

# Kekuatan Sisi Refleksif pada Graf *Dragon Pendant* $DP_n(2)$ dan $DP_n(3)$

Miftahul Jannah<sup>a,\*</sup>, Diari Indriati<sup>b</sup>

<sup>a,b</sup> Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sebelas Maret, Jl. IR. Sutami 36A Kentingan, Surakarta 57126, Indonesia

\* Alamat Surel : [miftahul5jannah@student.uns.ac.id](mailto:miftahul5jannah@student.uns.ac.id)

## Abstrak

Misalkan  $G(V, E)$  didefinisikan sebagai graf tidak berarah, terhubung, dan sederhana dengan himpunan titik  $V(G)$  dan himpunan sisi  $E(G)$ . Suatu pemetaan dari elemen graf ke bilangan bulat disebut dengan pelabelan graf. Pelabelan- $k$  tak teratur sisi refleksif pada graf  $G$  adalah pelabelan yang mengambil bilangan bulat positif  $\{1, 2, \dots, k_e\}$  sebagai label sisi dan mengambil bilangan genap  $\{0, 2, \dots, 2k_v\}$  sebagai label titik dengan  $k = \max\{k_e, 2k_v\}$  sehingga semua bobot sisi pada graf  $G$  berbeda. Didefinisikan bahwa bobot sisi  $xy$  dalam pelabelan  $f$  pada graf  $G$  dinotasikan  $wt(xy)$  dengan  $wt(xy) = f(x) + f(xy) + f(y)$ . Nilai minimum  $k$  dari label paling besar pada graf  $G$  yang bisa dilabeli dengan pelabelan- $k$  tak teratur sisi refleksif disebut kekuatan tak teratur sisi refleksif dari graf  $G$  dan dinotasikan dengan  $res(G)$ . Artikel ini akan mengulas tentang pelabelan- $k$  tak teratur sisi refleksif pada graf *dragon pendant*  $DP_n(m)$  dengan  $n \geq 3$  dan  $m = 2, 3$  serta menentukan kekuatan sisi refleksif pada graf-graf tersebut.

## Kata kunci:

Pelabelan- $k$  tak teratur sisi refleksif, kekuatan sisi refleksif, graf *dragon pendant*.

© 2022 Dipublikasikan oleh Jurusan Matematika, Universitas Negeri Semarang

## 1. Pendahuluan

Seluruh graf yang dibahas dalam makalah ini merupakan graf tidak berarah, terhubung, dan sederhana. Pelabelan graf adalah salah satu materi yang kerap ada di dalam teori graf. Pemetaan dimana elemen-elemen graf dibawa ke bilangan bulat positif atau non negatif disebut pelabelan suatu graf (Wallis dan Marr, 2013). Kebanyakannya (daerah asal) dari pelabelan dalam suatu graf  $G$  merupakan himpunan sisi dan titik atau yang biasa disebut pelabelan total, himpunan titik atau biasa disebut pelabelan titik, dan himpunan sisi yang biasa disebut pelabelan sisi. Ada beberapa macam pelabelan graf, salah satunya adalah pelabelan- $k$  total tak teratur (Gallian, 2017).

Menurut Ba'ca *et al.* (2007) pelabelan- $k$  total tak teratur terbagi menjadi pelabelan- $k$  total tak teratur sisi dan pelabelan- $k$  total tak teratur titik. Selanjutnya di tahun 2017, Ryan *et al.* (Ba'ca *et al.*, 2017) memperkenalkan sebuah konsep baru pelabelan- $k$  total tak teratur diantaranya pelabelan- $k$  total tak teratur titik refleksif serta pelabelan- $k$  total tak teratur sisi refleksif. Pelabelan- $k$  total tak teratur sisi refleksif dalam graf  $G$  merupakan pelabelan yang mengambil bilangan bulat positif  $\{1, 2, \dots, k_e\}$  sebagai label sisi dan mengambil bilangan genap  $\{0, 2, \dots, 2k_v\}$  sebagai label titik. Ryan *et al.* (Ba'ca *et al.*, 2017) juga mendefinisikan bahwa kekuatan tak teratur sisi refleksif dari graf  $G$  yang dinotasikan dengan  $res(G)$  adalah nilai minimum  $k$  dari label terbesar. Berikut diberikan Lema untuk menentukan  $res(G)$  menurut Ryan *et al.* (Ba'ca *et al.*, 2017)

**Lema 1.** Untuk semua graf  $G$

$$res(G) \geq \begin{cases} \left\lceil \frac{|E(G)|}{3} \right\rceil, & \text{jika } |E(G)| \not\equiv 2, 3 \pmod{6}, \\ \left\lceil \frac{|E(G)|}{3} \right\rceil + 1, & \text{jika } |E(G)| \equiv 2, 3 \pmod{6}. \end{cases} \quad (1)$$

To cite this article:

Jannah, M. & Indriati, D. (2022). Kekuatan Sisi Refleksif pada Graf *Dragon Pendant*  $DP_n(2)$  dan  $DP_n(3)$ . PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika 5, 820-827

Pada penelitian yang samasebelumnya, telah ditentukan  $res(G)$  untuk beberapa jenis graf, misalnya graf prisma  $D_n$ , graf kipas  $F_n$ , graf roda  $W_n$ , dan graf basket  $B_n$  oleh Tanna *et al.* (2017). Kemudian Bačca *et al.* (2019) meneliti graf lingkaran  $C_n$ , serta Indriati *et al.* (2020) meneliti graf lintasan korona graf lengkap  $K_1$  dan graf lintasan korona graf lintasan  $P_2$ . Pada penelitian ini, penulis akan menentukan  $res(G)$  dari graf *dragon pendant*  $DP_n(m)$  dengan  $n \geq 3$  dan  $m = 2, 3$ .

## 2. Pembahasan

Graf *dragon pendant* merupakan hasil modifikasi graf *dragon* atau graf yang didapat dengan menggabungkan titik graf lingkaran dengan graf lintasan. Graf lingkaran di dalam graf *dragon* biasa disebut kepala serta graf lintasan di dalam graf *dragon* biasa disebut ekor. Graf *dragon* dinotasikan  $D_n(m)$  dimana  $n$  adalah jumlah titik pada graf lingkaran dan  $m$  adalah jumlah titik pada graf lintasan (Wantika, 2015). Graf *dragon pendant* dimodifikasi dengan menambahkan *pendant* di setiap titik kepala dimana titik tersebut tidak terhubung dengan graf lintasan dan dinotasikan dengan  $DP_n(m)$  dengan  $n \geq 3$  dan  $m \geq 2$ .

Graf *dragon pendant*  $DP_n(m)$  memiliki  $|V(DP_n(m))| = |E(DP_n(m))| = 2n + m - 1$ . Graf *dragon pendant* ini memiliki himpunan titik sebagai berikut  $V(DP_n(m)) = \{x_i : 1 \leq i \leq m\} \cup \{y_j : 1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\} \cup \{y_{n-(j-1)} : 1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\} \cup \{z_l : 1 \leq l \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\} \cup \{z_{(n-1)-(l-1)} : 1 \leq l \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\}$  serta himpunan sisi sebagai berikut  $E(DP_n(m)) = \{x_i x_{i+1} : 1 \leq i \leq m - 1\} \cup \{y_1 x_m\} \cup \{y_1 y_n\} \cup \{y_j y_{j+1} : 1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\} \cup \{y_{n-(j-1)} y_{n-j} : 1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\} \cup \{z_l y_j : 1 \leq l \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, j = l + 1\} \cup \{z_{(n-1)-(l-1)} y_{n-(j-2)} : 1 \leq l \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, j = l + 1\}$ . Kekuatan sisi refleksif pada graf *dragon pendant*  $DP_n(2)$  dapat diperoleh melalui Teorema 1, serta kekuatan sisi refleksif pada graf *dragon pendant*  $DP_n(3)$  dapat diperoleh melalui Teorema 2.

**Teorema 1.** Untuk semua bilangan bulat positif  $n \geq 3$  dan  $m = 2$

$$res(DP_n(2)) = \begin{cases} \frac{2n+3}{3}, & \text{untuk } n \equiv 0 \pmod{3}, \\ 2 \lfloor \frac{n}{3} \rfloor, & \text{untuk } n \not\equiv 0 \pmod{3}. \end{cases} \quad (2)$$

*Bukti.* Pertama dibuktikan batas bawah  $res(DP_n(2))$ . Diketahui bahwa jumlah sisi dari  $DP_n(2)$  merupakan  $2n + 1$ , maka dimiliki

$$res(DP_n(2)) \geq \begin{cases} \lfloor \frac{2n+1}{3} \rfloor, & \text{untuk } n \not\equiv 1 \pmod{3}, \\ \lfloor \frac{2n+1}{3} \rfloor + 1, & \text{untuk } n \equiv 1 \pmod{3}. \end{cases} \quad (3)$$

Untuk membuktikan batas bawah dari kekuatan sisi refleksif graf *dragon pendant*  $DP_n(2)$  adalah sebagai berikut.

Kasus 1. Untuk  $n \equiv 0 \pmod{3}$ .

$$res(DP_n(2)) \geq \lfloor \frac{2n+1}{3} \rfloor = \frac{2n+1+2}{3} = \frac{2n+3}{3}. \quad (4)$$

Oleh karena persamaan (3), untuk  $n \equiv 0 \pmod{3}$  didapatkan  $res(DP_n(2)) \geq \frac{2n+3}{3}$ .

Kasus 2. Untuk  $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ .

$n \equiv 1 \pmod{3}$

$$\begin{aligned} res(DP_n(2)) &\geq \lfloor \frac{2n+1}{3} \rfloor + 1 &&= \frac{2n+1}{3} + 1 && (5) \\ & &&= \frac{2n+1}{3} + \frac{3}{3} \\ & &&= \frac{2n+4}{3} \\ & &&= \frac{3}{3} \left( \frac{n+2}{3} \right) \\ & &&= 2 \lfloor \frac{n}{3} \rfloor. \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (3), untuk  $n \equiv 1 \pmod{3}$  didapatkan  $res(DP_n(2)) \geq 2 \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ .  
 $n \equiv 2 \pmod{3}$

$$\begin{aligned} res(DP_n(2)) &\geq \left\lfloor \frac{2n+1}{3} \right\rfloor = \frac{2n+1+1}{3} & (6) \\ &= \frac{2n+2}{3} \\ &= 2 \left( \frac{n+1}{3} \right) \\ &= 2 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (3), untuk  $n \equiv 2 \pmod{3}$  didapatkan  $res(DP_n(2)) \geq 2 \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ .

Selanjutnya dibuktikan batas atas pada graf *dragon pendant*  $DP_n(2)$ . Dikonstruksikan  $f$  pada pelabelan- $k$  graf *dragon pendant*  $DP_n(2)$  dengan  $k = \frac{2n+3}{3}$  untuk  $n \equiv 0 \pmod{3}$  dan  $2 \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  untuk  $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ ,

$$f(x_i) = 0, \text{ untuk } 1 \leq i \leq m. \quad (7)$$

$$f(y_j) = \begin{cases} 0, & \text{untuk } j = 1, \\ \frac{4j}{3}, & \text{untuk } j \equiv 0 \pmod{3}, 2 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \\ \frac{4j-4}{3}, & \text{untuk } j \equiv 1 \pmod{3}, 2 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \\ \frac{4j-2}{3}, & \text{untuk } j \equiv 2 \pmod{3}, 2 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor. \end{cases} \quad (8)$$

$$f(y_{n-(j-1)}) = \begin{cases} \text{untuk } n \equiv 0 \pmod{6} \text{ dan } j = \frac{n}{3}, \\ \frac{4j}{3}, \\ \text{untuk lainnya,} \\ 2, & \text{untuk } j = 1, \\ \frac{4j+6}{3}, & \text{untuk } j \equiv 0 \pmod{3}, 2 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \\ \frac{4j+2}{3}, & \text{untuk } j \equiv 1 \pmod{3}, 2 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \\ \frac{4j+4}{3}, & \text{untuk } j \equiv 2 \pmod{3}, 2 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor. \end{cases} \quad (9)$$

$$f(z_l) = \begin{cases} \frac{4l}{3}, & \text{untuk } l \equiv 0 \pmod{3}, 1 \leq l \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, \\ \frac{4l+2}{3}, & \text{untuk } l \equiv 1 \pmod{3}, 1 \leq l \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, \\ \frac{4l+4}{3}, & \text{untuk } l \equiv 2 \pmod{3}, 1 \leq l \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor. \end{cases} \quad (10)$$

$$f(z_{(n-1)-(l-1)}) = \begin{cases} \frac{4l}{3}, & \text{untuk } l \equiv 0 \pmod{3}, 1 \leq l \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, \\ \frac{4l+2}{3}, & \text{untuk } l \equiv 1 \pmod{3}, 1 \leq l \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, \\ \frac{4l+4}{3}, & \text{untuk } l \equiv 2 \pmod{3}, 1 \leq l \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor. \end{cases} \quad (11)$$

$$f(y_1 x_m) = 2. \quad (12)$$

$$f(x_i x_{i+1}) = 1, i = 1. \quad (13)$$

$$f(y_1 y_n) = 2. \quad (14)$$

$$f(y_j y_{j+1}) = \begin{cases} \text{untuk } n \equiv 3 \pmod{6} \text{ dan } j = \frac{n+1}{2}, \\ \frac{4j+1}{3}, \\ \text{untuk lainnya,} \\ \frac{4j-3}{3}, \text{ untuk } j \equiv 0 \pmod{3}, 1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \\ \frac{4j-1}{3}, \text{ untuk } j \equiv 1 \pmod{3}, 1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \\ \frac{4j-5}{3}, \text{ untuk } j \equiv 2 \pmod{3}, 1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor. \end{cases} \quad (15)$$

$$f(y_{n-(j-1)} y_{n-j}) = \begin{cases} \text{untuk } n \equiv 0 \pmod{6} \text{ dan } j = \frac{n-2}{2}, \\ \frac{4j+4}{3}, \\ \text{untuk lainnya,} \\ \frac{4j}{3}, \text{ untuk } j \equiv 0 \pmod{3}, 1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1, \\ \frac{4j+2}{3}, \text{ untuk } j \equiv 1 \pmod{3}, 1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1, \\ \frac{4j-2}{3}, \text{ untuk } j \equiv 2 \pmod{3}, 1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1. \end{cases} \quad (16)$$

$$f(z_l y_j) = \begin{cases} \frac{4l+3}{3}, \text{ untuk } l \equiv 0 \pmod{3}, 1 \leq l \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, j = l+1, \\ \frac{4l-1}{3}, \text{ untuk } l \equiv 1 \pmod{3}, 1 \leq l \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, j = l+1, \\ \frac{4l-5}{3}, \text{ untuk } l \equiv 2 \pmod{3}, 1 \leq l \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, j = l+1. \end{cases} \quad (17)$$

$$f(z_{(n-1)-(l-1)} y_{n-(j-2)}) = \begin{cases} \frac{4l}{3}, \text{ untuk } l \equiv 0 \pmod{3}, 1 \leq l \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, j = l+1, \\ \frac{4l+2}{3}, \text{ untuk } l \equiv 1 \pmod{3}, 1 \leq l \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, j = l+1, \\ \frac{4l-2}{3}, \text{ untuk } l \equiv 2 \pmod{3}, 1 \leq l \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, j = l+1. \end{cases} \quad (18)$$

Berdasarkan pembuktian batas atas serta batas bawah dari graf *dragon pendant*  $DP_n(2)$  diperoleh nilai maksimum dari label titik yang merupakan bilangan bulat genap maupun label sisi yang merupakan bilangan bulat positif yaitu  $\frac{2n+3}{3}$  untuk  $n \equiv 0 \pmod{3}$  dan  $2 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$  untuk  $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ . Oleh sebab itu, diperoleh bobot sisi sebagai berikut,

$$w_t(y_1 x_m) = 2. \quad (19)$$

$$w_t(x_i x_{i+1}) = 1, i = 1. \quad (20)$$

$$w_t(y_1 y_n) = 4. \quad (21)$$

$$w_t(y_j y_{j+1}) = 4j - 1, j = 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor. \quad (22)$$

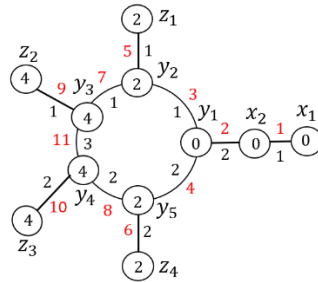
$$w_t(y_{n-(j-1)} y_{n-j}) = 4j + 4, j = 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1. \quad (23)$$

$$w_t(z_l y_j) = 4l + 1, l = 1, \dots, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, j = l + 1. \quad (24)$$

$$w_t(z_{(n-1)-(l-1)} y_{n-(j-2)}) = 4l + 2, l = 1, \dots, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, j = l + 1. \quad (25)$$

Dari penelitian yang sudah dilakukan, terlihat bahwa semua bobot sisi dari graf *dragon pendant*  $DP_n(2)$  berbeda, batas bawah serta batas atas sama dengan  $res(DP_n(2))$ . Oleh karena itu  $f$  memenuhi elemen pelabelan-ktak teratur sisi refleksif dan mempunyai kekuatan sisi refleksif ( $res$ ) sesuai Teorema 1. Dengan demikian teorema terbukti. ■

Gambar 1 adalah ilustrasi dari pelabelan-4 tak teratur sisi refleksif dari graf *dragon pendant*  $DP_5(2)$ . Pada gambar 1, angka dengan warna merah merupakan bobot sisi dari graf *dragon pendant*  $DP_5(2)$  dan angka dengan warna hitam merupakan label sisi maupun label titik dari graf *dragon pendant*  $DP_5(2)$ , sedangkan huruf hitam merupakan nama dari label titik serta sisi dari graf *dragon pendant*  $DP_5(2)$ .



**Gambar 1.** pelabelan-4 tak teratur sisi refleksif graf *dragon pendant*  $DP_5(2)$ .

Selanjutnya dibahas tentang teorema untuk  $res(DP_n(3))$ .

**Teorema 2.** Untuk semua bilangan bulat positif  $n \geq 3$  dan  $m = 3$

$$res(DP_n(3)) = \begin{cases} \frac{2n + 6}{3}, & \text{untuk } n \equiv 0 \pmod{3}, \\ \frac{2n + 4}{3}, & \text{untuk } n \equiv 1 \pmod{3}, \\ \frac{2n + 2}{3}, & \text{untuk } n \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases} \tag{26}$$

*Bukti.* Pertama dibuktikan batas bawah  $res(DP_n(3))$ . Diketahui bahwa jumlah sisi dari  $DP_n(3)$  merupakan  $2n + 2$ , maka dimiliki

$$res(DP_n(3)) \geq \begin{cases} \left\lceil \frac{2n + 2}{3} \right\rceil, & \text{untuk } n \not\equiv 0 \pmod{3}, \\ \left\lceil \frac{2n + 2}{3} \right\rceil + 1, & \text{untuk } n \equiv 0 \pmod{3}. \end{cases} \tag{27}$$

Untuk membuktikan batas bawah dari kekuatan sisi refleksif graf *dragon pendant*  $DP_n(3)$  adalah sebagai berikut.

Kasus 1. Untuk  $n \equiv 0 \pmod{3}$ .

$$res(DP_n(3)) \geq \left\lceil \frac{2n + 2}{3} \right\rceil + 1 = \frac{2n + 2 + 1}{3} + 1 = \frac{2n + 3}{3} + \frac{3}{3} = \frac{2n + 6}{3}. \tag{28}$$

Oleh karena persamaan (27), untuk  $n \equiv 0 \pmod{3}$  didapatkan  $res(DP_n(3)) \geq \frac{2n+6}{3}$ .

Kasus 2. Untuk  $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ .

$n \equiv 1 \pmod{3}$

$$res(DP_n(3)) \geq \left\lceil \frac{2n + 2}{3} \right\rceil = \frac{2n + 2 + 2}{3} = \frac{2n + 4}{3}. \tag{29}$$

Berdasarkan persamaan (27), untuk  $n \equiv 1 \pmod{3}$  didapatkan  $res(DP_n(3)) \geq \frac{2n+4}{3}$ .

$n \equiv 2 \pmod{3}$

$$res(DP_n(3)) \geq \left\lceil \frac{2n + 2}{3} \right\rceil = \frac{2n + 2}{3}. \tag{30}$$

Berdasarkan persamaan (27), untuk  $n \equiv 2 \pmod{3}$  didapatkan  $res(DP_n(3)) \geq \frac{2n+2}{3}$ .

Selanjutnya dibuktikan batas atas pada grafdragon *pendant*  $DP_n(3)$ . Dikonstruksikan  $f$  pada pelabelan- $k$  grafdragon *pendant*  $DP_n(3)$  dengan  $k = \frac{2n+6}{3}$  untuk  $n \equiv 0 \pmod{3}$ ,  $\frac{2n+4}{3}$  untuk  $n \equiv 1 \pmod{3}$ , dan  $\frac{2n+2}{3}$  untuk  $n \equiv 2 \pmod{3}$ .

$$f(x_i) = 0, \text{ untuk } 1 \leq i \leq m. \tag{31}$$

$$f(y_j) = \begin{cases} 0, \text{ untuk } j = 1, \\ \frac{4j}{3}, \text{ untuk } j \equiv 0 \pmod{3}, 2 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \\ \frac{4j-4}{3}, \text{ untuk } j \equiv 1 \pmod{3}, 2 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \\ \frac{4j-2}{3}, \text{ untuk } j \equiv 2 \pmod{3}, 2 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor. \end{cases} \tag{32}$$

$$f(y_{n-(j-1)}) = \begin{cases} \text{untuk } n \equiv 0 \pmod{6} \text{ dan } j = \frac{n}{2}, \\ \frac{4j}{3}, \\ \text{untuk } n \equiv 2 \pmod{6} \text{ dan } j = \frac{n}{2}, \\ \frac{4j+2}{3}, \\ \text{untuk lainnya,} \\ 2j, \text{ untuk } 1 \leq j \leq 2, \\ \frac{4j+6}{3}, \text{ untuk } j \equiv 0 \pmod{3}, 3 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \\ \frac{4j+8}{3}, \text{ untuk } j \equiv 1 \pmod{3}, 3 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \\ \frac{4j+4}{3}, \text{ untuk } j \equiv 2 \pmod{3}, 3 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor. \end{cases} \tag{33}$$

$$f(z_l) = \begin{cases} \frac{4l}{3}, \text{ untuk } l \equiv 0 \pmod{3}, 1 \leq l \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, \\ \frac{4l+2}{3}, \text{ untuk } l \equiv 1 \pmod{3}, 1 \leq l \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, \\ \frac{4l-2}{3}, \text{ untuk } l \equiv 2 \pmod{3}, 1 \leq l \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor. \end{cases} \tag{34}$$

$$f(z_{(n-1)-(l-1)}) = \begin{cases} \frac{4l}{3}, \text{ untuk } l \equiv 0 \pmod{3}, 1 \leq l \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, \\ \frac{4l+2}{3}, \text{ untuk } l \equiv 1 \pmod{3}, 1 \leq l \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, \\ \frac{4l+4}{3}, \text{ untuk } l \equiv 2 \pmod{3}, 1 \leq l \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor. \end{cases} \tag{35}$$

$$f(y_1x_m) = 3. \tag{36}$$

$$f(x_i x_{i+1}) = i, 1 \leq i \leq m-1. \tag{37}$$

$$f(y_1y_n) = 3. \tag{38}$$

$$f(y_j y_{j+1}) = \begin{cases} 4, j = 2, n = 3, \\ \frac{4j}{3}, \text{ untuk } j \equiv 0 \pmod{3}, 1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \\ \frac{4j+2}{3}, \text{ untuk } j \equiv 1 \pmod{3}, 1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \\ \frac{4j-2}{3}, \text{ untuk } j \equiv 2 \pmod{3}, 1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, j \neq 2, n \neq 3. \end{cases} \tag{39}$$

$$f(y_{n-(j-1)}y_{n-j}) = \begin{cases} \text{untuk } n \equiv 0 \pmod{6} \text{ dan } j = \frac{n-2}{2}, \\ \frac{4j+7}{3}, \\ \text{untuk } n \equiv 2 \pmod{6} \text{ dan } j = \frac{n-2}{2}, \\ j+2, \\ \text{untuk lainnya,} \\ 3, \text{ untuk } j=1, \\ \frac{4j-3}{3}, \text{ untuk } j \equiv 0 \pmod{3}, 2 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1, \\ \frac{4j-1}{3}, \text{ untuk } j \equiv 1 \pmod{3}, 2 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1, \\ \frac{4j+1}{3}, \text{ untuk } j \equiv 2 \pmod{3}, 2 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1. \end{cases} \quad (40)$$

$$f(z_l y_j) = \begin{cases} 2, \text{ untuk } l=1, \\ \frac{4l+6}{3}, \text{ untuk } l \equiv 0 \pmod{3}, 2 \leq l \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, j=l+1, \\ \frac{4l+2}{3}, \text{ untuk } l \equiv 1 \pmod{3}, 2 \leq l \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, j=l+1, \\ \frac{4l+4}{3}, \text{ untuk } l \equiv 2 \pmod{3}, 2 \leq l \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, j=l+1. \end{cases} \quad (41)$$

$$f(z_{(n-1)-(l-1)}y_{n-(j-2)}) = \begin{cases} 3, \text{ untuk } l=1, \\ \frac{4l+3}{3}, \text{ untuk } l \equiv 0 \pmod{3}, 2 \leq l \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, j=l+1, \\ \frac{4l-1}{3}, \text{ untuk } l \equiv 1 \pmod{3}, 2 \leq l \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, j=l+1, \\ \frac{4l+1}{3}, \text{ untuk } l \equiv 2 \pmod{3}, 2 \leq l \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, j=l+1. \end{cases} \quad (42)$$

Berdasarkan pembuktian batas atas serta batas bawah dari graf *dragon pendant*  $DP_n(3)$  diperoleh nilai maksimum dari label titik yang merupakan bilangan bulat genap maupun label sisi yang merupakan bilangan bulat yaitu  $\frac{2n+6}{3}$  untuk  $n \equiv 0 \pmod{3}$ ,  $\frac{2n+4}{3}$  untuk  $n \equiv 1 \pmod{3}$ , dan  $\frac{2n+2}{3}$  untuk  $n \equiv 2 \pmod{3}$ . Oleh sebab itu, diperoleh bobot sisi sebagai berikut,

$$w_t(y_1 x_m) = 3 \quad (43)$$

$$w_t(x_i x_{i+1}) = i, 1 \leq i \leq m-1 \quad (44)$$

$$w_t(y_1 y_n) = 5 \quad (45)$$

$$w_t(y_j y_{j+1}) = 4j, j = 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \quad (46)$$

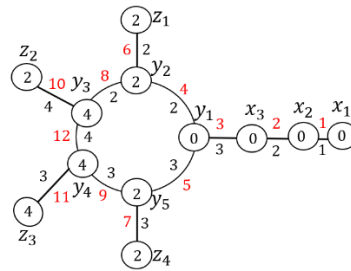
$$w_t(y_{n-(j-1)} y_{n-j}) = 4j+5, j = 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1 \quad (47)$$

$$w_t(z_l y_j) = 4l+2, l = 1, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, j = l+1 \quad (48)$$

$$w_t(z_{(n-1)-(l-1)} y_{n-(j-2)}) = 4l+3, l = 1, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, j = l+1 \quad (49)$$

Dari penelitian yang sudah dilakukan, terlihat bahwa semua bobot sisi dari graf *dragon pendant*  $DP_n(3)$  berbeda, batas bawah serta batas atas sama dengan  $res(DP_n(3))$ . Oleh karena itu  $f$  memenuhi elemen pelabelan- $k$  tak teratur sisi refleksif dan mempunyai kekuatan sisi refleksif ( $res$ ) sesuai Teorema 2. Dengan demikian teorema terbukti. ■

Gambar 2 adalah ilustrasi dari pelabelan-4 tak teratur sisi refleksif dari graf *dragon pendant*  $DP_5(3)$ . Pada gambar 2, angka dengan warna merah merupakan bobot sisi dari graf *dragon pendant*  $DP_5(3)$  dan angka dengan warna hitam merupakan label sisi maupun label titik dari graf *dragon pendant*  $DP_5(3)$ , sedangkan huruf hitam merupakan nama dari label titik serta sisi dari graf *dragon pendant*  $DP_5(3)$ .



**Gambar 1.** pelabelan-4 tak teratur sisi refleksif graf *dragon pendant*  $DP_5(3)$

### 3. Simpulan

Berdasarkan uraian tersebut, diperoleh kesimpulan yaitu kekuatan sisi refleksif graf *dragon pendant*  $DP_n(2)$  yaitu  $\frac{2n+3}{3}$  untuk  $n \equiv 0 \pmod{3}$  dan  $2 \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  untuk  $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ . Sedangkan kekuatan sisi refleksif graf *dragon pendant*  $DP_n(3)$  yaitu  $\frac{2n+6}{3}$  untuk  $n \equiv 0 \pmod{3}$ ,  $\frac{2n+4}{3}$  untuk  $n \equiv 1 \pmod{3}$ , dan  $\frac{2n+2}{3}$  untuk  $n \equiv 2 \pmod{3}$ . Penulis berharap bagi pihak yang tertarik dengan topik pelabelan- $k$  tak teratur sisi refleksif maupun kekuatan sisi refleksif pada graf dapat melakukan penelitian untuk menentukan kekuatan sisi refleksif graf *dragon pendant*  $DP_n(m)$  untuk  $n \geq 3, m \geq 4$ .

### Daftar Pustaka

- Bača, M., S. Jendrol', M. Miller, and J. Ryan. (2007). On Irregular Total Labeling. *Discrete Mathematics* 307, 1378-1388.
- Bača, M., M. Irfan, A. A. Semaničová-Feňovíková, and D. Tanna. (2019). Note on Edge Irregular Reflexive Labelings of Graphs. *AKCE International Journal of Graph and Combinatorics* 16, 145-157.
- Bača, M., M. Irfan, J. Ryan, A. Semaničová-Feňovíková, and D. Tanna. (2017). On Edge Irregular Reflexive Labellings for the Generalized Friendship Graphs, *Mathematics* 67:1-11.
- Galian, J. A. (2018). A Dynamic Survey of Graph Labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics*, no. #DS6 21, 1-502.
- Indriati, D., Widodo, and I. Rosyida (2020). Edge Irregular Reflexive Labeling on Corona of Path and Other Graph. *Journal of Physics: Conference Series*.
- Tanna, D., J. Ryan, A. and Semaničová-Feňovíková. (2017). Edge Irregular Reflflexive Labeling of Prisms and Wheels. *Australasian Journal of Combinatorics* 69, (3): 394-401.
- Wallis, W. D. and A. M. Marr (2013). Magic Graphs, Second Edi. *Springer Science and Business Media*, New York
- Wantika, R. R. (2015). Pelabelan Graceful pada Graf Dragon Ganda dan Graf Dragon Pendant (Graceful Labeling in Double Dragon Graph and Pendant Dragon Graph). (*Masters thesis*), Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.