PRISMA 5 (2022): 781-786
PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika
https://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/prisma/
ISSN 2613-9189

Penerapan Persamaan Navier-Stokes untuk Model Matematika Perpindahan Panas Aliran Fluida *Unsteady*

Annisa Dwi Sulistyaningtyas[a,*], Restu Ria Wantika[b]

[a,b]*Universitas PGRI Adi Buana Surabaya, Jl. Dukuh Menanggal XII/4, Surabaya 60234, Indonesia*

**Alamat Surel: annisadwistyas@unipasby.ac.id*

Abstrak

Persamaan Navier-Stokes adalah sistem persamaan diferensial non-linier yang sering digunakan oleh matematikawan sebagai persamaan dasar dalam pembangunan model matematika, khususnya di bidang fluida. Model matematika dibangun dari aliran fluida bersifat *unsteady* dan *incompressible* dengan pengaruh aliran konveksi bebas. Penyelesaian persamaan Navier-Stokes dilakukan secara analitik sehingga menghasilkan persamaan tak berdimensi yang selanjutnya ditransformasikan dengan menggunakaan fungsi arus dan menghasilkan persamaan similaritas sederhana. Dalam studi kasus ini, area pengamatan dilakukan pada titik stagnasi pada sebuah silinder eliptik, yaitu saat nilai $x \approx 0$. Dalam studi kasus ini, hasil penelitian berupa model matematika dari aliran fluida yang melewati sebuah permukaan silinder eliptik. Dari model tersebut diperoleh parameter perpindahan panas, yaitu bilangan Prandtl (Pr), Nilai Kental (K), dan Sumber Panas (γ). Sehingga, dapat disimpulkan bahwa persamaan Navier-Stokes dapat diterapkan dalam pembentukan model matematika pada proses perpindahan panas dari aliran fluida melalui permukaan silinder eliptik.

Kata kunci:

Persamaan Navier Stokes, Model Matematika, Perpindahan Panas, Unsteady

1. Pendahuluan

Persamaan Navier-Stokes merupakan sistem persamaan diferensial non-linier yang sering digunakan oleh matematikawan sebagai persamaan dasar dalam pembangunan model matematika, khususnya di bidang fluida. Persamaan Navier-Stokes merupakan bentuk diferensial dari hukun Newton II tentang pergerakan suatu fluida yang menyatakan bahwa gaya viskos atau kekentalan yang bekerja pada fluida berpengaruh pada perubahan momentum partikel fluida (Tiwow et al., 2015). Menurut (Martanegara & Yulianti, 2020), fluida adalah zat yang mengalami deformasi secara berkesinambungan apabila terkena gaya geser baik gaya geser yang ditimbulkan kecil ataupun besar.

Penelitian berkaitan dengan model matematika fluida pernah dilakukan oleh (Afifah & Putra, 2018). Penelitian tersebut menjelaskan tentang model matematika dari aliran fluida Nano Fluid pada sebuah bola teriris dengan pengaruh medan magnet dimana fluida tersebut mempunyai karakteristik tersendiri yaitu densitas, viskositas, kalor spesifik, dan konduktivitas termal. Dalam pembangunan model matematika, dibutuhkan persamaan pembangun berdimensi yang berasal dari persamaan kontinuitas, persamaan momentum, dan persamaan energi. Hasil dari penelitian tersebut yaitu adanya pengaruh medan magnet pada aliran tak tunak nano fluid yang mengalir pada permukaan bola teriris.

Pada penelitian ini,persamaan Navier-Stokes, yaitu terdiri atas persamaan kontinuitas dan persamaan momentum diterapkan pada aliran fluida viskoelastik dengan sifat aliran *unsteady* dan *incompressible*. Aliran fluida *unsteady* berarti bahwa aliran fluida mengalir bergantung terhadap waktu, sedangkan *incompressible* berarti bahwa aliran fluida memiliki nilai massa jenis atau densitas konstan.Dari penurunan persamaan Navier-Stokes tersebut, didapatkan persamaan berdimensiyang selanjutnya dilakukan transformasi ke dalam bentuk persamaan tak berdimensi.Kemudian, dilakukasn klasifikasi dengan menggunakan teori lapisan batas dalam bentuk persamaan similaritas. Area pengamatan pada penelitian ini terletak tepat pada titik stagnasi ($x \approx 0$). Aliran fluida mengalir dari bawah ke atas melewati

To cite this article:
Sulistyaningtyas, A.D. &Wantika, R.W. (*2022*). Penerapan Persamaan Navier-Stokes untuk Model Matematika Perpindahan Panas Aliran Fluida *Unstead. PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika 5, 781-786*

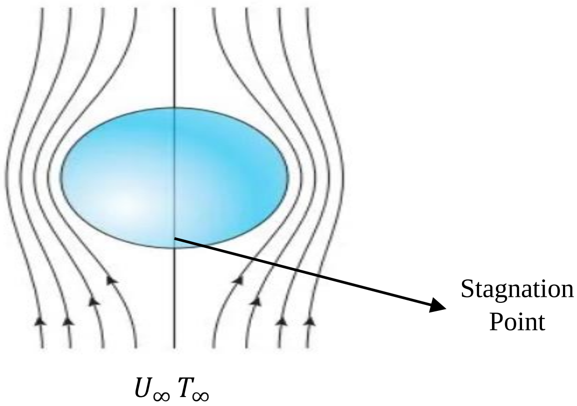
permukaan sebuah silinder eliptik sehingga menimbulkan gaya gesek yang mengakibatkan munculnya lapisan batas pada permukaan silinder.

Model matematika yang diperoleh dari aliran fluida viskoelastik dimana sifat alirannya kental dan elastis menimbulkan panas sebagai akibat dari gesekan antara fluida dengan permukaan benda. Dari model matematika tersebut, dapat diketahui bahwa penerapan persamaan Navier-Stokes pada aliran fluida berupa persamaan momentum dan energi yang memuat parameter panas, seperti bilangan Prandtl (Pr), Nilai Kental (K), dan Sumber Panas (γ). Sehingga dapat disimpulkan bahwa persamaan Navier-Stokes dapat diterapkan dalam perhitungan perpindahan panas pada aliran fluida yang melewati sebuah silinder eliptik dengan jenis fluida viskoelastik.Penelitian serupa tentang fluida juga pernah dilakukan oleh peneliti-peneliti sebelumnya, diantaranya oleh (Kasim et al., 2015), (Cheng, 2012), (Deswita & Lili, 2013), (Mahat et al., 2017), (Burshtein et al., 2017), (Sulistyono, 2015), dan (Muhajir, 2011).

2. Metode

2.1. Tahap Analisis Awal

Tahap ini menjelaskan tentang proses analisis permasalahan. Pada Gambar 1 menggambarkan bahwa fluida mengalir dengan kecepatan dan temperatur tertentu yang dinotasikan dengan U_∞ dan T_∞dari bawah ke atas. Dengan sifat aliran *unsteady* dan *incompressible*, fluida mengalir dengan sifat aliran konveksi bebas. Aliran fluida viskoelastik pada permukaan silinder eliptik menimbulkan gaya gesek sehingga meyebabkan timbulnya lapisan batas yang mengakibatkan terjadinya perpindahan panas.



Gambar 1. Visualisasi aliran fluida melewati silinder eliptik

2.2. Tahap Impelementasi

Tahap ini menjelaskan tentang implementasi persamaan Navier-Stokes pada model matematika dari penurunan persamaan Navier-Stokes. Tahapan-tahapan yang digunakan pada tahap implementasi model adalah sebagai berikut:

2.2.1 Membentuk persamaan pembangun berdimensi dari persamaan Navier-Stokes, yaitu persamaan kontinuitas, momentum, dan energi;

2.2.2 Mentransformasikan persamaan berdimensi ke persamaan tak berdimensi dengan menggunakan variabel terkait;

2.2.3 Melakukan klasifikasi dengan menggunakan bentuk persamaan similaritas menggunakan teori lapisan batas.

2.1 Tahap Analisis Akhir Model Matematika

Pada tahap ini dijelaskan tentang analisis hasil penelitian yang berupa model matematika dari aliran fluida viskoelastik pada permukaan benda silinder eliptik. Model matematika tersebut merupakan hasil turunan dari persamaan Navier-Stokes yangberpengaruh pada perpindahan panas aliran fluida dengan sifat aliran*unsteady* dan *incompressible*. Dari hasil akhir berupa model matematika, didapatkan parameter-

parameter panas yang berpengaruh dalam proses perpindahan panas, antara lain Bilangan Prandtl (Pr), Nilai Kental (K), dan Sumber Panas (γ).

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. Persamaan Pembangun

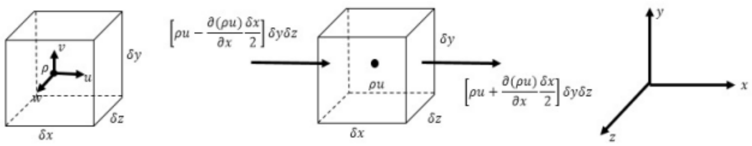
Model matematika yang dibangun diperoleh dari penurunan persamaan Navier Stokesdimana persamaan fluidayang didapat didasarkan pada persamaan kekekalan massa (kontinuitas), momentum, dan energi sebagai berikut(Hapsoro & Srigutomo, 2018):

3.1.1 Persamaan Kontinuitas

Berdasarkan hukum konservasi massa yang menjelaskan tentang laju perubahan massa pada sebuah sistem terhadap waktu sama dengan nol, maka persamaan kontinuitas dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{D}{Dt}\int_{sys} \rho \, d\forall = 0 \tag{1}$$

dengan ρ densitas fluida dan $\forall$ volume fluida. Volume control untuk penurunan persamaan kontinuitas pada koordinat cartesius dapat dilihat pada Gambar 2 (Ghurri, 2014).



Gambar 2. Komponen massa dari elemen volume kendali pada koordinat cartesius

Dari Gambar 2, diperoleh persamaan yang dibangun dari elemen volume kendali pada koordinat cartesius yang mengandung variabel $x, y,$ dan z sebagai berikut:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

Oleh karena penyelesaian persamaan Navier-Stokes dilakukan dengan memberikan beberapa asumsi diantaranya adalah fluida *incompressible* dan parameter aliran fluida bergantung pada variabel x dan y(Mahat et al., 2017), maka Persamaan (2) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

3.1.2 Persamaan Momentum

Berdasarkan Hukum II Newton yang menyatakan bahwa jumlah gaya yang bekerja pada sistem samadengan jumlah dari besaran momentum yang berubah, maka persamaan momentum dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\frac{D}{Dt}\int_{sys} \rho \, \boldsymbol{V} d\forall = \Sigma F \tag{4}$$

Dengan langkah yang sama seperti pada Persamaan (1), didapatkan persamaan momentum sebagai berikut:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}\boldsymbol{V}+\rho(\boldsymbol{V}.\nabla)\boldsymbol{V}=\Sigma F \tag{5}$$

atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\Sigma F$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\Sigma F \tag{6}$$

3.1.3 Persamaan Energi

Berdasarkan Hukum I Termodinamika yang menyatakan bahwa laju perubahan terhadap waktu dari energi yang tersimpan dalam sistem sama dengan jumlah energi kalor yang dipindahkan ke system, maka secara matematis persamaan energi dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{D}{Dt}\int_{sys} e\rho\,\boldsymbol{V}d\forall=\left(\dot{Q}+\dot{W}\right) \tag{7}$$

3.2. Model Matematika

Menurut (Kasim, 2014), proses penyederhanaan dengan menggunakan teori lapisan batas mengakibatkan persamaan momentum pada sumbu y dapat diabaikan, sehingga Persamaan (3) dan (6)menjadi persamaan berdimensi sebagai berikut:

$$\rho\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+v\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\right)=\nu\left[\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{y}^2}\right]+g\beta(\bar{T}-\bar{T}_\infty)\,sinA-\frac{k_0}{\rho}\left[\bar{u}\left(\frac{\partial^3\bar{u}}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}^2}\right)+\bar{v}\frac{\partial^3\bar{u}}{\partial\bar{y}^3}-\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\left(\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{y}\partial\bar{x}}\right)+\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}\left(\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{y}^2}\right)\right] \tag{8}$$

Sedangkan Persamaan (7) menjadi:

$$\frac{\partial\bar{T}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{x}}+v\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{y}}=\alpha\frac{\partial^2\bar{T}}{\partial\bar{y}^2}+\frac{Q_0}{\rho C_p}(\bar{T}-\bar{T}_\infty) \tag{9}$$

Dengan menggunakan variabel tak berdimensi (Kasim, 2014):

$$v=\frac{a}{\nu}Gr^{-\frac{1}{4}}\bar{v},\qquad \theta=\frac{\bar{T}-\bar{T}_\infty}{q_w\,a/k}$$

$$x=\frac{\bar{x}}{a},\qquad y=Gr^{1/4}\left(\frac{\bar{y}}{a}\right),\qquad u=\frac{a}{\nu}Gr^{-\frac{1}{2}}\bar{u} \tag{10}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan variabel tertentu, Persamaan (8) dan (9) ditransformasikan ke dalam bentuk tak berdimensi, maka diperoleh persamaan pembangun sebagai berikut:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2u}{\partial y^2}-K\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)+v\frac{\partial^3u}{\partial y^3}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}\right)+\theta\sin A \tag{11}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+u\frac{\partial\theta}{\partial x}+v\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{1}{Pr}\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+\gamma\theta \tag{12}$$

3.3 Fungsi Arus (Stream Function)

Menurut(Afifah & Putra, 2018), fungsi arus merupakan fungsi yang digunakan untuk menghubungkan dua komponen dari fungsi kecepatan yaitu komponen kecepatan yang berada pada arah sumbu x dan y, yaitu dalam hal ini u dan v. Fungsi arus didefinisikan sebagai berikut(Mohammad, 2014):

$$\psi = xk(x,y), \quad \theta = \theta(x,y) \tag{13}$$

dengan

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{14}$$

Oleh karena area pengamatan terletak pada titik stagnasi terdekat dengan *blunt body*, yaitu saatx≈0, maka diperoleh persamaan momentum dan energi sebagai berikut:

$$k''' - \frac{\partial \rho}{\partial t}k' + \rho(kk'' - (k')^2) + \theta - K\left(2k'k''' - kk^{(4)} - (k'')^2\right) = 0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{Pr}\theta'' + k\theta' + \gamma\theta \tag{16}$$

Dengan kondisi batas(Widodo et al., 2016):

$$\begin{gathered} t < 0: \qquad k = k' = \theta = 0 \text{ untuk setiap } (x,y), \\ t \geq 0: \quad k = k' = 0,\ \theta = -n\frac{\partial^2 k}{\partial y^2} \text{untuk } y = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 1, \theta = 0 \ \text{ untuk } y \to \infty \end{gathered} \tag{17}$$

dan diperoleh parameter perpindahan panas yaitu bilangan Prandtl (Pr), heat generation (γ), dan nilai Kental (K)

4. Simpulan

Berdasarkan hasil yang diperoleh dari pembahasan di atas dapat disimpulkan sebagai berikut:

(1) Diperoleh model matematika dari aliran fluida yang melewati sebuah silinder eliptik dengan sifat aliran *unsteady* dan *incompressible* pada titik stagnasiyaitu:

Persamaan Momentum:

$$k''' - \frac{\partial \rho}{\partial t}k' + \rho(kk'' - (k')^2) + \theta - K\left(2k'k''' - kk^{(4)} - (k'')^2\right) = 0$$

Persamaan Energi:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{Pr}\theta'' + k\theta' + \gamma\theta$$

(2) Model matematika menggambarkan adanya pengaruh kecepatan dan temperatur dari aliran fluida yang dilambangkan dengan k dan θ yang bergantung terhadap waktu.

(3) Dari model matematika tersebut, dapat diketahui bahwa persamaan Navier-Stokes berperan dalam pembangunan model matematika dari perpindahan panas aliran fluida pada sebuah permukaan silinder eliptik dengan sifat aliran *unsteady* dan *incompressible*. Hal terssebut dibuktikan dengan adanya parameter-parameter perpindahan panas yang dihasilkan dari pembangunan model

matematika, yaitu berupa bilangan Prandtl (Pr), *heat generation* (γ), dan nilai Kental (K) dimana parameter tersebut berpengaruh pada distribusi panas sepanjang permukaan benda.

Daftar Pustaka

Afifah, Y. N., & Putra, B. C. (2018). Model Matematika Aliran Tak Tunak Pada Nano Fluid Melewati Bola Teriris Dengan Pengaruh Medan Magnet. *Teknika: Engineering and Sains Journal*, *2*(2), 119. https://doi.org/10.51804/tesj.v2i2.274.119-124

Burshtein, N., Zografos, K., Shen, A. Q., Poole, R. J., & Haward, S. J. (2017). Inertioelastic flow instability at a stagnation point. *Physical Review X*. https://doi.org/10.1103/PhysRevX.7.041039

Cheng, C. Y. (2012). Free convection of non-Newtonian nanofluids about a vertical truncated cone in a porous medium. *International Communications in Heat and Mass Transfer*. https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2012.08.004

Deswita, L., & Lili, E. (2013). *Model Matematika Aliran Fluida Lapisan Batas Terhadap Terhadap Pelat Mendatar*. *2*, 319–321.

Ghurri. (2014). Dasar-Dasar Mekanika Fluida Ainul Ghurri Ph . D . *Jurnal Dasar-Dasar Mekanika Fluida*, 1–73.

Hapsoro, C. A., & Srigutomo, W. (2018). *2-D Fluid Surface Flow Modeling using Finite-Difference Method Pemodelan Aliran Fluida 2-D Pada Kasus Aliran Permukaan 2-D Fluid Surface Flow Modeling using Finite-Difference Method*. *August 2013*.

Kasim, A. R. M. (2014). Convective Boundary Layer Flow of Viscoelastic Fluid. In *Universiti Teknologi Malaysia, Faculty of Science: Ph. D. Thesis*.

Kasim, A. R. M., Jiann, L. Y., Rawi, N. A., Ali, A., & Shafie, S. (2015). Mixed Convection Flow of Viscoelastic Fluid over a Sphere under Convective Boundary Condition Embedded in Porous Medium. *Defect and Diffusion Forum*. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/ddf.362.67

Mahat, R., Rawi, N. A., Kasim, A. R. M., & Shafie, S. (2017). Mixed convection boundary layer flow of viscoelastic nanofluid past a horizontal circular cylinder: Case of constant heat flux. *Journal of Physics: Conference Series*. https://doi.org/10.1088/1742-6596/890/1/012052

Martanegara, H. A., & Yulianti, K. (2020). Model Matematika Fluida Lapisan Tipis Pada Bidang Miring. *Jurnal EurekaMatika*, *8*(1), 29–41.

Mohammad, N. F. (2014). Unsteady Magnetohydrodynamics Convective Boundary Layer Flow Past A Sphere in Viscous and Micropolar Fluids. *Universiti Technology Malaysia, Malaysia*.

Muhajir, K. (2011). Pengaruh Viskositas terhadap Aliran Fluida GasCair melalui Pipa Vertikal dengan Perangkat Lunak Ansys Fluent 13.0. *Jurnal Kompetensi Teknik*.

Sulistyono, B. A. (2015). Aplikasi Metode Beda Hingga Skema Eksplisit Pada Persamaan Konduksi Panas. *Math Educator Nusantara*.

Tiwow, V. A., Malago, J. D., Fisika, J., Matematika, F., & Alam, P. (2015). *Penerapan Persamaan Navier-Stokes Untuk Kasus Aliran Fluida Laminer Pada Pipa Tidak Horizontal Application of Navier-Stokes Equations To Laminar Fluid Flow Case In Unhorizontal Pipe*. *IV*(1), 51–56.

Widodo, B., Anggriani, I., Khalimah, D. A., Zainal, F. D. S., & Imron, C. (2016). Unsteady boundary layer magnetohydrodynamics in micropolar fluid past a sphere. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, *100*(2), 291–299. https://doi.org/10.17654/MS100020291