PRISMA 5 (2022): 60-64
PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika
https://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/prisma/
ISSN 2613-9189

Geometri Eliptik di Kaji Secara Filsafat dan Penerapannya dalam Pembelajaran Matematika

Parmamita Suryaningrum[a,*], Joanna Ayuni Sara[b]

[a] *Mahasiswa S2 Pendidikan Matematika, FKIP, Universitas Sanata Dharma Yogyakart, Jl. Paingan, Kabupaten Sleman, Daerah Istimewa Yogyakarta 5528, Indonesia*
[b] *Mahasiswa S2 Pendidikan Matematika, FKIP, Universitas Sanata Dharma Yogyakart, Jl. Paingan, Kabupaten Sleman, Daerah Istimewa Yogyakarta 5528, Indonesia dan guru SDTK Pelita Hati Denpasar*

** Alamat Surel: parmamitha.suryaningrum@gmail.com*

Abstrak

Matematika cocok dengan alam karena matematika mewakili bagaimana kita, manusia yang harus mengalami alam. Geometri non-Euclides merupakan salah satu teori yang hadir akibat kegagalan matematikawan membuktikan aksioma kesejajaran Euclides. Beberapa teori geometri non-Euclides yang ada saat ini misalnya teori Lobachevsky (hiperbolik), Riemann (Eliptik), Fractal, dan Taxicab. Kurangnya pembahasan geometri non-Euclides di sekolah membuat geometri ini jarang dikenal oleh siswa. Padahal beberapa teori geometri non-Euclides sangat menarik untuk dipelajari karena tanpa disadari lingkungan sekitar mengandung teori non-Euclides. Tujuan dari kajian ini adalah untuk 1) Mendeskripsikan geometri non-Euclides khususnya geometri eliptik dan 2) Mengimplementasikannya pada pembelajaran matematika terkait materi integral eliptik. Metode yang akan digunakan adalah metode kajian literatur. Hasil dari kajian ini menunjukkan bahwa geometri eliptik terdiri dari dua teori geometri yaitu geometri eliptik tunggal dan geometri eliptik ganda. Geometri eliptik ganda dapat disajikan secara sederhana menggunakan konsep Euclides meliputi geometri bola. Selain itu dikemukakan juga cara yang sesuai untuk mengenalkan geometri eliptik di sekolah menengah menggunakan implementasi integral eliptik dan menggunakan *software* untuk mengkonstruksi bentuk dari geometri eliptik.

Kata kunci:

Geometri non-Euclides, Geometri Eliptik, Pembelajaran Matematika

1. Pendahuluan

Dalam perkembangan ilmu geometri, terdapat dua kelompok besar yang dikenal dengan geometri Euclides dan geometri non-Euclides. Euclides mendasari geoemtrinya pada lima aksioma fundamental atau postulat. Empat postulat pertama Euclides dapat diterima oleh matematikawan, namun terjadi kontroversi pada postulat kelima Euclides sehingga matematikawan berusaha membuktikan postulat kelima Euclides yang mengakibatkan kemunculan geometri non-Euclides. Ada beberapa geometri yang tidak Euclidean namun hanya geometri hiperbolik dan eliptik disebut geometri yang tidak Euclidean atau geometri non-Euclies.

Dalam pembelajaran di sekolah pendidik cenderung mengajarkan geometri Euclid kepada siswa sedangkan pembahasan terkait geometri non-Euclid jarang dijumpai, akibatnya siswa kurang memiliki pengalaman mempelajari geometri non-Euclides. Padahal di lingkungan sekitar sangat banyak dijumpai geometri yang tidak Euclidean dan akan menarik untuk dipelajari. Penelitian ini bertujuan untuk mendeskripsikan geometri non Euclides khususnya geometri eliptik dan menerapkannya dalam pembelajaran terkait integral eliptik. Diharapkan penelitian ini dapat memotivasi pendidik untuk mengenalkan geometri non-Euclides kepada siswa agar siswa memiliki pengalaman mempelajari geometri non-Euclides dan mengatahui bahwa lingkungan sekitar mengandung banyak unsur geometri non-Euclides.

Berdasarkan penelitian sebelumnya, konflik kognitif terjadi karena adanya perbedaan skema yang dimiliki mahasiswa dalam memahami konsep geometri hiperbollik dan eliptik dimana mahasiswa

To cite this article:
Suryaningrum, Parmamita., Sara, Joanna Ayuni. (2022). Geometri Eliptik di Kaji Secara Filsafat dan Penerapannya dalam Pembelajaran Matematika. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika 5*, 60-64

menggunakan skema lama (geometri Euclides) yang kurang sesuai dengan skema yang baru (geometri non-Euclides). Konflik kognitif tersebut meliputi konsep yang berbeda dalam perpotongan dua garus, konsep kesejajaran daru dua garis atau lebih, kesebangunan dan kekongruenan pada dua segitiga dan jumlah sudut dalam segitiga. Untuk mengurangi terjadinya konflik kognitif maka dilakukan pengubahan skema yang ada atau membuat skema baru sehingga informasi yang diperoleh dapat digabungkan ke dalam skema yang ada (Budiarto & Setyaningsih, 2019). Penelitian lainnya menyatakan bahwa salah satu tujuan pembelajaran matematika asdalah memungkinkan siswa untuk menganalisis, berdiskusi, menduga mengembangkan konsep dan rumus, Siswa harus di motivasi dibuat tertarik pada kelas matematika. Dipercaya bahwa geometri non-Euclides dapat membantu memotivasi dan menarik ketika ini menjadi keseharian siswa. Geometri non-Euclides di presentasikan secara nyata di alam dan seni (Sousa, 2010).

2. Pembahasan

Pada pembahasan ini peneliti akan akan mendeskirpsikan elips secara filosofis serta implementasinya dalam kehidupan nyata dan pembelajaran di sekolah yang akan disajikan dalam subbab berikut.

2.1 Filosofi dan Sejarah Elips

Matematika cocok dengan alam karena matematika mewakili bagaimana kita, manusia yang harus mengalami alam. Revolusi ilmiah dalam sejarah budaya Eropa mengaci pada zaman yang diresmikan oleh Nicolaus Copernicus (1473-1543) yang menempatkan matahari di pusat alam semesta dan diakhiri dengan rumusan Newton tentang tiga hukum dasar alam. Copernicus terinspirasi oleh filsafat Yunani dan Platonisme. Pada saat yang sama, ia terprovokasi oleh masalah teknis yang inheren dalam system geosentris yag disajikan oleh Ptolemy dari Alexandria di Almagest, sebuah karya utama dalam astronomi. Pada zaman Ptolemus, banyak pengamatan mendetail tentang orbit planet-planet telah dilakukan, dan pengamatan ini tidak secara langsug kompatibel dengan model dimana planet-planet bergerak dalam orbit melingkar di sekitar bumi dengan kecepatam yang seragam, bahkan meskipun lingkaran adalah bentuk ilahi yang cocok untuk Gerakan surgawi. Karena itu sistem harus direvisi dan Ptolemy sendiri berpartisipasi dalam pekerjaan ini.

Copernicus melihat prospek menempatkan matahari di pusat alam semesta sebagai sarana untuk mempertahankan konsep benda langit yang bergerak dalam lingkaran. Dalam membuat matahari di pusat alam semesta, Copernicus telah mengambil alih inspirasi Antiquity. Ada juga elemen analitik empiris dan metamtis yang agak luas dalam karya Copernicus. Dia berhasil menunjukkan bahwa jika kita menempatkan matahari di pusat universal dan menempatkan bumi dan planet-planet bergerak berputar-putar di sekitarnya adalah mungkin untuk menyusun pengamatan dalam sistem yang jauh lebih sederhana dari Ptolemus. Copernicus memanfaatkan matematika tingkat lanjut dan ia diyakini telah menggunakan wawasan matematuka dari para astronom Timur Tengah sampai batas tertentu. Revolusi Copernicus sangat berani, dan mungkin karena itu penerbitan karya utamanya *On Revolutions of Heavenly Sphere (De Revolutionibus Orbium Coelestium)* secara harfiah ditunda hingga menit terakhir.

Terlepas dari revolusi Copernicus mengenai situasi bumi dan alam semesta, tradisi dimana Copernicus bekerja masih ditandai oleh pandangan dunia Antik. Seorang astoronom, Johanes Kepler (1571-1630) mendapat manfaat dari pengamatan terperinci yang dilakukan oleh Tycho Brahe. Berdasarkan pengamatan Brahe yang cukup teliti, Kepler sedang berupaya menemukan kemungkinan deskripsi orbit planet di sekitar matahari. Ada alasan kuat mengapa planet-planet terus bergerak dalam lingkaran. Kepler juga mengganggap gerakan melingkar itu gerakan surgawi yang tidak memerlukan penjelasan lebih lanjut.

Terobosan dalam karya Kepler datang setelah 10 tahun mempelajari jalur planet Merkurius, ketika ia akhirnya memutuskan untuk menyimpang dari prinsip orbit melingkar. Dia memilih untuk mempertimbangkan sosok geometris sederhana lainnya,yaitu elips. Pilihan elips memungkinkan Kepler untuk merumuskan hukum untuk pergerakan planet-planet. Kepler merumuskan dua hukum lain juga; hukum elips dan hukum keselarasan (harmoni). Hukum elips menyatakan bahwa planet bergerak sekitar matahari dalam lintasan yang digambarkan sebagai elips dengan matahari terletak di salah satu fokus. Hukum keselarasan menyatakan bahwa rasio antara kuadrat dari periode orbital t dibagi dengan pangkat tiga dari sumbu semimajor a dari elips adalah konstan. (Rudhito, 2020).

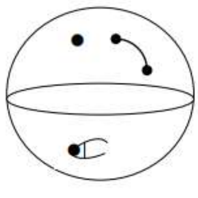
Geometri adalah struktur matematika yang membicarakan unsur dan relasi yang ada antara unsur tersebut. Titik, garis, bidang dan ruang merupakan benda abstrak yang mejadi unsur dasar geometri. Dalam geometri juga terdapat sifat-sifat pokok yaitu sifat-sifat pertama yang tidak berdasarkan sifat-sifat yang mendahuluinya yaitu aksioma dan postulat. Geometri non-Euclides merupakan salah satu geometri yang diperoleh dengan meniadakan Euclidean paralel postulat yaitu geometri hiperbolik dan geometri eliptik. Geometri non-Euclides timbul karena matematikawan berusaha untuk membuktikan postulat kelima Euclides, namun geometri non-Euclides ini masih menggunakan empat postulat pertama Euclides.

2.2 Geometri Eliptik

Teori Riemann menjadi salah satu dari teori geometri yang menentang postulat kesejajaran Euclides setelah Lobachevsky berhasil menentang postulat kesejajaran Euclides. Postulat kesejajaran Riemann ialah *Tidak terdapat garis sejajar.* Pada geometri eliptik (geometri bola), garis tidaklah lurus sebab garis tersebut adalah bagian dari lingkaran besar. (Project & Summary, 2012). Ada dua teori geometri yang mengasumsikan postulat kesejajaran Riemann. Pertama **geometri eliptik tunggal** dimana setiap garis berpotongan di satu titik tetapi tidak ada garis yang membagi bidang. Kedua **geometri eliptik ganda** dimana dua garis berpotongan tepat di dua titik dan setiap garis membagi bidang. (Widana, 2013 dan Ferdinand & Philipp, 1918). Istilah "tunggal" dan "ganda" menunjukkan sifat titik potong dari dua garis pada geometri tersebut dan istilah "eliptik" digunakan untuk menghaluskan sesuai dengan pengklasifikasian yang didasarkan pada bangunan geometri Euclides dan Lobachevsky disebut **parabolik** dan **hiperbolik**.

Pada kesan pertama geometri eliptik mungkin terlihat sebagai teori geometri yang aneh, tapi kita dapat menyajikannya dengan tepat menggunakan konsep Euclides. Penyajian meliputi geometri bola Euclides dan secara khusus dan sederhana untuk geometri eliptik ganda. Berikut daftar tabel beberapa konsep dasar geometri eliptik dan representasi yang bersesuaian pada bola Euclid. (Ferdinand & Philipp, 1918).

Tabel 1. Konsep Dasar Geometri Eliptik dan Representasi Bola Euclides, (Ferdinand & Philipp, 1918).

Geometri Eliptik Ganda	**Representasi Euclides**	
Titik	Titik pada bola S	
Garis	Lingkaran besar pada S	
Bidang	Bola S	
Ruas garis	Busur dari lingkaran besar pada S	
Jarak antara dua titik	Panjang busur terpendek lingkaran besar pada S yang menghubungkan dua titik	
Sudut (dibentuk oleh dua garis)	Sudut pada bola (dibentuk oleh dua lingkaran besar)	
Besar sudut	Besar sudut pada bola	

Pada geometri eliptik jumlah sudut dari suatu segitiga lebih besar dari $180°$. Itu berarti bahwa jumlah sudut dari suatu segiempat adalah lebih besar dari $360°$.

Mason juga mengatakan bahwa *"Construction of the Triangle on sphere exhibits noticeable difference in spherical geometry. For the triangle on the plane, the sum of triangle is* $180°$. *But for a triangle on a sphere, the sum of the triangle is greater than* $180°$*"* yang berarti konstruksi segitiga pada bola menunjukkan perbedaan nyata dalam geometri bola, dimana pada bidang jumlah sudutnya adalah$180°$ tetapi pada bola, jumlah sudutnya lebih besar dari $180°$. (Mason, 2019). Berdasarkan hal tersebut, dapat disimpulkan bahwa jumlah sudut segitiga pada geomerti eliptik adalah lebih besar dari $180°$.

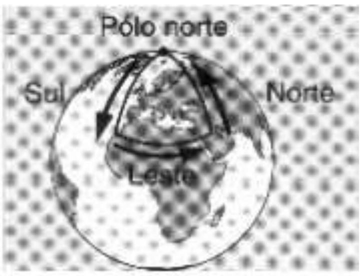
2.3 Sifat-Sifat Kutub dalam Geometri Eliptik

Misal L sebarang garis. Maka terdapat sebuah titik P yang disebut kutub L, sehingga: (1) setiap ruas garis yang menguhubungkan P dengan titik pada L tegak lurus terhadap L, (2) P berjarak sama pada semua titik di L. Jarak P sampai sebarang titik L disebut "jarak polar". Jarak polar suatu kutub sampai garisnya adalah konstan. (Ferdinand & Philipp, 1918).

2.4 Implementasi Geometri Eliptik dalam Kehidupan Nyata

Jika kita melihat benda-benda sekitar seperti bola sepak, kita menyimpulkan bahwa itu adalah bola. Namun, bagi seekor semut atau lalat yang bergerak dipermukaannya, selalu tampak datar. Sama halnya dengan kita sebagai manusia di permukaan bumi, tidak dapat memeriksa kelengkungan di permukaannya, selalu tampak datar. Memang kedua serangga di atas bola, sebagai manusia di permukaan bumi tidak dapat memeriksa kelengkungan permukaan dimana mereka diamati ketika skalanya sangat berbeda. Jika tidak ada pengukuran yang tepat maka kita tidak memiliki pengetahuan yang tepat dan penuh.

Ketika kita bekerja di ruang datar, jarak terpendek antara dua titik, misalnya ditentukan oleh segmen garis yang menghubungkannya. Di ruang lengkung, semuanya diproses secara berbeda, seperti yang sudah dibahas sebelumnya. Sekarang kita lihat sebuah masalah, “Dari titik tertentu di Bumi seorang pemburu berjalan 10 km ke selatan 10 km ke timur dan 10 km ke utara, sehingga kembali ke titik awal. Di sana ia menemukan seekor beruang. Apa warna beruang tersebut?” Sekilas mungkin mustahil. Namun, karena semua orang tahu bahwa bumi tidak datar, solusinya sudah dekat. Jika tiga gerakan dari pemburu saling tegak lurus satu sama lain dan ia kembali ke titik awal, dia akan menemukan kutub Bumi, yang dapat kita dapat lihat pada gambar berikut. (Sousa, 2010).



Gambar 1. Gambar Jalur Pemburu. (Sousa, 2010).

Selain itu dalam Hukum Kepler, Kepler menemukan bahwa hukum itu secara empirik didasarkan pada keyakinan penggambaran penelitian tentang Mars oleh Tycho Brahe. Meskipun mereka memulai pergerakan planet dari matahari tetapi mereka memulai dengan mengaplikasikan satelit bumi dan itu adalah suatu hal yang bagus untuk memulai. Salah satu Hukum Kepler ialah orbit dari setiap planet (satelit) adalah elips dengan matahari (bumi) pada suatu fokus. (Rudhito, 2020).

2.5 Implementasi Geometri Eliptik Pada Pembelajaran di Sekolah Menengah

Kini kita dapat mengatakan bahwa tidak ada keraguan tentang kehadiran geometri non-Euclides di dunia. Telah dikatakan bahwa geometri non-Euclides dapat di presentasikan dalam berbagai bentuk benda yang ada di lingkungan sekitar. Pada bidang kita dapat menghitung luas dan pada ruang kita dapat menghitung volume suatu benda. Jika pada lingkaran kita menghitung luas dengan menggunakan rumus

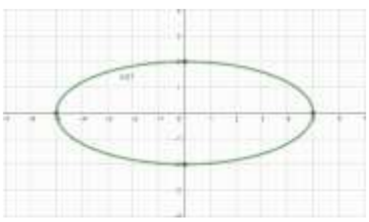
$$L = \pi r^2 \qquad (1)$$

Kemudian bagaimana dengan elips? Luas pada elips dapat dihitung dengan menggunakan integral Riemann sebagai berikut

$$L = \int_a^b f(x)\, dx. \qquad (2)$$

Untuk memudahkan siswa dalam memvisualisasikan bentuk elips dapat digunakan aplikasi *GeoGebra* dimana siswa hanya perlu memasukkan persamaan ke dalam *GeoGebra*. Berikut tabel yang memuat persamaan dan contoh visualisasi elips.

Tabel 2. Persamaan dan Contoh Visulisasi Elips.

Persamaan	Contoh Persamaan	Visualisasi Contoh
Elips $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$	$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$	

Keabstrakan geometri non-Euclides membuat geometri ini sulit untuk dibayangkan oleh siswa sehingga dibutuhkan bantuan bantuan alat peraga atau aplikasi yang memudahkan siswa untuk menvisualisasikan keabstrakan tersebut. Aplikasi *GeoGebra* merupakan salah satu aplikasi yang dapat menampilkan dan menggambarkan geometri non-Euclides. Berikut diberikan gambar yang menunjukkan visualisasi geometri non-Euclides menggunakan aplikasi *GeoGebra*.

Gambar 2. Visualisasi Geometri Non-Euclides dengan Aplikasi *GeoGebra*.

Pada gambar 2 geometri non-Euclides ditunjukkan dengan bantuan aplikasi *GeoGebra* secara jelas. *GeoGebra* dapat digunakan untuk menunjukkan jumlah sudut segitiga dalam geometri non-Euclides di mana pada elips jumlah sudut pada segitiga sembarang adalah lebih dari 180°. *GeoGebra* juga memudahkan siswa untuk memahami cara menentukan titik pusat dan jari-jari pada geometri sphere. Penggunaan aplikasi *GeoGebra* ini sangat baik untuk diterapkan dalam proses pembelajaran karena siswa akan memiliki pengalaman yang bermakna dalam memahami materi geometri non-Euclides.

3. Simpulan

Berdasarkan hasil kajian penelitian di atas dapat disimpulkan bahwa geometri eliptik yang mengasumsikan postulat kesejajaran Riemann ada dua yaitu geometri eliptik tunggal dan geometri eliptik ganda. Geometri eliptik ganda secara sederhana dapat di representasikan dalam geometri Euclides yakni bola. Selain itu diperoleh pula hasil yang menunjukkan bahwa geometri eliptik dapat diimplementasikan dalam pembelajaran matematika yakni integral eliptik (Riemann) untuk mencari luas elips dengan rumus $L = \int_a^b f(x)$ serta untuk memvisualisaikan elips dapat digunakan aplikasi *GeoGebra* agar siswa lebih mudah memahami materi yang akan diajarkan.

Daftar Pustaka

Budiarto, M. T., & Setyaningsih, R. (2019). *Konflik Kognitif Mahasiswa Dalam Memahami Cognitive Conflict of Students in Understanding*. *2*.

Ferdinand, G., & Philipp, L. (1918). *Bab 9 teori geometri non-euclidean riemann*. 230–254.

Mason, A. (2019). *Elliptical Geometry Application : Cartographic Projection*. *February*. file:///C:/Users/Mitha/Downloads/Elliptical_Geometry_Application__Cartographic_ProjectionFINAL14067071.pdf

Project, T. M., & Summary, E. (2012). *Chapter 5*. 78–88. https://ncert.nic.in/textbook/pdf/iemh105.pdf

Rudhito, M. A. (2020). *Filsafat Matematika Abad Ke-21*.

Sousa, C. A. (2010). Euclid's Error: Non-Euclidean Geometries Present in Nature and Art, Absent in Non-Higher and Higher. *International Journal for Cross-Disciplinary Subjects in Education*, *1*(4), 242–247. https://doi.org/10.20533/ijcdse.2042.6364.2010.0034

Widana, I. W. (2013). *SEGIEMPAT SACCHERI (Kajian Teoretik Geometri Non Euclid)*. *II*, 69–82.