PRISMA 5 (2022): 185-194
PRISMA, PROSIDING SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA
https://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/prisma/
ISSN 2613-9189

# Proses Berpikir Mahasiswa dalam Mengkonstruksi Pembuktian Matematika

Rudi Santoso Yohanes

*Universitas Katolik Widya Mandala Surabaya (Kampus Kota Madiun), Jalan Manggis 15 – 17, Kota Madiun 63131, Indonesia,*

*Alamat Surel: rudisantoso@widyamandala.ac.id*

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mendeskripsikan proses berpikir mahasiswa dalam mengkonstruksi pembuktian matematika, mengetahui kelemahan-kelemahan, serta faktor-faktor yang diduga menjadi penyebab terjadinya kelemahan mahasiswa pada saat mengkonstruksi pembuktian matematika. Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif yang bersifat deskriptif-eksploratif, dengan subjek penelitian 6 mahasiswa PSP Pendidikan Matematika UKWMS Kampus Kota Madiun yang pada semester gasal tahun akademik 2020-2021 duduk di semester VII dan sudah menempuh matakuliah Analisis Real. Data dikumpulkan dengan menggunakan teknik tes, yaitu Tes Kemampuan Pembuktian Matematika, yang berbentuk tes subjektif sebanyak 4 soal. Tes ini digunakan untuk mendeskripsikan proses berpikir mahasiswa dan kelemahan-kelemahan yang dilakukan mahasiswa dalam mengkonstruksi pembuktian matematika. Hasil penelitian menunjukkan bahwa proses berpikir dari 6 mahasiswa dalam mengkonstruksi pembuktian matematika mempunyai banyak kemiripan dalam metode pembuktian yang digunakan. Kelemahan-kelemahan mahasiswa dalam mengkonstruksi pembuktian matematika adalah: mahasiswa kurang memahami masalah, mahasiswa tidak menuliskan alasaan dari setiap langkah yang digunakan, mahasiswa kurang menguasai metode pembuktian, mahasiswa tidak menuliskan sasaran akhir dari apa yang harus dibuktikan. Faktor-faktor yang diduga menjadi penyebab terjadinya kelemahan mahasiswa dalam mengkonstruksi pembuktian matematika adalah: mahasiswa kurang terlatih sehingga kurang berpengalaman dalam mengkonstruksi pembuktian matematika, mahasiswa belum terbiasa menuliskan alasan dari setiap langkah pembuktian, mahasiswa kurang menguasai metode pembuktian yang diperlukan sebagai pedoman dalam melakukan pembuktian matematika.

Kata kunci:

Proses Berpikir, Mengkonstruksi, Pembuktian Matematika.



## 1. Pendahuluan

Proses berpikir merupakan aktivitas kognitif yang tidak dapat dilihat secara kasat mata, namun dapat diketahui melalui ekspresi respon secara lisan maupun tulisan dan perilaku. Dengan mengamati apa yang diucapkan, ditulis oleh mahasiswa, dapat diintepretasikan apa yang sedang dipikirkan oleh mahasiswa tersebut. Proses berpikir dapat dimanfaatkan untuk melacak bagaimana mahasiswa berpikir dalam menyelesaikan masalah, yang menurut Polya (1981) dapat berbentuk masalah menemukan *(problem to find)* maupun masalah membuktikan *(problem to prove)*. Dari hasil pelacakan ini, dapat diintepretasikan kelemahan-kelemahan yang dimiliki siswa dalam melakukan pembuktian matematika dan faktor-faktor yang diduga menjadi penyebabnya, sehingga selanjutnya dapat dilakukan perbaikan.

Untuk menggali proses berpikir, dapat dilakukan dengan beberapa cara, yaitu: (1) menganalisis dan menginterpretasikan langkah-langkah yang digunakan subjek penelitian dalam menyelesaikan masalah matematika, (2) menggunakan metode *Think Alouds (Think Out Loud)*, yaitu sebuah metode untuk mengetahui proses berpikir subjek penelitian. Metode ini dilakukan dengan meminta subjek penelitian untuk menyelesaikan masalah sekaligus menceritakan proses berpikirnya. Olson, Duffy, Mack (1988), menegasakan bahwa metode *Think Alouds* dikhususkan untuk mengkaji proses berpikir (3) melakukan Wawancara Klinis, yaitu wawancara yang dilakukan oleh seorang peneliti untuk mengungkap proses

*To cite this article:*
Yohanes, R. S. (2022). Proses Berpikir Mahasiswa dalam Mengkonstruksi Pembuktian Matematika. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika* 5, 185-194

berpikir subjek penelitian, setelah subjek penelitian selesai mengerjakan tugas/masalah yang diberikan. Dalam wawancara klinis, peneliti biasanya meminta kepada subjek penelitian untuk menjelaskan atau memberi klarifikasi mengenai langkah-langkah/cara yang digunakan untuk menyelesaikan masalah, sehingga peneliti memperoleh gambaran yang jelas mengenai proses berpikir subjek penelitian (Rudi Santoso Yohanes, 2012).

Salah satu kemampuan yang sangat diperlukan dalam belajar matematika adalah kemampuan membuktikan sebuah pernyataan atau teorema, karena sebagian besar masalah dalam matematika di perguruan tinggi adalah masalah membuktikan. Dalam proses pembuktian ini, mahasiswa juga belajar berpikir kritis dan sistematis, menata nalar, dan berkreasi, yang termasuk salah satu kemampuan berpikir tingkat tinggi *(Higher Order Thinking Skill)*, yang sangat diperlukan dalam memasuki era revolusi industri 4.0.

Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Katolik Widya Mandala Surabaya (PSP Matematika UKWMS) Kampus Kota Madiun merupakan lembaga pendidikan formal penghasil guru matematika di sekolah menengah, mempunyai tanggungjawab untuk menghasilkan guru matematika yang berkualitas tinggi, yang salah satu indikatornya memiliki kemampuan yang bagus dalam pembuktian matematika.

Kemampuan melakukan pembuktian matematika merupakan kemampuan yang sangat penting dalam belajar matematika. Namun demikian tidak dapat dipungkiri bahwa pembuktian matematika masih dianggap sulit oleh sebagian besar mahasiswa. Kesulitan mahasiswa dalam melakukan pembuktian matematika dirasakan peneliti pada saat memberi kuliah Logika Matematika dan Teori Himpunan, dan Analisis Real. Hampir semua mahasiswa mengeluh mengenai sulitnya melakukan pembuktian matematika. Kesulitan mahasiswa dalam pembuktian matematika, dapat dilihat dari hasil pekerjaan mahasiswa dalam menyelesaikan masalah pembuktian matematika yang tidak sistematis, berputar-putar tanpa diberi alasan yang logis. Fenomena sulitnya mahasiswa dalam melakukan pembuktian matematika juga tampak dari rendahnya nilai yang dicapai oleh sebagian besar mahasiswa pada mata kuliah yang materinya bernuatan pembuktian matematika, seperti mata kuliah Analisis Real.

Melihat kondisi di atas, peneliti merasa perlu untuk melakukan sebuah penelitian tentang: Proses Berpikir Mahasiswa dalam Mengkonstruksi Pembuktian Matematika. Dengan mengetahui proses berpikir mahasiswa dalam mengkonstruksi pembuktian matematika, peneliti dapat mengetahui kelemahan-kelemahan yang terjadi pada saat mahasiswa mengkonstruksi pembuktian matematika untuk dicari cara mengatasinya. Hasil penelitian ini juga dapat menjadi dasar untuk melakukan penelitian lanjutan tentang upaya meningkatkan kemampuan mengkonstruksi pembuktian matematika mahasiswa.

Berdasarkan latar belakang masalah yang telah diuraikan di atas, maka masalah yang akan dijawab dalam penelitian ini adalah: (1) Bagaimana proses berpikir mahasiswa dalam mengkonstruksi pembuktian matematika? (2) Kelemahan-kelemahan apa sajakah yang terjadi pada saat mahasiswa mengkonstruksi pembuktian matematika? (3) Faktor-faktor apa sajakah yang menyebabkan kesalahan-kesalahan itu terjadi?

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan gambaran yang jelas mengenai proses berpikir mahasiswa pada saat mengkonstruksi pembuktian matematika. Gambaran ini diharapkan dapat memberikan masukan kepada mahasiswa dalam upaya meningkatkan kemampuan mengkonstruksi pembuktian matematika yang sangat diperlukan dalam belajar matematika dan dalam melaksanakan tugasnya kelak sebagai guru.

## 2. Metode

Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif yang bersifat deskriptif-eksploratif. Penelitian ini berupaya untuk mendeskripsikan temuan dari hasil penelitian dan mencari jawaban (eksplorasi) terhadap proses berpikir siswa dalam mengkonstruksi pembuktian matematika. Subjek penelitian ini adalah seluruh mahasiswa PSP Matematika UKWMS Kampus Kota Madiun yang telah menempuh matakuliah Analisis Real.

Teknik pengumpulan data yang digunakan dalam penelitian ini adalah teknik tes. Untuk mendeskripsikan proses berpikir mahasiswa dalam membuktian teorema matematika, dilakukan dengan cara menganalisis dan menginterpretasikan langkah-langkah yang digunakan mahasiswa dalam membuktikan teorema matematika. Jika peneliti mengalami kesulitan dalam menginterpretasi langkah-langkah proses berpikir yang digunakan mahasiswa, peneliti dapat menggunakan metode wawancara klinis untuk klarifikasi jawaban mahasiswa atau menggunakan metode *Think Aloud*, yaitu meminta siswa untuk menyelesaikan kembali proses pembuktian tersebut sekaligus menceritakan proses berpikirnya.

Instrumen penelitian ini adalah: Tes Pembuktian Matematika (TPM). TPM difokuskan pada matakuliah Analisis Real dengan pokok bahasan Bilangan Real. Dalam penelitian ini, Tes Pembuktian Matematika yang berjumlah empat soal digunakan sebagai instrumen untuk mengetahui proses berpikir siswa dalam menyelesaikan pembuktian matematika. TPM berbentuk tes subjektif yang meminta kepada mahasiswa untuk membuktikan teorema-teorema dalam matematika. Setelah mahasiswa mengerjakan TPM, kemudian dianalisis proses berpikirnya dalam mengkonstruksi pembuktian matematika.

Teknik analisis data yang digunakan dalam penelitian ini analisis isi *(content analysis*), yaitu dengan menganalisis hasil pekerjaan mahasiswa dalam menyelesaikan TPM. Hasil pekerjaan mahasiswa dianalisis secara kualitatif dan diinterpretasikan untuk memperoleh gambaran tentang proses berpikir mahasiswa dalam mengkonstruksi pembuktian matematika yang pada dasarnya berupaya untuk: (1) mendeskripsikan proses berpikir mahasiswa dalam melakukan pembuktian matematika, (2) mengetahui kekuatan dan kelemahan yang ada pada diri mahasiswa dalam mengkonstruksi pembuktian matematika, beserta faktor-faktor yang diduga menjadi penyebabnya, sehingga bisa menjadi bahan masukan bagi PSP Pendidikan Matematika UKWMS Kampus Kota Madiun.

## 3. Hasil dan Pembahasan

Subjek penelitian ini adalah semua mahasiswa PSP Matematika UKWMS Kota Madiun yang pada tahun akademik 2020/2021 duduk di semester VII yang berjumlah 6 mahasiswa. Subjek penelitian dipilih mahasiswa semester VII dengan pertimbangan mahasiswa sudah menempuh mata kuliah Analisis Real, Struktur Aljabar dan mata kuliah sejenisnya yang berisi pembuktian teorema yang cukup dominan, dan dapat dipandang sebagai mahasiswa tingkat akhir, sehingga diharapkan sudah memiliki pengalaman belajar yang cukup, terutama kemampuan membuktikan teorema matematika. Pengambilan data dilakukan pada hari Jumat, tanggal 28 Juli 2020 secara online, karena kondisi pandemi. Mahasiswa diberi waktu 120 menit untuk mengerjakan soal-soal pembuktian yang berkaitan dengan salah satu topik mata kuliah Pengantar Analisis Real, dengan pokok bahasan Bilangan Real.

### 3.1 Analisis Proses Berpikir Mahasiswa

Berikut ini disajikan analisis proses berpikir mahasiswa dalam mengkonstruksi pembuktian matematika. Analisis proses berpikir didasarkan pada langkah-langkah yang digunakan mahasiswa dalam menjawab masalah pembuktian yang diberikan oleh peneliti.

#### 3.1.1 Masalah Nomor 1.

Jika x dan y bilangan irrasional, selidiki apakah x + y merupakan bilangan irrasional?
Buktikan jawaban Anda.

Pembahasan:
Diketahui: $x$ , $y$ bilangan irrasional
Ditanya: apakah $x + y$ dan $x \cdot y$ merupakan bilangan irrasional?
Jawab:
Claim: $x + y$ dan $x \cdot y$ tidak selalu merupakan bilangan irrasional.
Dibuktikan dengan contoh penyangkal.
Pilih: $x = \sqrt{3}$ (bilangan irrasional)
$y = -\sqrt{3}$ (Bilangan irrasional)
Maka diperoleh:
$x + y = \sqrt{3} + \left(-\sqrt{3}\right) = 0$ (bilangan rasional)
$x \cdot y = \left(\sqrt{3}\right) \cdot \left(-\sqrt{3}\right) = -3$ (bilangan rasional)
Terbukti bahwa bila $x$ dan $y$ bilangan irrasional, maka $x + y$ dan $x.y$ tidak selalu merupakan bilangan irrasional.

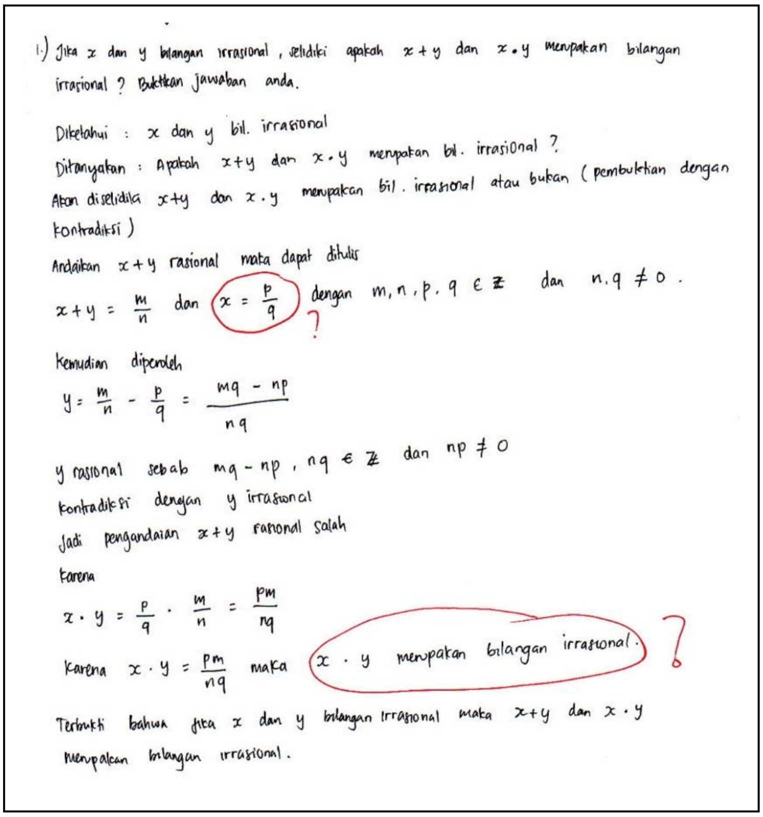
Hasil Analisis Masalah 1.
Untuk membuktikan masalah nomor 1, ke-enam mahasiswa menggunakan metode yang sama, yaitu pembuktian tidak langsung (Reductio ad Absurdum) dan menyimpulkan bahwa bila x dan y bilangan irrasional, maka x + y dan x . y merupakan bilangan irrasional (kesimpulan yang diambil mahasiswa adalah keliru).

Dari pekerjaan mahasiswa berikut ini, tampak bahwa mahasiswa mulai dengan menuliskan apa yang diketahui dan apa yang ditanyakan. Dalam tahap ini mahasiswa sudah dapat menuliskan apa yang diketahui dan apa yang ditanyakan dengan benar.

Langkah berikutnya, mahasiswa juga sudah benar pada saat memisalkan bahwa x + y bilangan rasional. Tetapi pada langkah selanjutnya semua mahasiswa melakukan kekeliruan yang sama, yaitu menuliskan x juga sebagai bilangan rasional, padahal di dalam soal jelas sudah diketahui bahwa x adalah bilangan irrasional. Langkah inilah yang menyebabkan jawaban mahasiswa keliru, meskipun mahasiswa berhasil menemukan sebuah kontradiksi. Kemudian menyimpulkan bahwa pengandaian salah, sehingga x + y merupakan bilangan irrasional.

Jawaban masalah nomor 1 ini adalah Jika x dan y bilangan irrasional, maka x + y dan x.y dapat merupakan bilangan irrasional dan dapat merupakan bilangan rasional. Untuk membuktikan benarnya pernyataan ini, cukup menggunakan contoh, seperti dituangkan dalam pembahasan di bawah ini.

Berikut ini disajikan contoh pekerjaan mahasiswa untuk masalah nomor 1.



1.) Jika $x$ dan $y$ bilangan irrasional, selidiki apakah $x+y$ dan $x \cdot y$ merupakan bilangan irrasional ? Buktikan jawaban anda.

Diketahui : $x$ dan $y$ bil. irrasional

Ditanyakan : Apakah $x+y$ dan $x \cdot y$ merupakan bil. irrasional ?

Akan diselidiki $x+y$ dan $x \cdot y$ merupakan bil. irrasional atau bukan (pembuktian dengan kontradiksi)

Andaikan $x+y$ rasional maka dapat ditulis

$x+y = \frac{m}{n}$ dan $x = \frac{p}{q}$ dengan $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$ dan $n, q \neq 0$.

?

Kemudian diperoleh

$y = \frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{mq - np}{nq}$

$y$ rasional sebab $mq - np$, $nq \in \mathbb{Z}$ dan $np \neq 0$

kontradiksi dengan $y$ irrasional

Jadi pengandaian $x+y$ rasional salah

karena

$x \cdot y = \frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} = \frac{pm}{nq}$

karena $x \cdot y = \frac{pm}{nq}$ maka $x \cdot y$ merupakan bilangan irrasional. ?

Terbukti bahwa jika $x$ dan $y$ bilangan irrasional maka $x+y$ dan $x \cdot y$ merupakan bilangan irrasional.

**Gambar 1.** Jawaban responden 1 untuk masalah 1

3.1.2 Masalah Nomor 2.

Buktikan bahwa jika $0 < a < b$, maka berlaku $a < \sqrt{ab} < b$ dan $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

Pembahasan:

Diketahui: $0 < a < b$, berarti $a > 0$ dan $b > 0$ dan $a < b$

Buktikan: $a < \sqrt{a.b} < b$ dan $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa $a < \sqrt{a.b} < b$

$$
\begin{aligned}
0 < a < b \quad &\Leftrightarrow \quad 0.a < a.a < a.b \text{ (Setiap ruas dikalikan dengan } a > 0) \\
&\Leftrightarrow \quad 0 < a^2 < a.b \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{0} < \sqrt{a^2} < \sqrt{a.b} \\
&\Leftrightarrow \quad 0 < a < \sqrt{a.b} \quad \text{............... (1)}
\end{aligned}
$$

$0 < a < b \quad \Leftrightarrow \quad 0.b < a.b < b.b$ (Setiap ruas dikalikan dengan $b > 0$)

$\Leftrightarrow \quad 0 < a.b < b^2$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{0} < \sqrt{a.b} < \sqrt{b^2}$

$\Leftrightarrow \quad 0 < \sqrt{a.b} < b$ ............... (2)

Dari (1) dan (2) diperoleh:

$$0 < a < \sqrt{a.b} < b \quad \text{(terbukti)}$$

Akan dibuktikan bahwa $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

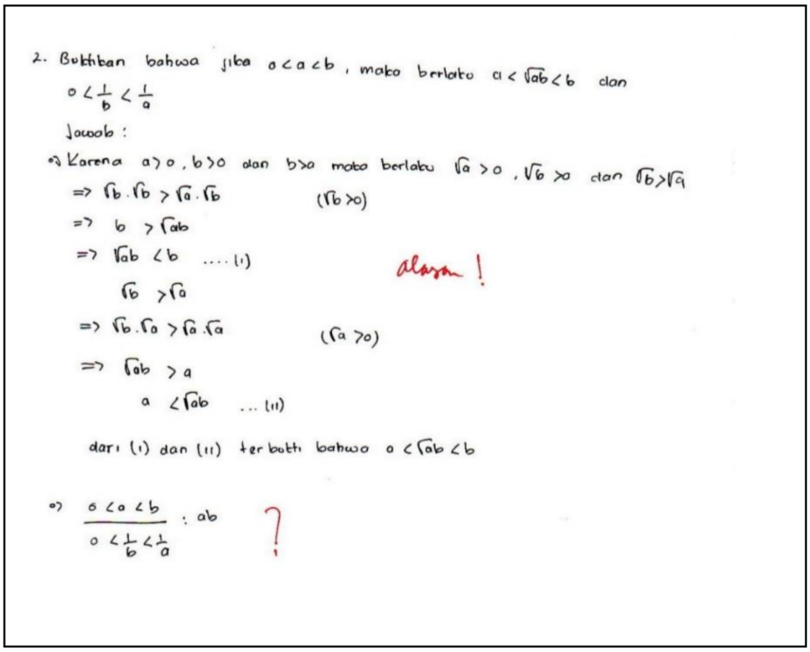
$0 < a < b$ berarti $a > 0$ dan $b > 0$, sehingga $a.b > 0$, sehingga berlaku:

$0 < a < b \Leftrightarrow \quad \frac{0}{a.b} < \frac{a}{a.b} < \frac{b}{a.b}$ (Setiap ruas dibagi dengan $a.b > 0$)

$\Leftrightarrow \quad 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ (terbukti)

Hasil Analisis Masalah 2.

Dalam membuktikan masalah nomor 2 ini, ke-6 mahasiswa menggunakan cara yang sama, yaitu membuktikan sebuah implikasi dengan metode pembuktian langsung. Anteseden sebagai hal yang diketahui, dan konsekuen sebagai hal yang harus dibuktikan. Bertitik tolak dari anteseden, dengan langkah-langkah yang betul, mahasiswa berhasil membuktikan kebenaran konsekuen, tetapi dalam proses pembuktian, mahasiswa tidak menuliskan apa yang diketahui dan apa yang harus dibuktikan.
Berikut ini disajikan contoh pekerjaan mahasiswa untuk masalah nomor 2.




**Gambar 2.** Jawaban Responden 4 untuk Masalah 2

Dari hasil pekerjaan mahasiswa, tampak bahwa dalam membuktikan masalah nomor 2 ini mahasiswa menggunakan sifat-sifat pertidaksamaan, yaitu mengalikan kedua ruas pertidaksamaan dengan bilangan positif yang sama. Meskipun mahasiswa dapat membuktikan masalah nomor 2 dengan benar, namun alasan dari setiap langkah tidak dijelaskan. Tentu saja hal ini merupakan kekurangan dari sebuah proses mengkonstruksi pembuktian matematika.

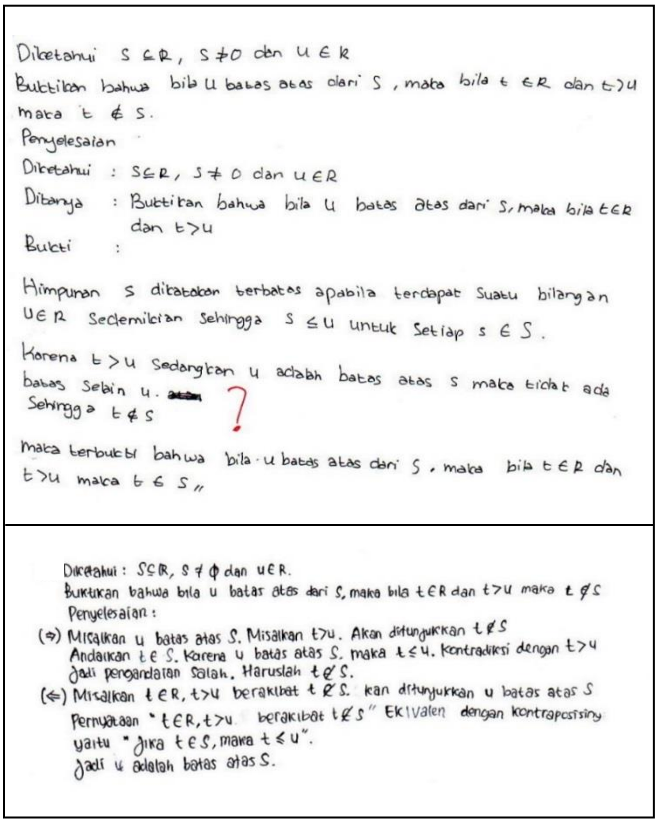
3.1.3 Masalah Nomor 3.

Diketahui: $S \subseteq R$ , $S \neq \phi$ , dan $u \in R$
Buktikan bahwa bila u batas atas dari S, maka bila $t \in R$ dan $t > u$ , maka $t \notin S$

Pembahasan:
Diketahui: $S \subseteq R$ , $S \neq \phi$ dan $u \in R$ .
u batas atas dari S
$t \in R$ dan $t > u$
Buktikan : $t \notin S$
Bukti:
Dibuktikan dengan pembuktian tidak langsung (Reductio ad Absurdum).
Andaikan : $t \in S$
Karena u merupakan batas atas S, dan $t \in S$ berarti: $t \leq u$
Kontradiksi dengan yang diketahui, bahwa $t > u$. Pengandaian Salah.
Jadi yang benar adalah $t \notin S$ (Terbukti)

Hasil Analisis Masalah 3.
Dari 6 mahasiswa, 5 mahasiswa menggunakan metode pembuktian langsung dan 1 mahasiswa menggunakan metode pembuktian tidak langsung.

Berikut ini disajikan contoh pekerjaan mahasiswa untuk masalah nomor 3.


Diketahui $S \subseteq R$, $S \neq 0$ dan $u \in R$
Buktikan bahwa bila u batas atas dari S , maka bila $t \in R$ dan $t > u$ maka $t \notin S$.
Penyelesaian
Diketahui : $S \subseteq R$, $S \neq 0$ dan $u \in R$
Ditanya : Buktikan bahwa bila u batas atas dari S, maka bila $t \in R$ dan $t > u$
Bukti :
Himpunan S dikatakan terbatas apabila terdapat suatu bilangan $u \in R$ sedemikian sehingga $s \leq u$ untuk setiap $s \in S$.
Karena $t > u$ sedangkan u adalah batas atas S maka tidak ada batas selain u. Sehingga $t \notin S$ ?
Maka terbukti bahwa bila u batas atas dari S, maka bila $t \in R$ dan $t > u$ maka $t \in S$ //

Diketahui : $S \subseteq R$, $S \neq \phi$ dan $u \in R$.
Buktikan bahwa bila u batas atas dari S, maka bila $t \in R$ dan $t > u$ maka $t \notin S$
Penyelesaian :
($\Rightarrow$) Misalkan u batas atas S. Misalkan $t > u$. Akan ditunjukkan $t \notin S$
Andaikan $t \in S$. Karena u batas atas S. maka $t \leq u$. Kontradiksi dengan $t > u$
Jadi pengandaian salah. Haruslah $t \notin S$.
($\Leftarrow$) Misalkan $t \in R$, $t > u$ berakibat $t \notin S$. kan ditunjukkan u batas atas S
Pernyataan "$t \in R, t > u$ berakibat $t \notin S$" Ekivalen dengan kontraposisinya yaitu "Jika $t \in S$, maka $t \leq u$".
Jadi u adalah batas atas S.

**Gambar 3.** Jawaban Responden 2 dan 6 untuk Masalah 3

Untuk mahasiswa yang menggunakan pembuktian langsung, mahasiswa mulai dengan menuliskan apa yang diketahui dan apa yang harus dibuktikan dengan benar. Proses pembuktian dimulai dari hal yang diketahui yaitu Himpunan S dikatakan terbatas (seharusnya terbatas ke atas), bila terdapat bilangan $u \in R$ sedemikian sehingga $s \leq u$, untuk setiap $s \in S$. Proses berikutnya, mahasiswa mengajukan argumen: karena $t > u$, sedangkan u adalah batas atas dari S, maka tidak ada batas selain u, sehingga $t \notin S$. Mahasiswa tidak menyebutkan alasan mengapa $t \notin S$? atau dasar penarikan kesimpulan yang digunakan.

Sedangkan mahasiswa yang menggunakan metode pembuktian tidak langsung, mahasiswa juga mulai dengan menuliskan apa yang diketahui dan apa yang harus dibuktikan dengan benar.
Langkah berikutnya mahasiswa membuat pengandaian bahwa $t \in S$, dan berdasarkan pengandaian tersebut, dengan menggunakan langkah-langkah yang betul, mahasiswa berhasil memperoleh kotradiksi yaitu $t \leq u$ dan $t > u$. Sehingga disimpulkan bahwa pengandaian salah, dengan demikian yang benar adalah $t \notin S$. Sampai disini mahasiswa sudah benar. Tetapi pada langkah berikutnya mahasiswa membuat langkah yang tidak perlu yaitu dengan melakukan pembuktian biimplikasi, padahal masalah yang harus dibuktikan adalah masalah implikasi.

3.1.4 Masalah Nomor 4

Apakah $S = \left\{ \frac{1}{n} \middle| n \in N \right\}$ mempunyai cluster point?
Buktikan jawaban Anda.

Pembahasan:

Diketahui: $S = \left\{ \frac{1}{n} \middle| n \in N \right\}$

Ditanya: Apakah S mempunyai cluster point?
Jawab:
Claim: S mempunyai cluster point, yaitu 0.
Bukti:
Harus dibuktikan: $(\forall \varepsilon > 0).\ V_\varepsilon(0) \cap S - \{0\} \neq \phi$
Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang.
Berdasarkan sifat Archimedes, maka terdapat $n_\varepsilon \in N$ sedemikian sehingga

$0 < \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$.

$V_\varepsilon(0) = (0-\varepsilon, 0+\varepsilon) = (-\varepsilon, \varepsilon)$

Sekarang kita hitung:

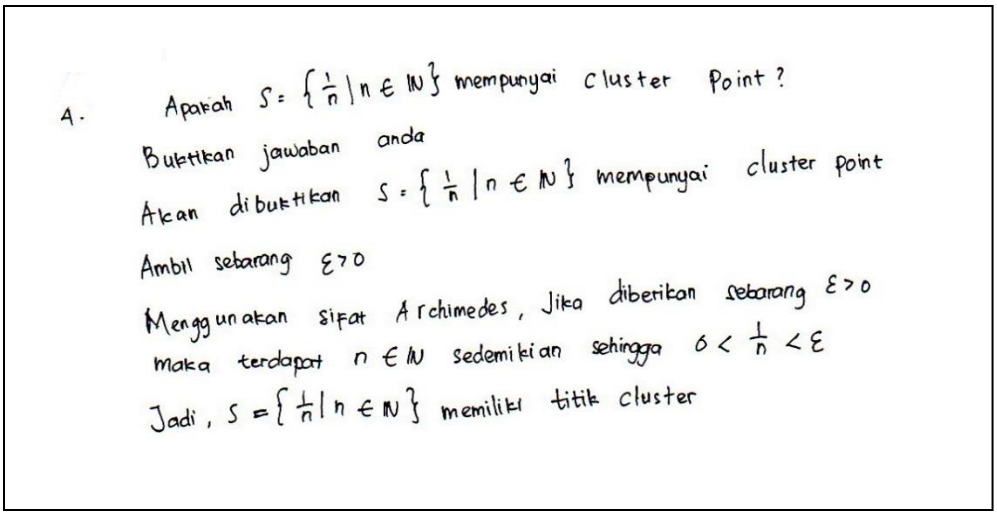
$$\begin{aligned} V_\varepsilon(0) \cap S - \{0\} &= (-\varepsilon, \varepsilon) \cap \left\{ \frac{1}{n} \middle| n \in N \right\} - \{0\} \\ &= (-\varepsilon, \varepsilon) \cap \left\{ 0 < \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon \right\} - \{0\} \\ &= \left( 0, \frac{1}{n_\varepsilon} \right) - \{0\} \\ &= \left( 0, \frac{1}{n_\varepsilon} \right) \end{aligned}$$

$V_\varepsilon(0) \cap S - \{0\} \neq \phi$

Terbukti bahwa 0 merupakan clueter point dari $S = \left\{ \frac{1}{n} \middle| n \in N \right\}$

Hasil Analisis Masalah 4
Untuk membuktikan masalah 4 ini, ke-enam mahasiswa menggunakan metode pembuktian langsung.
Mahasiswa mulai dari pernyataan: $S = \left\{ \frac{1}{n} \middle| n \in N \right\}$ mempunyai cluster point. Tetapi mahasiswa tidak menyebutkan mana cluster pointnya. Setelah itu, mahasiswa mulai dengan pernyataan: Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, tetapi mahasiswa tidak menyebutkan apa yang harus dibuktikan, setelah mahasiswa membuat pernyataan S mempunyai cluster point. Sehingga langkah yang dilakukan mahasiswa dan kesimpulannya tidak jelas alasan yang digunakan. Mahasiswa juga tidak menuliskan titik mana yang merupakan cluster point.

Berikut ini disajikan contoh pekerjaan mahasiswa untuk masalah nomor 4.


4. Apakah $S = \{ \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N} \}$ mempunyai cluster point ?
Buktikan jawaban anda
Akan dibuktikan $S = \{ \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N} \}$ mempunyai cluster point
Ambil sebarang $\varepsilon > 0$
Menggunakan sifat Archimedes, Jika diberikan sebarang $\varepsilon > 0$
maka terdapat $n \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$
Jadi, $S = \{ \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N} \}$ memiliki titik cluster

**Gambar 4.** Jawaban Responden 5 untuk Masalah 4

3.2 Kelemahan-kelemahan Mahasiswa pada Saat Mengkonstruksi Pembuktian Matematika

Berdasarkan hasil analisis proses berpikir yang telah dikemukakan di atas, tampak bahwa terdapat kelemahan-kelemahan yang dilakukan mahasiswa pada saat mengkonstruksi pembuktian matematika, yaitu:

Untuk masalah 1:

Mahasiswa keliru dalam memilih metode pembuktian. Mahasiswa menggunakan metode pembuktian tidak langsung, yaitu Reductio ad Absurdum (menggunakan kontradiksi) padahal untuk masalah 1 ini cukup dibuktikan dengan menggunakan contoh penyangkal. Jadi mahasiswa kurang menguasai metode pembuktian. Pada masalah 1 ini, juga tampak mahasiswa kurang memahami masalah, karena berdasarkan hasil analisis dari pekerjaan mahasiswa, meskipun mahasiswa sudah berhasil menentukan apa yang diketahui dan apa yang harus dibuktikan dengan benar, tetapi mahasiswa kurang memahami apa yang sudah ditulis. Sebagai contoh: mahasiswa menuliskan bahwa $x$ dan $y$ adalah bilangan irrasional, dan ini benar. Namun pada langkah-langkah berikutnya, mahasiswa menuliskan $x$ sebagai bilangan rasional, sebagai titik tolak pembuktian.

Untuk masalah 2:

Mahasiswa sudah berhasil menyelesaikan masalah 2 ini dengan benar. Tetapi mahasiswa tidak menuliskan alasan yang digunakan dalam setiap langkah pembuktian. Kelemahan ini terjadi pada setiap nomor dari masalah 1 sampai masalah 4.

Untuk masalah 3:

Masalah 3 ini merupakan masalah pembuktian pernyataan implikasi, tetapi mahasiswa membuktikan pernyataan tersebut sebagai pernyataan biimplikasi. Jadi mahasiswa kurang menguasai metode pembuktian.

Untuk masalah 4:

Mahasiswa tidak menuliskan sasaran akhir dari yang harus di buktikan. Sebagai contoh: mahasiswa membuat claim bahwa: $S = \left\{ \frac{1}{n} \middle| n \in N \right\}$ mempunyai cluster point, tetapi mahasiswa tidak menuliskan apa yang harus dibuktikan. Menuliskan sasaran akhir dari yang harus dibuktikan merupakan hal yang penting, karena dapat digunakan sebagai pedoman pembuktian. Jika mahasiswa tidak mengetahui sasaran akhir yang harus dibuktikan, maka bisa jadi kesimpulan yang diambil mahasiswa tidak didasari alasan yang jelas. Kemampuan komunikasi matematika tertulis perlu ditingkatkan.

3.3 Faktor-faktor yang Menyebabkan Timbulnya Kelemahan Mahasiswa

Berdasarkan hasil analisis proses berpikir mahasiswa dan kelemahan-kelemahan yang telah diuraikan di atas, maka faktor-faktor yang diduga menjadi penyebab terjadinya kelemahan-kelemahan di atas adalah sebagai berikut: (1) yang berkaitan dengan mahasiswa keliru dalam memilih metode pembuktian, faktor yang diduga menjadi penyebabnya adalah mahasiswa kurang berlatih dalam menyelesaikan masalah pembuktian matematika, sehingga tidak berpengalaman atau kurang terampil dalam memecahkan masalah pembuktian matematika. (2) yang berkaitan dengan mahasiswa tidak menuliskan alasan yang digunakan dalam setiap langkah pembuktian dan tidak menuliskan sasaran akhir dari apa yang harus dibuktikan, faktor yang diduga menjadi faktor penyebabnya adalah mahasiswa tidak terbiasa menuliskan alasan dari setiap langkah dan sasaran akhir yang harus dibuktikan dalam melakukan pembuktian matematika dan dosen tidak mengingatkan.

## 4. Simpulan

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dipaparkan di atas, maka dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut: (1) Proses berpikir dari 6 mahasiswa dalam melakukan pembuktian matematika mempunyai banyak kemiripan. Kemiripan tersebut meliputi metode pembuktian yang mereka gunakan, dan kelemahan yang dilakukan mahasiswa. Metode pembuktian langsung digunakan mahasiswa untuk membuktikan masalah nomor 2, 3 (sebagian mahasiswa), dan nomor 4. Sedangkan metode pembuktian tidak langsung digunakan mahasiswa untuk membuktikan masalah nomor 1, 3 (sebagian mahasiswa). (2) Kelemahan-kelemahan mahasiswa dalam melakukan pembuktian matematika adalah: mahasiswa kurang memahami masalah, mahasiswa tidak menuliskan alasan dari setiap langkah yang digunakan, mahasiswa kurang memahami metode pembuktian, mahasiswa tidak menuliskan sasaran akhir dari apa yang harus di buktikan. (3) Faktor-faktor yang diduga menjadi penyebab terjadinya kelemahan-kelemahan mahasiswa dalam melakukan pembuktian matematika, yaitu: mahasiswa kurang berlatih/terlatih sehingga kurang berpengalaman dalam melakukan pembuktian matematika, mahasiswa tidak terbiasa menuliskan alasan dari setiap langkah dalam melakukan pembuktian matematika, dan mahasiswa kurang menguasai metode pembuktian yang sangat diperlukan sebagai pedoman dalam melakukan pembuktian matematika.

Saran yang dapat dikemukakan untuk mengatasi kelemahan-kelemahan di atas adalah: (1) memberikan tugas pembuktian matematika yang lebih sering kepada mahasiswa, sehingga mahasiswa lebih terampil melakukan pembuktian matematika. Untuk matakuliah yang memiliki sifat deduktif yang tinggi (misalnya: Analisis Real, Struktur Aljabar), tugas yang diberikan sebaiknya berfokus pada pembuktian terorema matematika, untuk melatih kemampuan mengkonstruksi pembuktian matematika. (2) Dalam pembelajaran, sebelum mahasiswa belajar pembuktian matematika, mahasiswa terlebih dahulu perlu belajar memahami langkah-langkah dari suatu pembuktian matematika yang sudah ada. (3) Dalam memberikan contoh pembuktian matematika, dosen sebaiknya perlu memberikan langkah-langkah pembuktian yang lengkap dan sistematis, sehingga mahasiswa memahami proses pembuktian matematika tersebut. (4) Memupuk nilai-nilai Peduli, Komit, dan Antusias (PeKA) dalam pembelajaran, sehingga pada saat menghadapi kesulitan dalam melakukan pembuktian matematika, mahasiswa tetap antusias dan memiliki semangat juang yang tinggi.

## Daftar Pustaka

Bartle, Robert G. & Sherbert, Donald R.. (2000). *Introduction to Real Analysis*, (Third Edition), New York: John Wiley & Sons, Inc.

Dadang Juandi (2008). Pembuktian, *Penalaran, dan Komunikasi Matematis*, Jurusan Pendidikan Matematika, FPMIPA, UPI.

Klymchuk, Sergiy. (2017). *Using Counter-Examples to Enhance Learners' Understanding of Undergraduate Mathematics*, Auckland University of Technology. (*Online*). (https://www.researchgate.net/publication/ 242678752)

Olson, G.M., Duffy, S.A., and Mack, R.L.(1988). *Thinking-Out-Loud as Method for Studying Real-Time Comprehension Processes,* (pp. 253 – 286), Hills Dole, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates, Publisher.

Polya, G. (1981) *Mathematical Discovery (On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving)*, New York: John Wiley and Sons.

Rudi Santoso Yohanes. (2011) *Kemampuan Mahasiswa dalam Menyelesaikan Masalah Matematika Sekolah*, Laporan Penelitian: LP3M, Universitas Katolik Widya Mandala Madiun.

Rudi Santoso Yohanes. (2012). *Proses Berpikir Siswa SMP dalam Memecahkan Masalah Matematika Ditinjau dari Dominasi Otak Kiri dan Otak Kanan*, Laporan Penelitian: LP3M, Universitas Katolik Widya Mandala Madiun.

Rudi Santoso Yohanes. (2017). *Materi Kuliah Logika Matematika*, Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Katolik Widya Mandala Madiun.

Tsang, Cindy. (2010). Fermat Numbers, University of Washington. (*Online*). (https://wstein.org/edu/2010/414/projects/tsang.pdf)

Weber, K. (2003). Students' difficulties with proof. MAA Online: Research Sampler. (*Online*). (https://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/research-sampler-8-students-difficulties-with-proof)