mekanisme hasil *pre-cleaning* adalah model *multivariate cleaned.*

Model *multivariate cleaned* $\mathbf{y}_t^{**}$ digunakan sebagai pengganti variabel multivariat klasik $\mathbf{y}_t$ pada persamaan (1) untuk setiap t sehingga diperoleh model MES yang *robust* yakni model RMES dengan persamaan rekursifnya ditulis sebagai

$$\mathbf{y}_t^* = \mathbf{Q}\mathbf{y}_t^{**} + (\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{y}_{t-1}^*.$$

Model *multivariate cleaned* $\mathbf{y}_t^{**}$ diperoleh berdasarkan asumsi nilai *smoothing* dari $\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_{t-1}$ yang sudah ditentukan dan nilai *error* peramalan $\mathbf{r}_t = \mathbf{y}_t - \mathbf{y}^*_{t|t-1}$ yang merupakan vektor dengan panjang *p* untuk $t = 2,\ldots,T$ sehingga model tersebut oleh Croux *et al.* (2010) ditulis sebagai

$$\mathbf{y}_t^{**} = \frac{\psi_k\left(\sqrt{\mathbf{r}_t'\hat{\mathbf{\Sigma}}_t^{-1}\mathbf{r}_t}\right)}{\sqrt{\mathbf{r}_t'\hat{\mathbf{\Sigma}}_t^{-1}\mathbf{r}_t}}\mathbf{r}_t + \mathbf{y}^{**}_{t|t-1} \tag{3}$$

dengan $\psi_k = \min\ (k, \max(x,k))$ merupakan fungsi Huber ψ dengan nilai batas *k* dan $\hat{\mathbf{\Sigma}}_t$ adalah estimasi skala multivariat yang dapat berpengaruh dalam pendeteksian pencilan.

Model *multivariated cleaned* didasarkan pada pendekatan fungsi Huber ψ yang dapat mengurangi pengaruh pencilan dalam perhitungan. Fungsi Huber ψ didefinisikan sebagai

$$\psi(y_t) = \begin{cases} y_t, & \text{jika} \left|y_t\right| < k \\ sign(y_t)k, & \text{lainnya} \end{cases}.$$

Fungsi Huber ψ diinterpretasikan sebagai pengidentifikasian, pemberian bobot yang kecil untuk pencilan yang bernilai besar, dan penggantian nilai yang tidak terduga dengan nilai yang mungkin. Jika nilai k cenderung tak hingga, maka $\mathbf{y}_t^{**} = \mathbf{y}_t$ sehingga model *cleaned* tidak digunakan dan model tersebut direduksi menjadi model klasik (Gelper *et al.,* 2010).

2.3 Estimasi skala multivariat

Model RMES bergantung pada suatu estimasi skala multivariat yang diperlukan untuk menghitung jarak Mahalanobis dalam mendeteksi pencilan. Suatu amatan dikatakan pencilan apabila jarak Mahalanobis antara *error* peramalan dan nol sangat besar. Estimasi skala multivariat merupakan matriks kovarian terestimasi dari *error* peramalan pada waktu *t* yang menjadi dasar pemilihan matriks parameter *smoothing.*

Skala univariat yang dikembangkan oleh Cipra (1992) menjadi dasar Croux *et al.* (2010) mendefinisikan persamaan rekursif estimasi skala multivariat yang ditulis sebagai

$$\hat{\mathbf{\Sigma}}_t = \lambda_\sigma \frac{\rho_{c,p}\left(\sqrt{\mathbf{r}_t'\hat{\mathbf{\Sigma}}_{t-1}^{-1}\mathbf{r}_t}\right)}{\mathbf{r}_t'\hat{\mathbf{\Sigma}}_{t-1}^{-1}\mathbf{r}_t}\mathbf{r}_t\mathbf{r}_t' + \left(1-\lambda_\sigma\right)\hat{\mathbf{\Sigma}}_{t-1}$$

dengan λ_σ adalah konstanta *smoothing* yang dipilih antara 0 dan 1 serta $\rho_{c,p}$ adalah fungsi ρ *biweight* dengan *tunning constant* c yang didefinisikan oleh Maronna *et al.* (2006) sebagai

$$\rho_{c,p}\left(y_t\right) = \begin{cases} \gamma_{c,p}(1-(1-({}^{y_t}\!/_{c})^2)^3), & \text{jika } \left|y_t\right| \le c \\ \gamma_{c,p}, & \text{untuk } y_t \text{ lainnya} \end{cases} \tag{4}$$

dengan $\gamma_{c,p}$ dipilih seperti $E[\rho_{c,p}(\|X\|)] = p$ dengan X berdistribusi normal *p-variate*. Fungsi ρ merupakan fungsi objektif terbatas sehingga nilai *error* peramalan yang besar tidak berpengaruh pada estimasi lokal skala multivariat.

2.4 Matriks Parameter Smoothing dengan MCD

Matriks parameter *smoothing* berpengaruh pada hasil akhir model MES dan RMES. Pada model MES, matriks parameter *smoothing* seperti pada persamaan (2) bergantung pada penduga matriks kovarian dari *error* peramalan yang dipilih sama dengan sampel matriks kovarian dengan rata–rata nol yang ditulis sebagai

$$Cov(R) = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}(R) = \frac{1}{T-m}\sum_{t=m+1}^{T} \mathbf{r}_t \mathbf{r}_t' \tag{5}$$

dengan m adalah periode awal m pengamatan.

Matriks tersebut dipilih sedemikian rupa sehingga fungsi ρ dari *error* seperti pada persamaan (4) dapat minimal. Namun, *error* pada peramalan akan tetap mengandung pencilan ketika pengamatan memiliki pencilan, sehingga digunakan estimasi *robust* dari matriks kovarian pada persamaan (5) yaitu MCD (Rousseeuw & Van Driessen, 1999). Matriks parameter *smoothing* pada model RMES dipilih dengan meminimalkan matriks kovarian dengan penduga MCD.

Langkah – langkah dalam mengestimasi matriks kovarian dengan MCD adalah

- Diambil sejumlah h pengamatan secara acak dengan $1 \leq h \leq T-m$. Dari h pengamatan akan dihasilkan L^h sub sampel yang ditulis sebagai

  $$L^h = \{A \subset R \mid \# A = h\} \subset 2^h.$$

  Pemilihan h didasarkan pada *breakdown point*. *Breakdown point* adalah fraksi terkecil atau presentase dari pencilan yang dapat menyebabkan nilai penduga menjadi besar (Huber, 1981). Dipilih $h = \lfloor 0.75(T-m) \rfloor$ dengan *breakdown point* 25% yang memiliki efisiensi tinggi (Croux & Haesbroeck, 1999).
- Dalam himpunan berhingga $T \in \mathbb{N}$, terdapat suatu himpunan bagian yang ditulis sebagai

  $$L_{opt} = \arg\min_{A \in L^h} \det \Sigma(A)$$

  dengan $L_{opt} \in L^h$ dan $\hat{\Sigma}(A)$ adalah sampel matriks kovarian dari sub sampel $A \subset R$ seperti pada persamaan (5).

  Dengan demikian, diperoleh skala penduga MCD yang ditulis sebagai

  $$\hat{\Sigma}_{MCD}^{(h)}(R) = \hat{\Sigma}(L_{opt}) = \hat{\Sigma}\left(\arg\min_{A \in L^h} \det \Sigma(A)\right). \tag{6}$$

  Berdasarkan persamaan (6), diperoleh matriks parameter *smoothing* dengan MCD adalah

  $$\mathbf{Q}_{opt} = \arg\min_{\mathbf{Q} \in S_1(p)} \det(\hat{\Sigma}(L_{opt})). \tag{7}$$

3. Simpulan

Berdasarkan pembahasan disimpulkan bahwa model *robust multivariate exponenential smoothing* diperoleh dari model *multivariate exponenential smoothing* dengan matriks parameter *smoothing*-nya yang *robust* terhadap pencilan. Matriks tersebut diperoleh dengan meminimumkan determinan matriks kovarian dari *error* peramalan menggunakan estimasi *robust* yakni *Minimum Covariant Determinant* (MCD) sehingga diperoleh estimasi seperti pada persamaan (6). Matriks parameter smoothing berdasar estimasi matriks kovarian dengan MCD seperti pada persamaan (7).

Daftar Pustaka

Andrews, D. F. (1972). Plots of high-dimensional data. *Biometrics, 28*, 125-136.

Affandi, R. S., Yanti, T. S. (2020). Peramalan Robust dengan Penghalusan Eksponensial dan Holt-Winters. *Proceeding Statistika, 6* (1).

Cipra, T. (1992). Robust exponential smoothing. *Journal of Forecasting, 11* (1), 57–69.

Cipra, T., Hanzak, T. (2011). Exponential Smoothing For Time Series With Outliers. *Kybernetika, 47*(2), 165-178.

Croux, C., Gelper, S. E. C., Mahieu, K. (2010). Robust Exponential Smoothing Of Multivariate Time Series. *Computational Statistics and Data Analysis*, *54*(12), 2999-3006.

Croux, C., Haesbroeck, G. (1999). Influence function and efficiency of the minimum covariance determinant scatter matrix estimator. *Journal of Multivariate Analysis*, *71*, 161–190.

Gelper, S., Fried, R., Croux, C. (2010). Robust forecasting with exponential and Holt–Winters smoothing. *Journal of Forecasting*, *29*(3), 285-300.

Huber, P.J. (1981). Robust Statistics. New York. John Wiley and Sons.

Koehler, A.B., Snyder, R.D., Ord, J.K., Beaumont, A. (2012). A study of outliers in the exponential smoothing approach to forecasting. *International Journal of Forecassting, 28*, 477-484.

Makridakis, S. & Wheelwright, S. C. (1999). Metode dan Aplikasi Peramalan. Jakarta : Binarupa Aksara.

Maronna, R.A., Martin, R.D., Yohai, V.J. (2006). Robust Statistics: Theory and Methods. John Wiley and Sons.

Pfefferman, D., Allon, J. (1989). Multivariate Exponential Smoothing: Method and Practice. *International Journal of Forecasting*, *5* (1), 83–98.

Rousseuw, P. J., Van Driessen K. (1999). A Fast Algorithm for the Minimum Covariance Determinant Estimator. *Technometrics, 41*, 212-213.