PRISMA 5 (2022): 828-833
PRISMA, PROSIDING SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA
https://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/prisma/
ISSN 2613-9189

Pelabelan Total Sisi *Trimagic* Super pada Graf Dragon Pendant $DP_n(m)$

Abdul Jalil Nawawi[a,*], Titin Sri Martini[b]

[a,b] *Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sebelas Maret, Jl. Ir. Sutami 36A Kentingan, Surakarta 57126, Indonesia*

**Alamat Surel: ajnawawi@student.uns.ac.id*

Abstrak

Misal G graf terhubung dan sederhana dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Graf $G(V,E)$ dengan $|V(G)| = p$ dan $|E(G)| = q$ disebut memiliki pelabelan total sisi *trimagic* jika terdapat pemetaan bijektif $f : V \cup E \rightarrow \{1,2,3,\dots,p+q\}$ sehingga untuk setiap sisi $uv \in E(G)$, nilai $f(u) + f(uv) + f(v)$ adalah konstanta k_1, k_2, dan k_3. Pelabelan total sisi *trimagic* disebut sebuah pelabelan total sisi *trimagic* super dari sebuah graf G jika titik diberi label himpunan bilangan $\{1,2,3,\dots,p\}$. Pada penelitian ini, ditentukan pelabelan total sisi *trimagic* super dari graf *Dragon Pendant* $DP_n(m)$, dengan $n \geq 3$ dan $m \geq 2$. Hasil penelitian menunjukkan graf *Dragon Pendant* $DP_n(m)$ memuat pelabelan total sisi *trimagic* dengan nilai $k_1 = 5n + 3m - 1, k_2 = 4n + 3m, k_3 = \frac{8n+5m-2}{2}$ untuk m genap dan nilai $k_1 = 5n + 3m - 1, k_2 = 4n + 3m, k_3 = \frac{8n+5m-3}{2}$ untuk m ganjil.

Kata kunci:

Pelabelan sisi trimagic, Pelabelan total sisi trimagic, Pelabelan total sisi trimagic super, Graf Dragon Pendant.

1. Pendahuluan

Pelabelan pada suatu graf menurut (Wallis, 2001) adalah suatu fungsi yang memetakan elemen suatu graf (himpunan titik, himpunan sisi, atau himpunan titik dan sisi) ke bilangan bulat posititif. Pelabelan graf dibagi menjadi beberapa jenis pelabelan seperti pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total. Pelabelan total disebut sebagai pelabelan super jika dan hanya jika setiap titik pada graf mempunyai label yang lebih kecil daripada label sisinya. Jumlah semua label yang berhubungan dengan suatu elemen (titik atau sisi) dari suatu graf disebut bobot.

Dalam perkembangannya banyak kajian yang membahas tentang pelabelan. Pada tahun 1964, pelabelan *magic* petama kali diperkenalkan oleh(Sedlack, 1964), kemudian dikembangkan oleh (Rosa, 1970) menjadi pelabelan total sisi *magic*. Suatu graf $G(V,E)$ dengan $|V(G)| = p$ dan $|E(G)| = q$ disebut memiliki pelabelan total sisi *magic* jika terdapat pemetaan bijektif $f : V \cup E \rightarrow \{1,2,3,\dots,p+q\}$ sehingga untuk setiap sisi $uv \in E(G)$, nilai $f(u) + f(uv) + f(v)$ adalah konstanta *magic*. Girija dan Elumalai membuktikan bahwa *cycle* C_n dengan P_3 *chords* memuat pelabelan total sisi *magic* (L. Girija, 2014). Kemudian pada tahun 2004 pelabelan *bimagic* diperkenalkan oleh (Babujee, 2004). Suatu graf $G(V,E)$ dengan $|V(G)| = p$ dan $|E(G)| = q$ disebut memiliki pelabelan total sisi *bimagic* jika terdapat pemetaan bijektif $f : V \cup E \rightarrow \{1,2,3,\dots,p+q\}$ sehingga untuk setiap sisi $uv \in E(G)$, nilai $f(u) + f(uv) + f(v)$ adalah konstanta k_1, dan k_2.

Pelabelan total sisi *trimagic* pada graf pertama kali diperkenalkan oleh Jayasekaran pada tahun 2013(C.Jayasekaran, 2013). Suatu graf $G(V,E)$ dengan $|V(G)| = p$ dan $|E(G)| = q$ disebut memiliki pelabelan total sisi *trimagic* jika terdapat pemetaan bijektif $f : V \cup E \rightarrow \{1,2,3,\dots,p+q\}$ sehingga untuk

To cite this article:

Nawawi, A. J., Martini, T.S. (2022). Pelabelan Total Sisi *Trimagic* pada Graf Dragon Pendant $DP_n(m)$. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika* 5, 828-833

setiap sisi $uv \in E(G)$, nilai $f(u) + f(uv) + f(v)$ adalah konstanta k_1, k_2, dan k_3. Pelabelan total sisi *trimagic* disebut sebuah pelabelan total sisi *trimagic* super dari sebuah graf G jika titik diberi label himpunan bilangan $\{1,2,3,\dots,p\}$. Pada tahun 2017 Jayasekaran dan Flower membuktikan bahwa graf *umbrella*, graf *dumb bell*, dan graf *circular ladder* memuat pelabelan total sisi *trimagic* super (J. Flower, 2017). Kemudian pada tahun yang sama Jayasekaran dan flower juga membuktikan bahwa graf *mobius ladder*, graf *book*, dan graf *dragon* memuat pelabelan total sisi *trimagic* super(C. Jayasekaran, 2017).

Graf *Dragon Pendant* menurut (Wantika, 2015) adalah graf *Dragon* yang pada setiap titik bagian kepala yang tidak terhubung dengan ekor ditambahkan pendant. Graf *Dragon Pendant* dinotasikan $DP_n(m)$. Pada penelitian ini akan membuktikan bahwa *Dragon Pendant* $DP_n(m)$ dengan $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, memiliki pelabelan total sisi *trimagic* super.

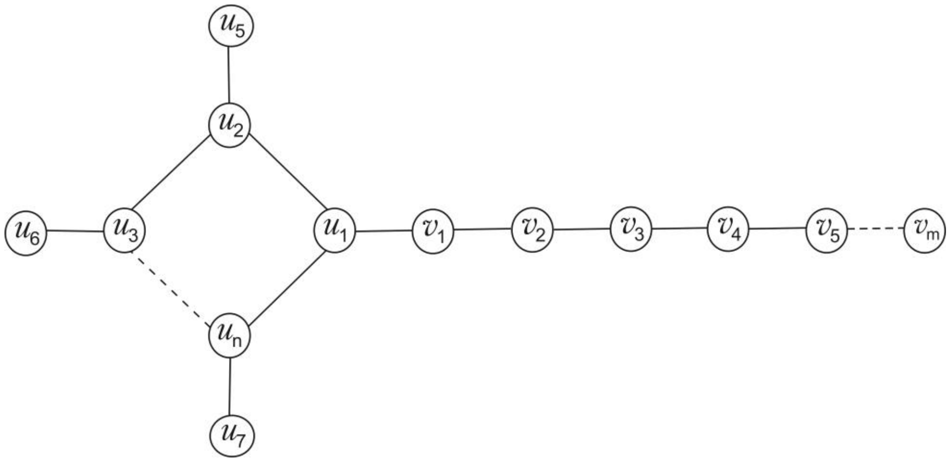
2. Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan pada penelitian ini adalah kajian pustaka yaitu dengan mempelajari berbagai referensi dari buku-buku, jurnal maupun tulisan mengenai teori graf khususnya pelabelan *trimagic*. Langkah-langkah menentukan pelabelan total sisi *trimagic* dari graf *Dragon Pendant* $DP_n(m)$sebagai berikut.

(1) Menentukan titik dan sisi pada graf *Dragon Pendant* $DP_n(m)$.
(2) Menentukan label titik dengan label $1, 2, \dots, |V(G)|$, kemudian label sisi dengan label $|V(G)| + 1, |V(G)| + 2, \dots, |V(G)| + |E(G)|$.
(3) Mengkombinasikan label titik dan sisi dengan memperhatikan teknik pelabelan total sisi *trimagic* super sehingga diperoleh barisan bobot sisi.
(4) Menentukan pola umum pelabelan total sisi *trimagic* super pada graf *Dragon Pendant* $DP_n(m)$.
(5) Menentukan nilai k_1, k_2, dan k_3 yang diperoleh dari pola umum pelabelan total sisi *trimagic* super pada graf *Dragon Pendant* $DP_n(m)$.
(6) Membangun teorema untuk membuktikan kebenaran pola pelabelan total sisi *trimagic* pada graf *Dragon Pendant* $DP_n(m)$.
(7) Membuat kesimpulan.

3. Hasil dan Pembahasan

Graf *Dragon Pendant* dinotasikan dengan $DP_n(m)$ adalah graf *Dragon* yang pada setiap titik bagian kepala yang tidak terhubung dengan ekor ditambahkan pendant. Graf *Dragon Pendant* $DP_n(m)$ memiliki masing-masing $2n + m - 1$ titik dan sisi. Gambar 1 merupakan graf *Dragon Pendant* dengan n $cycle$ dan m $path$.



Gambar 1. Graf $Dragon\ Pendant\ DP_n(m)$

Teorema 3.1. Graf Dragon Pendant $DP_n(m)$ memuat pelabelan total sisi trimagic super untuk m genap.
Didefinisikan himpunan titik $V(G) = \{u_j \mid j \in [1,2n-1]\} \cup \{v_i \mid i \in [1,m]\}$, dengan u_j adalah label titik pada graf *cycle* dan *pendant*, sedangkan v_i adalah label titik pada graf path. Himpunan sisi $E(G) = \{u_j u_{j+1} \mid j \in [1,n-1]\} \cup \{u_1 u_n\} \cup \{u_j u_{j+n-1} \mid j \in [2,n]\} \cup \{u_1 u_v\} \cup \{v_i v_{i+1} \mid i \in [1,m-1]\}$, dengan $\{u_j u_{j+1}\} \cup \{u_1 u_n\}$ adalah sisi pada graf *cycle*, $\{u_j u_{j+n-1}\}$ adalah sisi pada *pendant* yang terdapat pada graf *cycle*, $\{u_1 v_1\}$ adalah sisi penghubung dari graf *cycle* dan graf *path*, dan $\{v_i v_{i+1}\}$ sisi pada graf *path*. Didefinisikan pemetaan bijektif dari graf G adalah $f : V \cup E \rightarrow \{1,2,3,\dots,|V(G)|+|E(G)|\}$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ sehingga,

$$f(v_i) = \begin{cases} \dfrac{m+i+3}{2} & , i \in [1,m], i\ ganjil \\ \dfrac{i+2}{2} & , i \in [1,m], i\ genap \end{cases}$$

$f(u_j) = m + j$, $2 \leq j \leq 2n-1$
$f(u_1) = 1$
$f(u_1 v_1) = 4n + 2m - 4$
$f(v_i v_{i+1}) = 4n + 2m - 4 - i$, $1 \leq i \leq m-1$
$f(u_1 u_n) = 4n + 2m - 2$
$f(u_1 u_2) = 4n + 2m - 3$
$f(u_j u_{j+1}) = 4n + m - 2j - 1$, $2 \leq j \leq n-1$
$f(u_{j+n-1}) = n + m + j - 1$, $2 \leq j \leq 2n-1$
$f(u_j u_{j+n-1}) = 4n + m - 2j$, $2 \leq j \leq n$

Akan ditunjukkan bahwa pelabelan graf Dragon Pendant $DP_n(m)$ untuk m genap, merupakan pelabelan total sisi *trimagic* super.

Untuk sisi $u_1 u_n$

$$\begin{aligned} f(u_1) + f(u_1 u_n) + f(u_n) &= 1 + 4n + 2m - 2 + m + n \\ &= 5n + 3m - 1 \\ &= k_1 \end{aligned}$$

Untuk sisi $u_j u_{j+n-1}$, $2 \leq j \leq n$

$$\begin{aligned} f(u_j) + f(u_j u_{j+n-1}) + f(u_{j+n-1}) &= m + j + 4n + m - 2j + n + m + j - 1 \\ &= 5n + 3m - 1 \\ &= k_1 \end{aligned}$$

Untuk sisi $u_1 u_2$,

$$\begin{aligned} f(u_1) + f(u_1 u_2) + f(u_2) &= 1 + 4n + 2m - 3 + m + 2 \\ &= 4n + 3m \\ &= k_2 \end{aligned}$$

Untuk sisi $u_j u_{j+1}$, $2 \leq j \leq n-1$

$$\begin{aligned} f(u_j) + f(u_j u_{j+1}) + f(u_{j+1}) &= m + j + 4n + m - 2j - 1 + m + j + 1 \\ &= 4n + 3m \\ &= k_2 \end{aligned}$$

Untuk sisi $u_1 v_1$

$$\begin{aligned} f(u_1) + f(u_1 v_1) + f(v_1) &= 1 + 4n + 2m - 4 + \tfrac{m+i+3}{2} \\ &= \tfrac{8n+5m-2}{2} \\ &= k_3 \end{aligned}$$

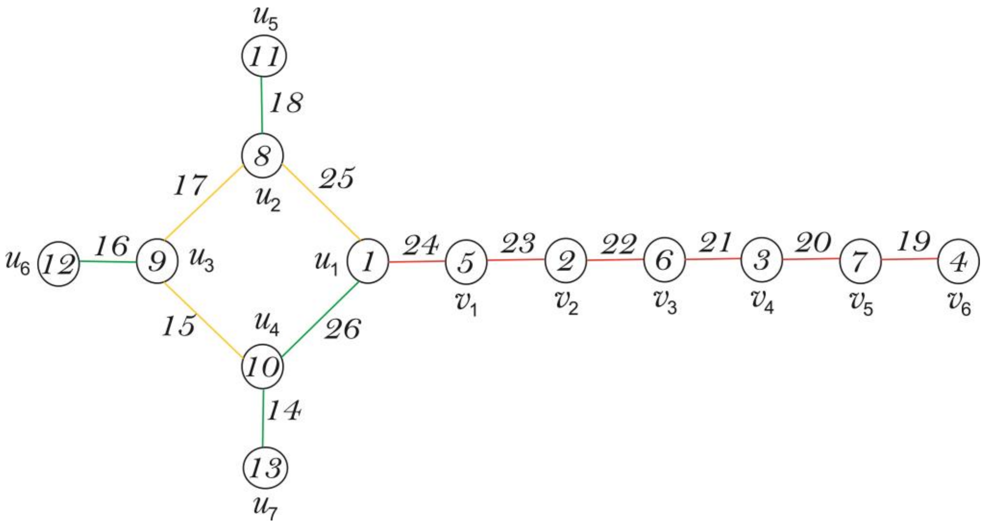
Untuk sisi $v_i v_{i+1}$, $1 \leq i \leq m-1$
i ganjil

$$\begin{aligned} f(v_i) + f(v_i v_{i+1}) + f(v_{i+1}) &= \tfrac{m+i+3}{2} + 4n + 2m - 4 - i + \tfrac{(i+1)+2}{2} \\ &= \tfrac{8n+5m-2}{2} \\ &= k_3 \end{aligned}$$

i genap

$$f(v_i) + f(v_i v_{i+1}) + f(v_{i+1}) = \frac{i+2}{2} + 4n + 2m - 4 - i + \frac{m+(i+1)+3}{2} = \frac{8n+5m-2}{2} = k_3$$

Contoh pelabelan total sisi *trimagic* super pada graf *Dragon Pendant* $DP_4(6)$



Gambar 2. Graf $Dragon\ Pendant\ DP_4(6)$ dengan $k_1 = 37$, $k_2 = 34$, dan $k_3 = 30$.

Teorema 3.2. Graf Dragon Pendant $DP_n(m)$ memuat pelabelan total sisi trimagic super untuk m ganjil.

Didefinisikan himpunan titik $V(G) = \{u_j \mid j \in [1,2n-1]\} \cup \{v_i \mid i \in [1,m]\}$, dengan u_j adalah label titik pada graf *cycle* dan *pendant*, sedangkan v_i adalah label titik pada graf path. Himpunan sisi $E(G) = \{u_j u_{j+1} \mid j \in [1,n-1]\} \cup \{u_1 u_n\} \cup \{u_j u_{j+n-1} \mid j \in [2,n]\} \cup \{u_1 u_v\} \cup \{v_i v_{i+1} \mid i \in [1,m-1]\}$, dengan $\{u_j u_{j+1}\} \cup \{u_1 u_n\}$ adalah sisi pada graf *cycle*, $\{u_j u_{j+n-1}\}$ adalah sisi pada *pendant* yang terdapat pada graf *cycle*, $\{u_1 v_1\}$ adalah sisi penghubung dari graf *cycle* dan graf *path*, dan $\{v_i v_{i+1}\}$ sisi pada graf *path*. Didefinisikan pemetaan bijektif dari graf G adalah $f : V \cup E \rightarrow \{1,2,3,\dots,|V(G)| + |E(G)|\}$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ sehingga,

$$f(v_i) = \begin{cases} \dfrac{m+i+2}{2} & , i \in [1,m], i\ ganjil \\ \dfrac{i+2}{2} & , i \in [1,m], i\ genap \end{cases}$$

$f(u_j)$	$= m + j$	$, 2 \leq j \leq 2n-1$
$f(u_1)$	= 1	
$f(u_1 v_1)$	= 4n + 2m – 4	
$f(v_i v_{i+1})$	= 4n + 2m – 4 – i	$, 1 \leq i \leq m-1$
$f(u_1 u_n)$	= 4n + 2m – 2	
$f(u_1 u_2)$	= 4n + 2m – 3	
$f(u_j u_{j+1})$	= 4n + m – 2j – 1	$, 2 \leq j \leq n-1$
$f(u_{j+n-1})$	= n + m + j – 1	$, 2 \leq j \leq 2n-1$
$f(u_j u_{j+n-1})$	= 4n + m – 2j	$, 2 \leq j \leq n$

Akan ditunjukkan bahwa pelabelan graf Dragon Pendant $DP_n(m)$ untuk m ganjil, merupakan pelabelan total sisi trimagic super.

Untuk sisi $u_1 u_n$

$$f(u_1) + f(u_1 u_n) + f(u_n) = 1 + 4n + 2m - 2 + m + n = 5n + 3m - 1 = k_1$$

Untuk sisi $u_j u_{j+n-1}$, $2 \leq j \leq n$

$$f(u_j) + f(u_j u_{j+n-1}) + f(u_{j+n-1}) = m + j + 4n + m - 2j + n + m + j - 1$$
$$= 5n + 3m - 1$$
$$= k_1$$

Untuk sisi $u_1 u_2$,

$$f(u_1) + f(u_1 u_2) + f(u_2) = 1 + 4n + 2m - 3 + m + 2$$
$$= 4n + 3m$$
$$= k_2$$

Untuk sisi $u_j u_{j+1}$, $2 \leq j \leq n - 1$

$$f(u_j) + f(u_j u_{j+1}) + f(u_{j+1}) = m + j + 4n + m - 2j - 1 + m + j + 1$$
$$= 4n + 3m$$
$$= k_2$$

Untuk sisi $u_1 v_1$

$$f(u_1) + f(u_1 v_1) + f(v_1) = 1 + 4n + 2m - 4 + \frac{m+i+2}{2}$$
$$= \frac{8n+5m-3}{2}$$
$$= k_3$$

Untuk sisi $v_i v_{i+1}$, $1 \leq i \leq m - 1$

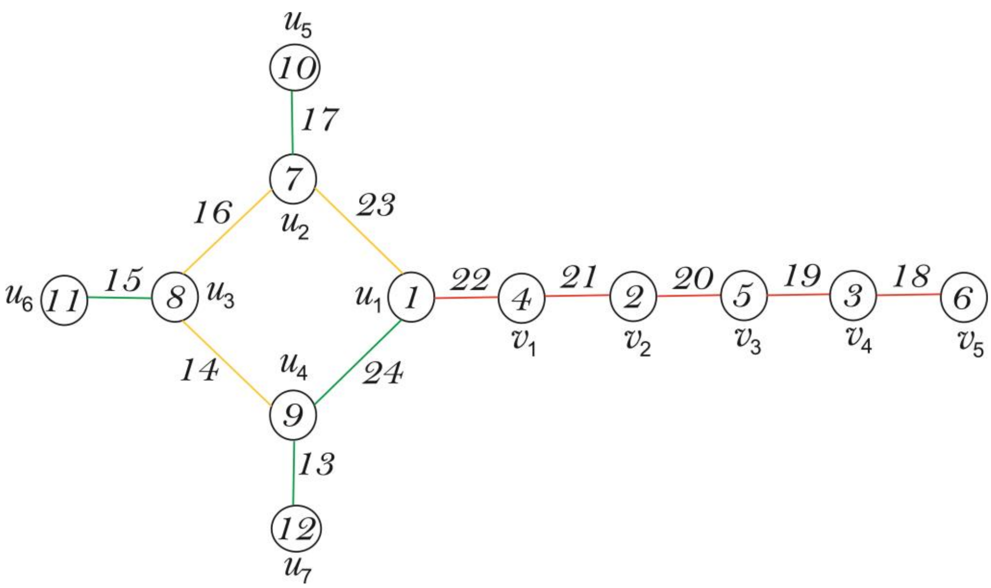
i ganjil

$$f(v_i) + f(v_i v_{i+1}) + f(v_{i+1}) = \frac{m+i+2}{2} + 4n + 2m - 4 - i + \frac{(i+1)+2}{2}$$
$$= \frac{8n+5m-3}{2}$$
$$= k_3$$

i genap

$$f(v_i) + f(v_i v_{i+1}) + f(v_{i+1}) = \frac{i+2}{2} + 4n + 2m - 4 - i + \frac{m+(i+1)+2}{2}$$
$$= \frac{8n+5m-3}{2}$$
$$= k_3$$

Contoh pelabelan total sisi *trimagic* super pada graf *Dragon Pendant* $DP_4(5)$



Gambar 3. Graf *Dragon Pendant* $DP_4(5)$ dengan $k_1 = 34$, $k_2 = 31$, dan $k_3 = 27$.

4. Kesimpulan

Pada penelitian ini, telah dibuktikan bahwa graf *Dragon Pendant* $DP_n(m)$ memuat pelabelan total sisi *trimagic* super. Teorema 3.1 menunjukkan bahwa graf *Dragon Pendant* $DP_n(m)$ dengan m genap, memuat pelabelan total sisi *trimagic* super. Teorema 3.2 menunjukkan bahwa graf *Dragon Pendant* $DP_n(m)$ dengan m ganjil, memuat pelabelan total sisi *trimagic* super.

Daftar Pustaka

Babujee, J. (2004). On Edge Bimagic Labeling. *Journal of Combinations Information & System Sciences,Vol. 28* , 239-244.

C. Jayasekaran, J. F. (2017). Edge Trimagic Total Labeling of Mobius Ladder, Book and Dragon Graphs. *Annals of Pure and Applied Mathematics* , 157-161.

C.Jayasekaran, M. C. (2013). Edge Trimagic Labeling for some Graphs. *International Journal of Combinatorial Graph Theory and Applications*, *6*(2) , 175-186.

J. Flower, C. J. (2017). On Edge Trimagic Labeling of Umbrella, Dumb Bell and Circular Ladder Graphs. *Annals of Pure and Applied Mathematics* , 73-86.

L. Girija, A. E. (2014). Edge Magic Total Labeling of the Cycle Cn with P3 Chords. *Annals of Pure and Applied Mathematics* , 175-180.

Rosa, A. K. (1970). Magic Valuation of Finite Graphs. *Canad. Math. Bull.* , 415-416.

Sedlack, J. (1964). Theory of Graphs and Its Applications. *House Czechoslovak Acad. Sci. Prague* , 163-164.

Wallis, W. (2001). Magic Graphs. *New York: Birkhauser Boston*.

Wantika, R. R. (2015). Graceful Labeling In Double Dragon Graph and Pendant Dragon Graph. (*Master's Thesis).* Sepuluh Nopember Institute of Technology.