

Kekuatan Sisi Refleksif pada Graf Parasut Diperumum P_4^m dan P_5^m

Maulida Awalina^{a*}, Diari Indriati^b

^{a,b} Program Studi Matematika FMIPA Universitas Sebelas Maret, Jalan IR. Sutami 36A Ketingan, Surakarta 57126, Indonesia

* Alamat Surel: maulidaawalina30@student.uns.ac.id

Abstrak

Misalkan G merupakan graf sederhana dan terhubung dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Pelabelan k -refleksif tak teratur sisi pada graf G adalah pemberian bilangan bulat positif $\{1, 2, \dots, k_e\}$ untuk label sisi dan bilangan genap dari $\{0, 2, \dots, 2k_v\}$ untuk label titik, dengan $k = \max\{k_e, 2k_v\}$ sehingga bobot pada setiap sisi dari graf G berbeda. Bobot sisi didefinisikan sebagai jumlahan label sisi dengan semua label titik yang *incident* dengan sisi tersebut. Bobot sisi xy terhadap pelabelan f dari graf G dinotasikan $wt(xy)$ dengan $wt(xy) = f(x) + f(xy) + f(y)$. Nilai minimum k pada graf G yang dapat dilabeli dengan pelabelan- k refleksif tak teratur sisi disebut dengan kekuatan sisi refleksif yang dinotasikan dengan $res(G)$. Pada makalah ini akan ditentukan kekuatan sisi refleksif pada graf parasut diperumum P_4^m dan P_5^m .

Kata kunci:

Pelabelan refleksif tak teratur sisi, kekuatan sisi refleksif, graf parasut diperumum

© 2022 Dipublikasikan oleh Jurusan Matematika, Universitas Negeri Semarang

1. Pendahuluan

Suatu graf G terdiri dari himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Salah satu topik dalam teori graf adalah pelabelan. Menurut Wallis (2001), pelabelan suatu graf sebagai pemetaan yang membawa elemen-elemen graf sebagai domain ke bilangan bulat positif atau non negatif sebagai kodomain. Jenis pelabelan graf dibagi menjadi pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan titik dan sisi atau disebut dengan pelabelan total. Seiring berjalannya waktu, terdapat perkembangan pada pelabelan dalam graf, salah satunya adalah pelabelan total tak teratur. Menurut Bača *et al.* (2007), pelabelan total tak teratur terbagi menjadi pelabelan total tak teratur sisi dan pelabelan total tak teratur titik.

Pada tahun 2017, Ryan *et al.* memperkenalkan sebuah konsep baru dari pelabelan total tak teratur yaitu pelabelan refleksif tak teratur sisi (*edge irregular reflexive labelling*) pada suatu graf (Baca *et al.*, 2019). Pelabelan k -refleksif tak teratur sisi pada graf G adalah pemberian label untuk sisi dengan bilangan bulat positif $\{1, 2, \dots, k_e\}$ dan bilangan genap dari $\{0, 2, \dots, 2k_v\}$ untuk label titik, dengan $k = \max\{k_e, 2k_v\}$ sehingga bobot pada setiap sisi dari graf G berbeda. Bobot sisi didefinisikan sebagai jumlahan label sisi dengan semua label titik yang *incident* dengan sisi tersebut. Bobot sisi xy terhadap pelabelan f dari graf G dinotasikan $wt(xy)$ dengan $wt(xy) = f(x) + f(xy) + f(y)$. Nilai minimum k pada graf G yang dapat dilabeli dengan pelabelan- k refleksif tak teratur sisi disebut dengan kekuatan sisi refleksif yang dinotasikan dengan $res(G)$. Berikut lema yang diberikan oleh Ryan *et al.* (Baca *et al.*, 2019).

Lema 1. Untuk setiap graf G ,

$$res(G) \geq \begin{cases} \left\lceil \frac{|E(G)|}{3} \right\rceil, & \text{untuk } |E(G)| \not\equiv 2, 3 \pmod{6}, \\ \left\lceil \frac{|E(G)|}{3} \right\rceil + 1, & \text{untuk } |E(G)| \equiv 2, 3 \pmod{6}. \end{cases} \quad (1)$$

Pada pelabelan refleksif tak teratur sisi, terdapat beberapa graf yang sudah diteliti diantaranya yaitu pada tahun 2017, Bača *et al.* (2017) meneliti graf *Generalized Friendship* $f_{n,m}$, di tahun yang sama Tanna *et al.* (2017) meneliti graf prisma D_n , graf kipas F_n , graf roda W_n , dan graf basket B_n . Selanjutnya tahun 2019, Bača *et al.* (2019) meneliti graf *cycle* C_n , dan di tahun 2020 Indriati *et al.* (2020) meneliti graf

To cite this article:

Awalina, M., dan Indriati, D. (20192). Kekuatan Sisi Refleksif Pada Graf Parasut Diperumum P_4^m dan P_5^m . *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika* 5, 814-819

lintasan korona graf lengkap K_1 , dan graf lintasan korona graf lintasan P_2 . Pada penelitian ini akan ditentukan $res(G)$ dari graf parasut diperumum P_4^m dan P_5^m .

2. Pembahasan

Graf parasut diperumum dinotasikan dengan P_n^m , yang mana n merupakan banyaknya titik pada graf *path* P_n dan m merupakan panjang *path* lurus yang ditambahkan di bawah graf *double fan* (Husnul & Yeni, 2019). Graf parasut diperumum P_n^m memiliki himpunan titik $V(P_n^m) = \{u, x_1, x_2, \dots, x_n, u', y_1, y_2, \dots, y_m\}$ dan mempunyai himpunan sisi $E(P_n^m) = \{e_1, e_2, \dots, e_{3n+m-1}\}$, $m \geq 1, n \geq 2$. Graf parasut diperumum memiliki $n + m + 2$ titik dan $3n + m - 1$ sisi.

Graf parasut diperumum P_4^m adalah graf yang menghubungkan graf *path* P^m dengan titik pada graf *double fan* dengan $n = 4$ dan mempunyai $4 + m + 2$ titik dengan $3(4) + m - 1$ sisi. Graf parasut diperumum P_5^m adalah graf yang menghubungkan graf *path* P^m dengan titik pada graf *double fan* dengan $n = 5$ dan mempunyai $5 + m + 2$ titik dengan $3(5) + m - 1$ sisi. Kekuatan sisi refleksif dari graf parasut diperumum P_4^m dan P_5^m dapat diperoleh melalui Teorema 1 dan Teorema 2.

Teorema 1. Untuk setiap bilangan bulat n, m dengan $n = 4$ dan $m \geq 1$,

$$res(P_4^m) = \begin{cases} 5, & \text{untuk } m = 1, \\ \left\lfloor \frac{m+11}{3} \right\rfloor, & \text{untuk } m \not\equiv 3,4 \pmod{6}, \\ \left\lfloor \frac{m+11}{3} \right\rfloor + 1, & \text{untuk } m \equiv 3,4 \pmod{6}. \end{cases}$$

Bukti. Pertama dibuktikan batas bawah dari $res(P_4^m)$. Graf parasut diperumum mempunyai $m + 11$ sisi. Dengan menggunakan Lema (1) diperoleh

$$res(G) \geq \begin{cases} \left\lfloor \frac{m+11}{3} \right\rfloor, & \text{untuk } (m+11) \not\equiv 2,3 \pmod{6}, \\ \left\lfloor \frac{m+11}{3} \right\rfloor + 1, & \text{untuk } (m+11) \equiv 2,3 \pmod{6}. \end{cases}$$

Pernyataan tersebut ekuivalen dengan pernyataan:

$$res(P_4^m) \geq \begin{cases} \left\lfloor \frac{m+11}{3} \right\rfloor, & \text{untuk } m \not\equiv 3,4 \pmod{6}, \\ \left\lfloor \frac{m+11}{3} \right\rfloor + 1, & \text{untuk } m \equiv 3,4 \pmod{6}. \end{cases}$$

Selanjutnya, dibuktikan batas bawah dari $res(P_4^m)$ adalah 5 untuk $m = 1$. Graf parasut diperumum P_4^1 mempunyai 7 titik ($u, x_1, x_2, x_3, x_4, u', y_1$) dan 12 sisi (ux_i) untuk $i = 1, 2, 3, 4$; ($x_i x_{i+1}$) untuk $i = 1, 2, 3$; ($x_i u'$) untuk $i = 1, 2, 3, 4$; ($u' y_1$) dan ($y_j y_{j+1}$) untuk $1 \leq j \leq m - 1$. Berdasarkan Lema (1) diperoleh batas bawah dari graf parasut diperumum $P_4^1 = 4$. Jadi, diasumsikan $res(P_4^1) = 4$, didapatkan label terbesar titik dan sisi sebesar 4, maka kemungkinan label titik dan sisi dengan bobot sisi 1 hingga 12, sebagai berikut,

$$\begin{aligned} wt_f(ux_1) &= f(u) + f(ux_1) + f(x_1) = 0 + 1 + 0 = 1, \\ wt_f(ux_2) &= f(u) + f(ux_2) + f(x_2) = 0 + 2 + 0 = 2, \\ wt_f(ux_3) &= f(u) + f(ux_3) + f(x_3) = 0 + 1 + 2 = 3, \\ wt_f(ux_4) &= f(u) + f(ux_4) + f(x_4) = 0 + 2 + 2 = 4, \\ wt_f(x_1 x_2) &= f(x_1) + f(x_1 x_2) + f(x_2) = 0 + 4 + 0 = 4, \\ wt_f(x_2 x_3) &= f(x_2) + f(x_2 x_3) + f(x_3) = 0 + 4 + 2 = 6, \\ wt_f(x_3 x_4) &= f(x_3) + f(x_3 x_4) + f(x_4) = 2 + 3 + 2 = 7, \\ wt_f(x_1 u') &= f(x_1) + f(x_1 u') + f(u') = 0 + 4 + 4 = 8, \\ wt_f(x_2 u') &= f(x_2) + f(x_2 u') + f(u') = 0 + 4 + 4 = 8, \\ wt_f(x_3 u') &= f(x_3) + f(x_3 u') + f(u') = 2 + 4 + 4 = 10, \\ wt_f(x_4 u') &= f(x_4) + f(x_4 u') + f(u') = 2 + 4 + 4 = 10, \\ wt_f(u' y_1) &= f(u') + f(u' y_1) + f(y_1) = 4 + 4 + 4 = 12. \end{aligned}$$

Ternyata formula tersebut tidak dapat diterapkan. Kemudian asumsikan $res(P_4^1) \geq 5$, kemungkinan didapatkan label titik dan sisi sebagai berikut,

$$\begin{aligned} wt_f(ux_1) &= f(u) + f(ux_1) + f(x_1) = 0 + 1 + 0 = 1, \\ wt_f(ux_2) &= f(u) + f(ux_2) + f(x_2) = 0 + 2 + 0 = 2, \\ wt_f(ux_3) &= f(u) + f(ux_3) + f(x_3) = 0 + 1 + 2 = 3, \\ wt_f(ux_4) &= f(u) + f(ux_4) + f(x_4) = 0 + 2 + 2 = 4, \\ wt_f(x_1x_2) &= f(x_1) + f(x_1x_2) + f(x_2) = 0 + 5 + 0 = 5, \\ wt_f(x_2x_3) &= f(x_2) + f(x_2x_3) + f(x_3) = 0 + 4 + 2 = 6, \\ wt_f(x_3x_4) &= f(x_3) + f(x_3x_4) + f(x_4) = 2 + 3 + 2 = 7, \\ wt_f(x_1u') &= f(x_1) + f(x_1u') + f(u') = 0 + 4 + 4 = 8, \\ wt_f(x_2u') &= f(x_2) + f(x_2u') + f(u') = 0 + 5 + 4 = 9, \\ wt_f(x_3u') &= f(x_3) + f(x_3u') + f(u') = 2 + 4 + 4 = 10, \\ wt_f(x_4u') &= f(x_4) + f(x_4u') + f(u') = 2 + 5 + 4 = 11, \\ wt_f(u'y_1) &= f(u') + f(u'y_1) + f(y_1) = 4 + 4 + 4 = 12. \end{aligned}$$

Formula tersebut dapat diterapkan. Jadi 5 tepat untuk $res(P_4^1)$. Selanjutnya, dibuktikan batas atas dari graf parasut diperumum P_4^m dengan

$$k = \begin{cases} 5, & \text{untuk } m = 1, \\ \left\lfloor \frac{m+11}{3} \right\rfloor, & \text{untuk } m \not\equiv 3,4 \pmod{6}, \\ \left\lfloor \frac{m+11}{3} \right\rfloor + 1, & \text{untuk } m \equiv 3,4 \pmod{6}. \end{cases}$$

Dikonstruksi f pada pelabelan- k graf parasut diperumum P_4^m sebagai berikut,

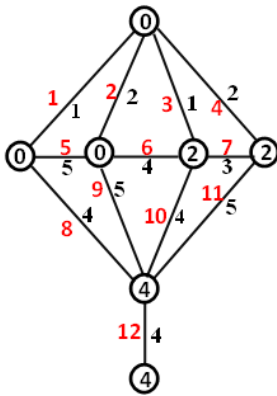
$$\begin{aligned} f(u) &= 0, & \text{untuk } m \geq 1, \\ f(x_i) &= \begin{cases} i-1, & \text{untuk } i \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq 4, \\ i-2, & \text{untuk } i \text{ genap}, 1 \leq i \leq 4, \end{cases} \\ f(u') &= 4, & \text{untuk } m \geq 1, \\ f(y_j) &= \begin{cases} \left\lfloor \frac{j+9}{3} \right\rfloor, & \text{untuk } 1 \leq j \leq m, j \equiv 1, 2, 3 \pmod{6}, \\ \left\lfloor \frac{j+9}{3} \right\rfloor + 1, & \text{untuk } 1 \leq j \leq m, j \equiv 0, 4, 5 \pmod{6}, \end{cases} \\ f(ux_i) &= \begin{cases} 1, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil}, \\ 2, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}, \end{cases} \\ f(x_ix_{i+1}) &= 6 - i, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n-1, \\ f(x_iu') &= \begin{cases} 4, & \text{untuk } i \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq n, \\ 5, & \text{untuk } i \text{ genap}, 1 \leq i \leq n, \end{cases} \\ f(u'y_1) &= 4, & \text{untuk } m \geq 1, \\ f(y_jy_{j+1}) &= \begin{cases} \frac{j+12}{3}, & \text{untuk } 1 \leq j \leq m-1, j \equiv 0, 3 \pmod{6}, \\ \left\lfloor \frac{j+8}{3} \right\rfloor, & \text{untuk } 1 \leq j \leq m-1, j \equiv 4, 5 \pmod{6}, \\ \left\lfloor \frac{j+14}{3} \right\rfloor, & \text{untuk } 1 \leq j \leq m-1, j \equiv 1, 2 \pmod{6}. \end{cases} \end{aligned}$$

Dari pembuktian batas bawah dan batas atas, dapat diketahui bahwa maksimum label titik dan sisi adalah 5 untuk $m = 1$; $\left\lfloor \frac{m+11}{3} \right\rfloor$ untuk $m \not\equiv 3,4 \pmod{6}$; dan $\left\lfloor \frac{m+11}{3} \right\rfloor + 1$ untuk $m \equiv 3,4 \pmod{6}$. Dapat dilihat label titik merupakan bilangan bulat genap, sehingga diperoleh bobot sisi sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
 wt(ux_i) &= i, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n, \\
 wt(x_i x_{i+1}) &= i + 4, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n - 1, \\
 wt(x_i u') &= i + 7, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n, \\
 wt(u'y_1) &= 12, & \text{untuk } m \geq 1, \\
 wt(y_j y_{j+1}) &= j + 12, & \text{untuk } 1 \leq j \leq m - 1.
 \end{aligned}$$

Dari bobot sisi, dapat dilihat bahwa graf parasut diperumum P_4^m mempunyai bobot berbeda, sehingga f memenuhi elemen pelabelan- k refleksif tak teratur sisi. Batas bawah sama dengan batas atas, oleh karena itu $res(P_4^m)$ adalah 5 untuk $m = 1$; $\lfloor \frac{m+11}{3} \rfloor$ untuk $m \not\equiv 3,4 \pmod{6}$; dan $\lfloor \frac{m+11}{3} \rfloor + 1$ untuk $m \equiv 3,4 \pmod{6}$. Dengan demikian, teorema terbukti. ■

Gambar 1 merupakan ilustrasi dari pelabelan-5 refleksif tak teratur sisi graf parasut diperumum P_4^1 . Pada gambar tersebut, angka berwarna hitam menunjukkan label titik dan sisi, sedangkan angka berwarna merah menunjukkan bobot sisi.



Gambar 1. Pelabelan-5 refleksif tak teratur sisi graf P_4^1

Teorema 2. Untuk setiap bilangan bulat n, m dengan $n = 5$ dan $m \geq 1$,

$$res(P_5^m) = \begin{cases} \lfloor \frac{m + 14}{3} \rfloor, & \text{untuk } m \not\equiv 0,1 \pmod{6}, \\ \lfloor \frac{m + 14}{3} \rfloor + 1, & \text{untuk } m \equiv 0,1 \pmod{6}. \end{cases}$$

Bukti. Pertama dibuktikan batas bawah dari $res(P_5^m)$. Graf parasut diperumum mempunyai $m + 14$ sisi. Dengan menggunakan Lema (1) diperoleh

$$res(G) \geq \begin{cases} \lfloor \frac{m + 14}{3} \rfloor, & \text{untuk } (m + 14) \not\equiv 2,3 \pmod{6}, \\ \lfloor \frac{m + 14}{3} \rfloor + 1, & \text{untuk } (m + 14) \equiv 2,3 \pmod{6}. \end{cases}$$

Pernyataan tersebut ekuivalen dengan pernyataan:

$$res(P_5^m) \geq \begin{cases} \lfloor \frac{m + 14}{3} \rfloor, & \text{untuk } m \not\equiv 0,1 \pmod{6}, \\ \lfloor \frac{m + 14}{3} \rfloor + 1, & \text{untuk } m \equiv 0,1 \pmod{6}. \end{cases}$$

Selanjutnya, dibuktikan batas atas dari graf parasut diperumum P_5^m . Dikonstruksi f pada pelabelan- k dengan

$$k = \begin{cases} \lfloor \frac{m + 14}{3} \rfloor, & \text{untuk } m \not\equiv 0,1 \pmod{6}, \\ \lfloor \frac{m + 14}{3} \rfloor + 1, & \text{untuk } m \equiv 0,1 \pmod{6}, \end{cases}$$

sebagai berikut,

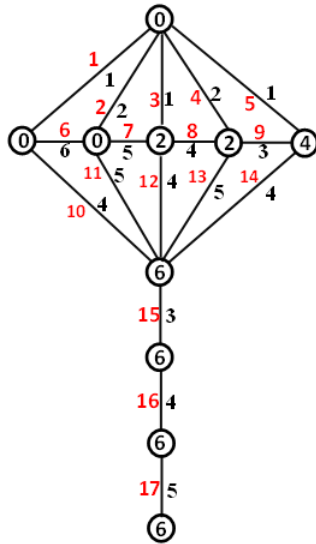
$$\begin{aligned}
f(u) &= 0, & \text{untuk } m \geq 1, \\
f(x_i) &= \begin{cases} i-1, & \text{untuk } i \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq 5, \\ i-2, & \text{untuk } i \text{ genap}, 1 \leq i \leq 5, \end{cases} \\
f(u') &= 6, & \text{untuk } m \geq 1, \\
f(y_j) &= \begin{cases} \left\lfloor \frac{j+12}{3} \right\rfloor, & \text{untuk } 1 \leq j \leq m, j \equiv 0, 4, 5 \pmod{6}, \\ \left\lfloor \frac{j+12}{3} \right\rfloor + 1, & \text{untuk } 1 \leq j \leq m, j \equiv 1, 2, 3 \pmod{6}, \end{cases} \\
f(ux_i) &= \begin{cases} 1, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil}, \\ 2, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}, \end{cases} \\
f(x_i x_{i+1}) &= 7 - i, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n - 1, \\
f(x_i u') &= \begin{cases} 4, & \text{untuk } i \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq n, \\ 5, & \text{untuk } i \text{ genap}, 1 \leq i \leq n, \end{cases} \\
f(u' y_1) &= 3, & \text{untuk } m \geq 1, \\
f(y_j y_{j+1}) &= \begin{cases} \frac{j+15}{3}, & \text{untuk } 1 \leq j \leq m-1, j \equiv 0, 3 \pmod{6}, \\ \left\lfloor \frac{j+17}{3} \right\rfloor, & \text{untuk } 1 \leq j \leq m-1, j \equiv 4, 5 \pmod{6}, \\ \left\lfloor \frac{j+11}{3} \right\rfloor, & \text{untuk } 1 \leq j \leq m-1, j \equiv 1, 2 \pmod{6}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Dari pembuktian batas bawah dan batas atas, dapat diketahui bahwa maksimum label titik dan sisi adalah $\left\lfloor \frac{m+14}{3} \right\rfloor$ untuk $m \not\equiv 0, 1 \pmod{6}$; dan $\left\lfloor \frac{m+14}{3} \right\rfloor + 1$ untuk $m \equiv 0, 1 \pmod{6}$. Dapat dilihat label titik merupakan bilangan bulat genap, sehingga diperoleh bobot sisi sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
wt(ux_i) &= i, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n, \\
wt(x_i x_{i+1}) &= i + 5, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n - 1, \\
wt(x_i u') &= i + 9, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n, \\
wt(u' y_1) &= 15, & \text{untuk } m \geq 1, \\
wt(y_j y_{j+1}) &= j + 15, & \text{untuk } 1 \leq j \leq m - 1.
\end{aligned}$$

Dari bobot sisi, dapat dilihat bahwa graf parasut diperumum P_5^m mempunyai bobot berbeda, sehingga f memenuhi elemen pelabelan- k refleksif tak teratur sisi. Batas bawah sama dengan batas atas, oleh karena itu $res(P_5^m)$ adalah $\left\lfloor \frac{m+14}{3} \right\rfloor$ untuk $m \not\equiv 0, 1 \pmod{6}$; dan $\left\lfloor \frac{m+14}{3} \right\rfloor + 1$ untuk $m \equiv 0, 1 \pmod{6}$. Dengan demikian, teorema terbukti. ■

Gambar 2 merupakan ilustrasi dari pelabelan-6 refleksif tak teratur sisi graf parasut diperumum P_5^3 . Pada gambar tersebut, angka berwarna hitam menunjukkan label titik dan sisi, sedangkan angka berwarna merah menunjukkan bobot sisi.



Gambar 2. Pelabelan-6 refleksif tak teratur sisi graf P_5^3

3. Simpulan

Berdasarkan uraian tersebut, diperoleh kesimpulan yaitu kekuatan sisi refleksif graf parasut diperumum P_4^m yaitu 5 untuk $m = 1$; $\lceil \frac{m+11}{3} \rceil$ untuk $m \not\equiv 3,4 \pmod{6}$; dan $\lceil \frac{m+11}{3} \rceil + 1$ untuk $m \equiv 3,4 \pmod{6}$. Sedangkan kekuatan sisi refleksif graf parasut diperumum P_5^m yaitu $\lceil \frac{m+14}{3} \rceil$ untuk $m \not\equiv 0,1 \pmod{6}$; dan $\lceil \frac{m+14}{3} \rceil + 1$ untuk $m \equiv 0,1 \pmod{6}$. Penulis berharap bagi pihak yang tertarik dengan topik pelabelan refleksif tak teratur sisi maupun kekuatan sisi refleksif pada graf dapat melakukan penelitian untuk menentukan kekuatan sisi refleksif graf parasut diperumum P_n^m untuk $m \geq 1, n \geq 6$.

Daftar Pustaka

- Bača, M., S. Jendrol', M. Miller, and J. Ryan. (2007). On Irregular Total Labeling. *Discrete Mathematics*, 307, 1378-1388.
- Bača, M., M. Irfan, A. A. Semaničová-Feňovíková, and D. Tanna. (2019). Note on Edge Irregular Reflexive Labelings of Graphs. *AKCE International Journal of Graph and Combinatorics*, 16, 145-157.
- Bača, M., M. Irfan, J. Ryan, A. Semaničová-Feňovíková, and D. Tanna. (2017). On Edge Irregular Reflexive Labellings for the Generalized Friendship Graphs. *Mathematics*, 67, 1-11.
- Galian, J. A. (2018). A Dynamic Survey of Graph Labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics*, no. #DS6 21, 1-502.
- Husnul, K., dan Yeni, S. (2019). Kekuatan Total Tak Reguler Sisi Graf Double Fan dan Graf-Graf Terkait Graf Double Fan. *Jurnal Matematika Thales (JMT)*, Vol. 01-01.
- Indriati, D., Widodo, and Rosyida, I. (2020). Edge Irregular Reflexive Labeling on Corona of Path and Other Graph. *Journal of Physics: Conference Series*.
- Tanna, D., J. Ryan, A. and Semaničová-Feňovíková. (2017). Edge Irregular Reflexive Labeling of Prisms and Wheels. *Australasian Journal of Combinatorics*, 69(3), 394-401.
- Wallis, W. D. (2001). *Magic Graphs*. Birkhäuser, Basel, Berlin.