PRISMA 5 (2022): 850-860
PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika
https://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/prisma/
ISSN 2613-9189

Pengembangan Teorema Van Aubel pada Segiempat Saling Silang

Marlata Manalu[a,*], Mashadi[b], Sri Gemawati[a,b]

Universitas Riau, Jl.HR. Soebrantas No. 155, Pekanbaru 28293, Indonesia

**Alamat Surel: marlatamanalu821@gmail.com*

Abstrak

Teorema Van Aubel pada umumnya dibangun dari sebarang bidang datar segiempat konveks . Penelitian ini akan membahas sebuah pengembangan teorema Van Aubel khusus bidang segiempat saling silang dimana dari keempat sisinya dibangun setengah lingkaran mengarah keluar yang masing-masing diameternya merupakan sisi segiempat saling silang tersebut. Jika setiap titik potong busur setengah lingkaran dengan garis yang tegak lurus diameter dan melalui pusat setengah lingkaran dihubungkan, maka dapat dibuktikan terdapat sepasang ruas garis yang panjangnya sama serta saling tegak lurus. Pembuktian Teorema Van Aubel pada segiempat saling silang pada tulisan ini ditunjukkan dengan menggunakan teorema aturan kosinus kekongruenan dan kesebangunan pada segitiga, teorema segiempat ortodiagonal, dan luas segitiga.

Kata kunci:

Teorema Van Aubel, aturan kosinus, kekongruenan

1. Pendahuluan

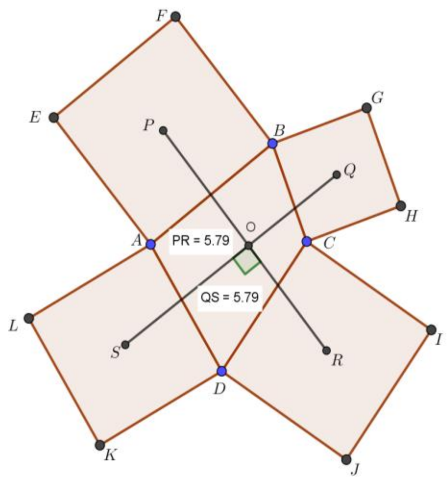
Teorema-teorema tentang segiempat sudah banyak dibahas pada tulisan-tulisan terutama di bidang geometri, seperti teorema Morley, teorema Japanese, teorema Butterfly, dan teorema- teorema yang lain. Salah satu teorema yang cukup terkenal dari sekian banyak teorema tentang segiempat adalah teorema Van Aubel. Henry Van Aubel adalah seorang matematikawan yang pertama sekali mengemukakan teorema Van Aubel pada tahun 1878 (Nishiyama, 2011). Teorema Van Aubel dikonstruksi dari segiempat sebarang, kemudian pada setiap sisi segiempat sebarang dibangun persegi, titik-titik potong diagonal persegi yang berseberangan dihubungkan sehingga diperoleh dua ruas garis yang sama panjang serta saling berpotongan tegak lurus (*perpendicular*).

Berbagai tulisan mengenai pembuktian dan pengembangan teorema Van Aubel ini telah terlebih dahulu dipublikasikan oleh beberapa penulis, untuk pengembangan teorema Van Aubel pada bidang segiempat konveks antara lain (Krishna, 2016; Krishna & Dasari, 2018; Villers, 2000) serta pengembangan lain juga dilakukan yaitu dengan memulai konstruksi dari sebuah bidang segitiga sebarang (Maywidia, at al, 2018), pengembangan teorema Van Aubel pada segienam dengan pembuktian menggunakan pendekatan konsep kesebangunan dan kekongruenan dipublikasikan pada tulisan (Mulyadi et al, 2017), setelah itu ada juga yang dikembangkan dengan pembuktian menggunakan sistem koordinat (Krishna & Dasari, 2018), sementara (Nishiyama, 2011) justru menemukan pembuktian teorema Van Aubel dengan menggunakan bilangan kompleks, dan (Glaister, 2016; Jain, 2017) mengembangkan dan membuktikan teorema Van Aubel dengan menggunakan konsep ortogonal vektor. Pada tulisan ini penulis tertarik membahas tentang pengembangan dari Teorema Van Aubel pada segiempat saling silang.

Gagasan dan ide untuk penggunaan konsep aturan kosinus, kesebangunan dan kekongruenan banyak tertuang dalam tulisan (Wardiah, at al, 2016; Mashadi, at al, 2016; Mashadi, 2015[a]:66; Mashadi, 2015[b]:139; Mashadi, 2016:170, Valentika, at al, 2016). Pada tulisan ini pengembangan teorema Van Aubel segiempat saling silang dimana sisi-sisinya dibangun setengah lingkaran mengarah keluar, untuk menunjukkan terdapat dua ruas garis sama panjang dan saling berpotongan tegak lurus, penulis akan membuktikan dengan menggunakan konsep-konsep yang dapat dipahami secara umum oleh siswa

To cite this article:
Manalu, M., Mashadi, & Gemawati, S. (2022). Pengembangan Teorema Van Aubel pada Segiempat Saling Silang .*PRISMA, Prosiding Seminar NasionalMatematika 5*, 850-860

tingkat Sekolah Menengah Atas khususnya kelompok IPA yaitu konsep kesebangunan, kekongruenan, aturan kosinus dan teorema pendukung lainnya.



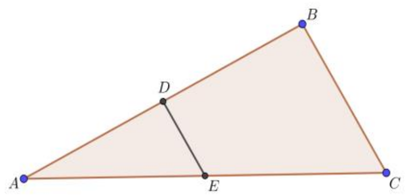
Gambar 1. ilustrasi teorema Van Aubel pada segiempat.

2. Kajian teoritis

Berikut ini adalah beberapa definisi dan teorema pendukung yang digunakan untuk dapat membuktikan pengembangan teorema Van Aubel pada segiempat saling silang.

2.1. Teorema titik tengah segitiga

Teorema 1. Pada sebarang segitiga *ABC*, *D* dan *E* berturut-turut merupakan titik tengah sisi *AB* dan *AC* maka berlaku $DE = \frac{1}{2} BC$ (Bataille, 2007).



Gambar 2. ilustrasi teorema titik tengah pada segitiga *ABC*.

2.2. Segiempat saling silang dan luas segiempat saling silang

Definisi 2. Suatu segiempat dinyatakan saling silang jika terdapat empat sudut *interior* di kedua sisi persimpangan yang berjumlah 720° (De Villers, 2015).

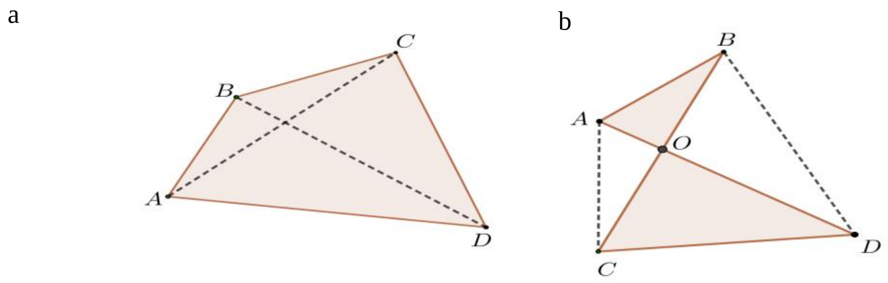
Definisi 3. Secara umum luas segiempat konveks merupakan jumlah luas dua segitiga yang dipartisi oleh sebuah diagonal, demikian juga untuk kasus bidang datar segiempat nonkonveks dan segiempat saling silang, luasnya dapat dipartisi menjadi jumlah luas dua segitiga yang dibatasi oleh sebuah diagonal, perbedaannya hasil dari luas segitiga yang dipartisi harus berpedoman pada aturan *clockwise* atau *counter clockwise* , dimana luas segitiga dapat dianggap sebagai positif atau negatif sesuai dengan arah titik sudut segitiga searah jarum jam atau sebaliknya, misalnya untuk luas segitiga ABC atau ditulis (ABC) = (BCA) = (CAB) = - (CBA) = - (ACB) = - (BAC). Hal ini disebuat aturan *clockwise* atau aturan searah jam. Berdasarkan aturan *clockwise* tersebut luas segiempat saling silang *ABCD* diperoleh dengan rumus berikut:

$(ABCD) = (ABC) + (CDA) = (ABC) – (ADC)$

$(ABCD) = (ABD) + (BCD) = (ABD) – (BDC)$

karena luas segiempat saling silang harus menghasilkan nilai yang positif, sehingga rumus luas sebarang segiempat saling silang *ABCD* dapat didefinisikan dengan (*ABCD*) (De Villers, 2015).

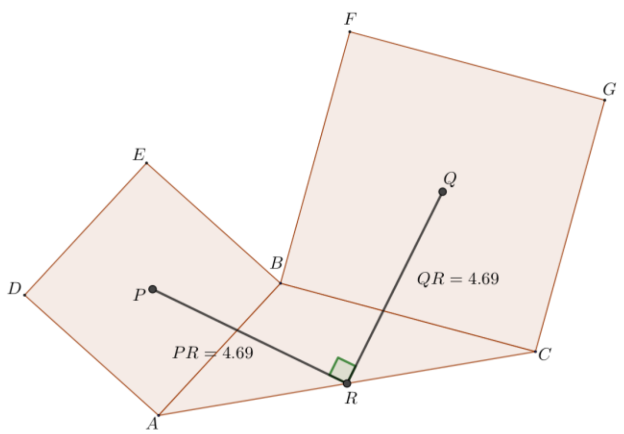
$$(ABCD) = (ABC) + (CDA) = (ABC) - (ADC) = (ABD) - (BDC) = \left|(ABO) - (CDO)\right|$$



Gambar 3. (a) ilustrai segiempat konveks *ABCD*; (b) ilustrasi segiempat saling silang *ABCD*.

2.3. Teorema Van Aubel bidang segitiga

Teorema 4. Diberikan sebarang segitiga *ABC*, masing-masing sisi *AB* dan *AC* dibangun persegi mengarah keluar, maka panjang ruas garis yang menghubungkan titik tengah AC ke masing-masing titik pusat atau titik potong diagonal persegi yang dibangun adalah sama panjang dan saling tegak lurus (Gardner, 1992).



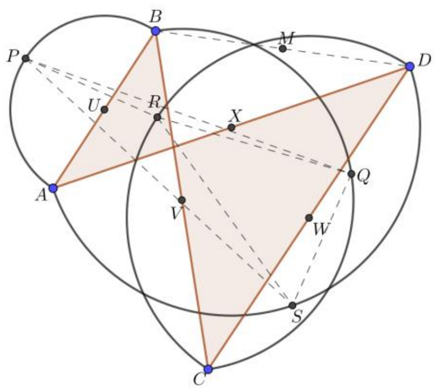
Gambar 4. ilustrasi teorema Van Aubel pada segitiga.

2.4. Teorema segiempat ortodiagonal

Teorema 5. Untuk sebarang segiempat *ABCD*, segiempat tersebut dikatakan ortodiagonal jika dan hanya jika $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ (Josefsson, 2012).

3. Hasil dan Pembahasan

Teorema 6. Pada sebarang segiempat saling silang *ABCD*, keempat sisinya dibangun setengah lingkaran yang dilukis searah jarum jam mengikuti titik simpul masing-masing diameternya atau setengah lingkaran yang mengarah keluar (*outer* Napoleon *semicircle*). Titik *P*, *Q*, *R*, dan *S* berturut-turut merupakan titik potong masing-masing busur setengah lingkaran dengan garis yang tegak lurus pada titik tengah diameter *AB*, *BC*, *CD*, dan *AD*. jika masing-masing titik tersebut saling dihubungkan maka diperoleh *PR* = *QS* dan *PR* tegak lurus *QS*.



Gambar 5. ilustrasi pengembangan teorema Van Aubel pada segiempat saling silang, masing-masing sisi segiempat dibangun setengah lingkaran searah jarum jam sesuai titik simpul masing-masing diameternya atau mengarah keluar (*outer* Napoleon *semicircle*).

Bukti: Akan dibuktikan *PR* = *QS*. Tarik diagonal luar *BC*, misalkan *M* titik tengah diagonal luar *BD*, *AB* = *a*, *BC* = *b*, *CD* = *c*, *AD* = *d*, *U* titik tengah *AB*, *V* titik tengah *BC*, *W* titik tengah *CD*, dan *X* titik tengah *AD*. Selanjutnya akan ditentukan panjang *PM* dengan menggunakan aturan kosinus. pandang Δ *PUM* diperoleh

$$PM^2 = PU^2 + UM^2 - 2PU.UM\cos(\angle PUM)$$

berdasarkan teorema titik tengah pada Δ *ABD*, panjang $UM = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}d$, dan $\angle BUM = \angle BAD = \angle MXD$ (sudut sehadap) maka berlaku

$$PM^2 = (\frac{1}{2}a)^2 + (\frac{1}{2}d)^2 - 2(\frac{1}{2}a)(\frac{1}{2}d)\cos(90^{\circ} + \angle BUM)$$

$$PM^2 = (\frac{1}{2}a)^2 + (\frac{1}{2}d)^2 - \frac{1}{2}ad\cos(90^{\circ} + \angle BUM)$$

$$PM^2 = (\frac{1}{2}a)^2 + (\frac{1}{2}d)^2 - \frac{1}{2}ad\cos(90^{\circ} + \angle BAD)$$

$$PM^2 = (\frac{1}{2}a)^2 + (\frac{1}{2}d)^2 - \frac{1}{2}ad\,[\cos 90^o \cos\angle \mathrm{BAD} - \sin 90^o \sin\angle BAD]$$

$$PM^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}d^2 + \frac{1}{2}ad\,\sin\angle BAD \qquad (1)$$

pandang $\Delta\ MXS$ diperoleh panjang MS dengan menggunakan aturan kosinus

$$M\mathrm{S}^2 = M\mathrm{X}^2 + \mathrm{XS}^2 - 2M\mathrm{X}.XS\cos(\angle M\mathrm{XS})$$

berdasarkan teorema titik tengah pada segitiga ABD,panjang $M\mathrm{X} = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a$, maka berlaku

$$M\mathrm{S}^2 = (\frac{1}{2}a)^2 + (\frac{1}{2}d)^2 - 2(\frac{1}{2}a)(\frac{1}{2}\mathrm{d})\cos(90^o + \angle MXD)$$

$$M\mathrm{S}^2 = (\frac{1}{2}a)^2 + (\frac{1}{2}d)^2 - \frac{1}{2}ad\cos(90^o + \angle MXD)$$

$$M\mathrm{S}^2 = (\frac{1}{2}a)^2 + (\frac{1}{2}d)^2 - \frac{1}{2}ad\cos(90^o + \angle BAD)$$

$$MS^2 = (\frac{1}{2}a)^2 + (\frac{1}{2}d)^2 - \frac{1}{2}ad\,[\cos 90^o \cos\angle \mathrm{BAD} - \sin 90^o \sin\angle BAD]$$

$$M\mathrm{S}^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}d^2 + \frac{1}{2}ad\,\sin\angle BAD \qquad (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh bahwa

$$\boldsymbol{PM = MS} \qquad (3)$$

Selanjutnya berdasarkan teorema titik tengah pada Δ BCD, panjang $MV = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}c$, $MW = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}b$ dan $\angle MVB = \angle BCD = \angle M\mathrm{WD}$. pandang $\Delta\ MVQ$ maka berlaku

$$MQ^2 = QV^2 + MV^2 - 2QV.MV\cos(\angle QVM)$$

$$MQ^2 = (\frac{1}{2}b)^2 + (\frac{1}{2}c)^2 - 2(\frac{1}{2}b)(\frac{1}{2}c)\cos(90^o - \angle MVB)$$

$$MQ^2 = (\frac{1}{2}b)^2 + (\frac{1}{2}c)^2 - \frac{1}{2}bc\cos(90^o - \angle MVB)$$

$$MQ^2 = (\frac{1}{2}b)^2 + (\frac{1}{2}c)^2 - \frac{1}{2}b\mathrm{c}(\cos 90^o \cos\angle BCD + \sin 90^o \sin\angle BCD)$$

$$MQ^2 = \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{2}b\mathrm{c}\sin \angle BCD \tag{4}$$

pandang Δ *MWR* maka berlaku

$$MR^2 = R\mathrm{W}^2 + MW^2 - 2R\mathrm{W}.MW\cos(\angle MWR)$$

$$MR^2 = (\frac{1}{2}c)^2 + (\frac{1}{2}b)^2 - 2(\frac{1}{2}c)(\frac{1}{2}b)\cos(90^{\mathrm{o}} - \angle MWD)$$

$$MR^2 = (\frac{1}{2}c)^2 + (\frac{1}{2}b)^2 - \frac{1}{2}bc\cos(90^{\mathrm{o}} - \angle MWD)$$

$$MR^2 = (\frac{1}{2}c)^2 + (\frac{1}{2}b)^2 - \frac{1}{2}b\mathrm{c}(\cos 90^{\mathrm{o}}\cos\angle BCD + \sin 90^{\mathrm{o}}\sin\angle BCD)$$

$$MR^2 = \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{2}b\mathrm{c}\sin \angle BCD \tag{5}$$

Dari persamaan (3) dan (4) diperoleh bahwa

$$\boldsymbol{MQ = MR} \tag{6}$$

Selanjutnya akan dikonstruksi Δ *PAS,* panjang *PS* diperoleh dengan menggunakan aturan kosinus

$$P\mathrm{S}^2 = P\mathrm{A}^2 + S\mathrm{A}^2 - 2PA.SA\cos(\angle P\mathrm{AS})$$

$$P\mathrm{S}^2 = (\frac{1}{2}a\sqrt{2})^2 + (\frac{1}{2}d\sqrt{2})^2 - 2(\frac{1}{2}a\sqrt{2})(\frac{1}{2}d\sqrt{2}).\cos(45^{\mathrm{o}} + \angle BAD + 45^{\mathrm{o}})$$

$$P\mathrm{S}^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}d^2 + ad\ sin\angle BAD \tag{7}$$

Dari persamaan (1), (2) dan (7) diperoleh

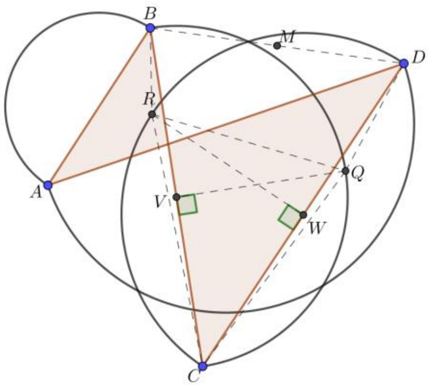
$$P\mathrm{S}^2 = PM^2 + MS^2$$

akibatnya

$$\boldsymbol{PM \perp MS} \tag{8}$$

Selanjutnya akan dikonstruksi Δ *QCR*, panjang *QR* diperoleh dengan menggunakan aturan kosinus

$$QR^2 = QC^2 + RC^2 - 2QC.RC\cos\angle QCR$$



Gambar 6. partisi segiempat saling silang *ABCD* yang memuat Δ *QCR*.

Pandang Δ *QCR*, Δ *QCD*, Δ *BCD* pada Gambar 6, misal $\angle BCR = \alpha, \angle QCD = \beta$ maka $\alpha + \angle BCD = \beta + \angle BCD = 45^{o}$, akibatnya $\alpha = \beta$ dan $\angle QCR = 90^{o} - \angle BCD$.

Selanjutnya diperoleh

$$QR^2 = (\frac{1}{2}b\sqrt{2})^2 + (\frac{1}{2}c\sqrt{2})^2 - 2(\frac{1}{2}b\sqrt{2})(\frac{1}{2}c\sqrt{2}).\cos(90^{o} - \angle BCD)$$

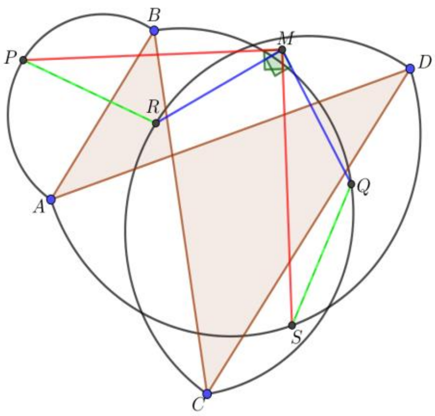
$$QR^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - bc\sin\angle BCD \qquad (9)$$

Dari persamaan (4), (5) dan (9) diperoleh

$$QR^2 = MQ^2 + MR^2$$

akibatnya

$$\boldsymbol{MQ \perp MR} \qquad (10)$$



Gambar 7. ilustrasi *PM* = *MS*, $PM \perp MS$, *MQ*=*MR*, dan $MQ \perp MR$.

Pandang Δ *PMR* maka berlaku aturan kosinus

$$PR^2 = PM^2 + MR^2 - 2PM.MR\cos\angle PMR$$

$$PR^2 = PM^2 + MR^2 - 2PM.MR\cos(90^o - \angle RMS) \quad (11)$$

Pandang Δ *QMS* maka berlaku aturan kosinus

$$QS^2 = MQ^2 + MS^2 - 2MQ.MS\cos\angle QMS$$

$$QS^2 = MQ^2 + MS^2 - 2MQ.MS\cos(90^o - \angle RMS)$$

Dari persamaan (3) dan (6) diperoleh bahwa *PM* = *MS* dan *MQ* = *MR*, sehingga

$$QS^2 = PM^2 + MR^2 - 2PM.MR\cos(90^o - \angle RMS) \quad (12)$$

Berdasarkan persamaan (11) dan (12) diperoleh $PR^2 = QS^2$, akibatnya diperoleh ***PR* = *QS***.

Bukti Alternatif. Dari Δ *PMR* dan Δ *QMS* pada gambar 6 akan ditunjukkan *PR* = *QS* dengan menggunakan konsep kekongruenan segitiga sebagai berikut

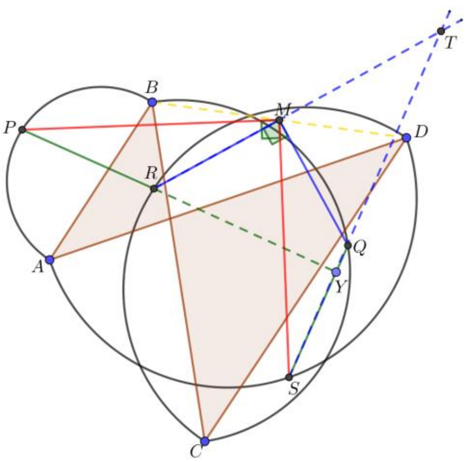
PM = *MS* (sisi)

$\angle PMR = \angle QMR = 90^o - \angle RMS$ (sudut)

MR = *MQ* (sisi)

karena Δ *PMR* dan Δ *QMS* memenuhi sifat kekongruenan segitiga, hal ini menunjukkan ***PR* = *QS*.**

Selanjutnya akan ditunjukkan *PR* dan *QS* berpotongan tegak lurus dengan menggunakan hubungan antara sudut pada segitiga.



Gambar 8. ilustrasi perpanjangan *PR* memotong *QS* di *Y*, perpanjangan *RM* dan *QS* berpotongan di titik *T* .

Bukti alternatif 1. Berdasarkan gambar 8, *Y* adalah titik potong perpanjangan garis *PR* dengan *QS*, dan *T* merupakan titik potong perpanjangan masing-masing garis *QS* dan *MR*. Diketahui Δ *PMR* dan Δ *QMS* merupakan dua segitiga yang kongruen, dengan memisalkan $\angle MRP = \angle MQS = \alpha$ dan $\angle QTM = \beta$ akan diperoleh $\angle MQT = \angle TRY = 180^o - \alpha$.

Pandang Δ *TMQ* diperoleh

$$\angle MQT + \angle Q\mathrm{TM} = 90^o,$$

$$(180^o - \alpha) + \beta = 90^o,$$

$$\alpha - \beta = 90^o \tag{13}$$

Pandang Δ *RTY* diperoleh

$$\angle TRY + \angle RTY + \angle TYR = 180^o,$$

$$(180^o - \alpha) + \beta + \angle TYR = 180^o,$$

$$\angle TYR = \alpha - \beta \tag{14}$$

Dari persamaan (13) dan (14) diperoleh $\angle TYR = 90^o$, sehingga diperoleh ***PR*** tegak lurus ***QS***.

Bukti alternatif 2. Berikut ini akan ditunjukkan *PR* tegak lurus *QS* menggunakan konsep luas segitiga dan teorema ortodiagonal. Berdasarkan gambar 9 akan dikonstruksi segiempat nonkonveks *PQRS* dengan diagonal *PR* dan diagonal luar *QS*, selanjutnya ditentukan panjang *PQ*, *QR*, *RS*, dan *PS* diperoleh menggunakan aturan kosinus

$$PQ^2 = PB^2 + BQ^2 - 2PB.BQ\cos(\angle PBQ)$$

$$PQ^2 = (\frac{1}{2}a\sqrt{2})^2 + (\frac{1}{2}b\sqrt{2})^2 - 2(\frac{1}{2}a\sqrt{2})(\frac{1}{2}b\sqrt{2}).\cos(90^o + \angle ABC)$$

$$PQ^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 + ab\,sin\angle ABC$$

dari persamaan (9) diperoleh

$$QR^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - bc\sin\angle BCD$$

selanjutnya *RS* diperoleh dengan aturan kosinus

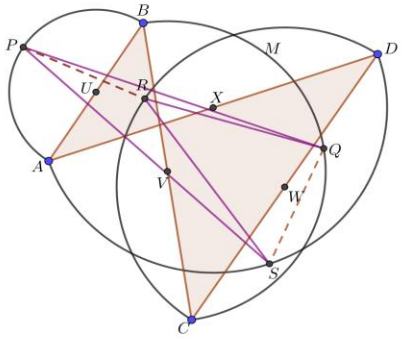
$$RS^2 = RD^2 + SD^2 - 2RD.SD\cos\angle RDS$$

$$RS^2 = (\frac{1}{2}c\sqrt{2})^2 + (\frac{1}{2}d\sqrt{2})^2 - 2(\frac{1}{2}c\sqrt{2})(\frac{1}{2}d\sqrt{2}).\cos(90^o - \angle ADC)$$

$$RS^2 = \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}d^2 - cd\sin\angle ADC$$

dari persamaan (7) diperoleh

$$PS^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}d^2 + ad\,sin\angle BAD$$



Gambar 9. segiempat nonkonveks *PQRS* dengan diagonal *PR* dan *QS*.

Selanjutnya akan ditentukan hubungan PQ^2, RS^2, QR^2, dan PS^2 dengan cara berikut,

$$PQ^2 + RS^2 - QR^2 - PS^2 = \left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 + ab\, sin\angle ABC\right) + \left(\frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}d^2 - cd \sin\angle ADC\right)$$

$$-\left(\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - bc \sin\angle BCD\right) - \left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}d^2 + ad\, sin\angle BAD\right),$$

akibatnya diperoleh

$$PQ^2 + RS^2 - QR^2 - PS^2 = ab\sin\angle ABC - cd\sin\angle ADC + bc\sin\angle BCD - ad\sin\angle BAD$$

Berdasarkan luas segitiga $(ABC) = \frac{1}{2}ab\sin\angle ABC$, $(ADC) = \frac{1}{2}cd\sin\angle ADC$, $(BCD) = \frac{1}{2}bc\sin\angle BCD$, dan $(ABD) = \frac{1}{2}ad\sin\angle BAD$, maka diperoleh

$$PQ^2 + RS^2 - QR^2 - PS^2 = 2(ABC) - 2(ADC) + 2(BCD) - 2(ABD)$$

Berdasarkan gambar 9 dan aturan *clockwise* pada segiempat saling silang (*BCD*) = - (*BDC*) diperoleh

$$\boldsymbol{PQ}^2 + \boldsymbol{RS}^2 - \boldsymbol{QR}^2 - \boldsymbol{PS}^2 = 2[((\boldsymbol{ABC}) - (\boldsymbol{ADC})) - ((\boldsymbol{ABD}) - (\boldsymbol{BDC}))]$$

Selanjutnya berdasarkan luas segiempat saling-silang pada **definisi 2**, diperoleh

$$PQ^2 + RS^2 - QR^2 - PS^2 = 2[(ABCD) - (ABCD)] = 0$$

sehingga diperoleh

$$\boldsymbol{PQ}^2 + \boldsymbol{RS}^2 = \boldsymbol{QR}^2 + \boldsymbol{PS}^2$$

Berdasarkan **teorema 5** telah ditunjukkan bahwa segiempat *PQRS* adalah segiempat ortodiagonal yang mengakibatkan diagonal *PR* tegak lurus diagonal *QS* atau $\boldsymbol{PR} \perp \boldsymbol{QS}$.

Dari hasil dan pembahasan diatas maka teorema 6 telah terbukti. ■

4. Simpulan

Dari pembahasan diatas dapat disimpulkan bahwa teorema Van Aubel dapat diterapkan pada segiempat saling silang dengan mengkonstruksi setengah lingkaran pada masing-masing keempat sisinya, sehingga dapat ditemukan ada dua ruas garis dengan panjang yang sama serta saling tegak lurus. Hal ini dapat dibuktikan dengan menggunakan beberapa definisi dan teorema pendukung yang dapat dipahami oleh siswa setingkat SMA.

Daftar Pustaka

Josefsson, M. (2012). Characterizations of orthodiagonal quadrilaterals. In *Forum Geom* (Vol. 12, pp. 13-25).

Nishiyama, Y. (2011). The beautiful geometric theorem of van Aubel. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, *66*(1), 71-80.

Krishna, D. N. V. (2016). A new consequence of Van Aubel's Theorem. Departement of Mathematics Narayana Education Institution, 1, 1-9.

Krishna, D. N. V. (2018). A note on special cases of Van Aubel's theorem. *International Jounal of Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, *5*(4), 30-51.

M. D. Villiers. 2000. Generalizing Van Aubel Using Duality, *Mathematics Magazine* 73 (4): 303 – 307.

Maywidia, W., & Gemawati, S.(2018). *BENTUK LAIN TEOREMA VAN AUBEL PADA SEGITIGA*. Infinite Study.

Mulyadi, M., Mashadi, M., Saleh, H., & Hasriati, H. (2017). PENGEMBANGAN TEOREMA VAN AUBEL PADA SEGIENAM. *Jurnal Mathematic Paedagogic*, *1*(2), 119-128.

Glaister, P. (2016). A proof of van Aubel's theorem using orthogonal vectors. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *47*(3), 440-443.

Jain, A. (2017). Geometry of numbers and its applications. *International Journal of statistics and applied mathematics*, 2(6), 103-105.

De Villiers, M. (2015). Slaying a geometrical'Monster': finding the area of a crossed Quadrilateral. *Learning and Teaching Mathematics*, *2015*(18), 23-28.

Bataille, M. (2007). Cyclic Quadrilaterals with Prescribed Varignon Parallelogram. In *Forum Geometricorum* (Vol. 7, pp. 199-206).

Wardiah, Mashadi, & Gemawati, S. (2016). Relationship Of Lemoine Circle With A Symmedian Point. *Journal of Mathematical Sciences*, *17*(2), 23-33.

Mashadi. 2015[a]. *Geometri* (edisi kedua), Unri Press, Pekanbaru.

Mashadi. 2015[b]. *Geometri lanjut*, Unri Press, Pekanbaru.

Mashadi. 2016. *Pengajaran matematika*, UR Press, Pekanbaru

Gardner, M. (1992). *Mathematical circus*. The mathematical Association of America.

Valentika, C., Mashadi, S. G., & Gemawati, S. (2016). The Development Of Napoleon's Theorem On Quadrilateral With Congruence And Trigonometry. *Bulletin of Mathematics*, *8*(1), 97-108.