PRISMA 5 (2022): 834-841
PRISMA, PROSIDING SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA
https://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/prisma/
ISSN 2613-9189

Pelabelan Total Sisi *Trimagic* Super pada Graf Pot Bunga $C_m S_n$

Gustama Ma'ruf Imelda[a,*], Titin Sri Martini[b]

[a,b] *Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sebelas Maret, Jl. Ir. Sutami 36A Kentingan, Surakarta 57126, Indonesia*

**Alamat Surel: gustamamamaruf@student.uns.ac.id*

Abstrak

Suatu graf $\mathrm{G}(\mathrm{V}, \mathrm{E})$ dengan p *vertex* (titik) dan q *edge* (sisi) disebut memiliki pelabelan total sisi *trimagic* jika terdapat pemetaan bijektif $f: V \cup \mathrm{E} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, \mathrm{p}+\mathrm{q}\}$ sehingga untuk setiap sisi $uv \in \mathrm{E}(\mathrm{G})$, nilai $f(u) + f(uv) + f(v)$ adalah tiga nilai konstanta yang berbeda yaitu k_1, k_2, dan k_3. Pelabelan total sisi *trimagic* disebut sebuah pelabelan total sisi *trimagic* super pada suatu graf G jika titik diberi label himpunan bilangan $\{1, 2, 3, \dots, p\}$. Graf pot bunga $(C_m S_n)$ dibentuk dari gabungan graf *cycle* C_m dan graf *star* S_n, yang digabungkan dengan sebuah *bridge* yang menghubungkan *vertex* pusat graf *star* S_n dengan satu *vertex* pada graf *cycle* C_m. Pada penelitian ini ditentukan pelabelan total sisi *trimagic* super pada graf pot bunga. Hasil penelitian menunjukkan bahwa graf pot bunga memuat pelabelan total sisi *trimagic* super dengan nilai $k_1 = 2(m+n)+5$, $k_2 = 2(m+n)+4$, $k_3 = 3m+2n+4$ untuk $m = 3$ dan $n \geq 3$; $k_1 = 3m+2n+4$, $k_2 = 4m+2n+4$, $k_3 = 2(m+n)+4$ untuk $m\ ganjil,\ m \geq 5$ dan $n \geq 3$; $k_1 = 3m+2n+4$, $k_2 = 2(m+n)+4$, $k_3 = 3m+2n+3$ untuk $m\ genap,\ m \geq 4$ dan $n \geq 3$.

Kata kunci:

Pelabelan, *trimagic*, pelabelan total sisi *trimagic* super, graf pot bunga

1. Pendahuluan

Pelabelan graf merupakan suatu materi yang kerap ada di dalam teori graf. Suatu fungsi yang memetakan elemen suatu graf ke bilangan bulat posititif non negatif disebut pelabelan graf. Dalam pelabelan graf terdapat tiga macam , diantaranya yaitu pertama adalah pelabelan titik, kedua adalah pelabelan sisi, serta yang ketiga adalah pelabelan titik dan sisi (total). Suatu graf adalah jika terdapat himpunan *vertex* dan himpunan *edge* yang tidak kosong keduanya. Himpunan titik atau *vertex* dinotasikan dengan $V(G)$, sedangkan sisi yang menghubungkan antara titik-titik tersebut adalah *edge*, himpunannya dinotasikan dengan $E(G)$.

Hingga kini, pelabelan mengalami perkembangan, diantaranya pelabelan *magic*, pelabelan *antimagic*, pelabelan *bimagic*, pelabelan *trimagic*, dan lain sebagainya. Dalam perkembangannya banyak kajian yang membahas tentang pelabelan, pelabelan *magic* pertama kali dikenalkan oleh Sedlacek (Sedlack, 1964) pada tahun 1964, kemudian dikembangkan oleh (Rosa, 1970) menjadi pelabelan total sisi *magic*. Pelabelan *antimagic* diperkenalkan pertama kali oleh Hartsfield dan Ringel pada tahun 1990. Kemudian, pada tahun 2004 Babujee (Babujee, 2004) memperkenalkan pelabelan sisi *bimagic* pada suatu graf.

Pada tahun 2013 Jayasekaran *et al.* (C. Jayasekaran M. R., 2013), memperkenalkan pelabelan total sisi *trimagic* pada suatu graf. Suatu graf $G(V, E)$ dengan $|V(G)|$ adalah banyaknya *vertex* atau p dan $|E(G)|$ adalah banyaknya *edge* atau q disebut memiliki pelabelan total sisi *trimagic* jika terdapat pemetaan bijektif $f: V \cup E \rightarrow \{1,2,3, \dots, p+q\}$ sedemikian hingga untuk tiap sisi $uv \in E(G)$, nilai $f(u) + f(uv) + f(v)$ adalah tiga nilai konstanta yang berbeda yaitu k_1, k_2, dan k_3. Pelabelan total sisi *trimagic* disebut sebuah pelabelan total sisi *trimagic* super pada suatu graf G jika titik diberi label himpunan bilangan $\{1,2,3, \dots, p\}$. Pada tahun 2018, Jayasekaran, Robinson, dan Flower (C. Jayasekaran S. R., 2018) membuktikan pelabelan total sisi *trimagic* pada graf *cycle related graphs*. Kemudian, pada tahun 2019, Amuthavalli dan Sugapriya (K. Amuthavalli, 2019) membuktikan *reverse* pelabelan super sisi *trimagic*

To cite this article:
Imelda, G.M., Martini, T.S. (2022). Pelabelan Total Sisi Trimagic pada Graf Pot Bunga $C_m S_n$. PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika 5, 834-841

pada *star related graphs.* Pada penelitian ini dibuktikan pelabelan total sisi *trimagic* super pada graf pot bunga ($C_m S_n$) dengan $m, n \geq 3$.

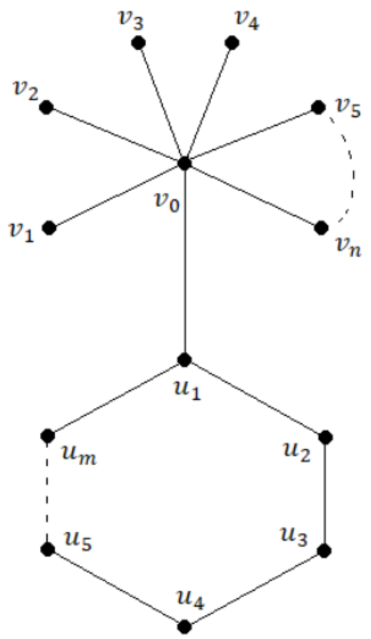
2. Metode Penelitian

Metode penelitian yang diterapkan dalam penelitian ini adalah kajian pustaka yaitu mempelajari berbagai referensi dari buku-buku, jurnal maupun tulisan mengenai teori graf khususnya pelabelan *trimagic*. Langkah-langkah menentukan pelabelan total sisi *trimagic* super dari graf pot bunga $C_m S_n$ sebagai berikut:

1. Menentukan banyaknya titik dan sisi pada graf pot bunga $C_m S_n$.
2. Menentukan label titik-titik dalam graf dengan label $1, 2, \ldots, p$, kemudian menentukan label sisi pada graf tersebut dengan label $p+1,\ p+2, \ldots,\ p+q$.
3. Mengkombinasikan label titik dan sisi dengan memperhatikan teknik pelabelan total sisi *trimagic* super sehingga diperoleh barisan bobot sisi yaitu k_1, k_2, atau k_3.
4. Menentukan pola umum pelabelan total sisi *trimagic* super pada graf pot bunga $C_m S_n$.
5. Membangun teorema untuk membuktikan kebenaran pola pelabelan total sisi *trimagic* super pada graf pot bunga $C_m S_n$.
6. Membuat kesimpulan.

3. Hasil dan Pembahasan

Graf pot bunga $C_m S_n$ (Ahmad, 2012) dibentuk dari gabungan graf *cycle* C_m dan graf *star* S_n, yang digabungkan dengan sebuah *bridge* yang menghubungkan *vertex* pusat graf *star* S_n dengan satu *vertex* pada graf *cycle* C_m. Diberikan contoh graf pot bunga $C_m S_n$ pada Gambar 3.1.



Gambar 1. Graf Pot Bunga $C_m S_n$

Teorema 3.1. Graf pot bunga $C_m S_n$ memuat pelabelan total sisi *trimagic* super untuk bilangan bulat positif $m, n \geq 3$.

Bukti. Misal graf G adalah Graf pot bunga $C_m S_n$. Graf G mempunyai titik sebanyak $|V(G)| = m + n + 1$ dan mempunyai sisi sebanyak $|E(G)| = m + n + 1$. Didefinisikan himpunan titik $V(G) = \{u_i |\ i \in [1, m]\} \cup \{v_j |\ j \in [0, n]\}$, dengan u_i adalah label *vertex* graf *cycle* dan v_j adalah label *vertex* graf *star* serta himpunan sisi $E(G) = \{u_i u_{i+1} |\ i = \{1, 2, 3, \ldots, m-1\}\} \cup \{u_1 u_m\} \cup \{v_0 u_1\} \cup \{v_0 v_j |\ j \in [1, n]\}$, dengan $\{u_i u_{i+1}\} \cup \{u_1 u_m\}$ adalah sisi pada graf *cycle*, $\{v_0 u_1\}$ adalah sisi penghubung dari graf *cycle* dan graf *star*, dan $\{v_0v_j\}$ adalah sisi pada graf *star*. Didefinisikan pemetaan bijektif dari graf G adalah $f: V \cup E \rightarrow \{1,2,3, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$ untuk $m, n \geq 3$ sedemikian sehingga,

$$f\,(u_i) = i, \qquad \text{untuk } 1 \leq i \leq m$$

$$f\,(v_j) = m + j + 1, \qquad \text{untuk } 0 \leq j \leq n.$$

Disebut pelabelan total sisi *trimagic* super pada graf G apabila *vertex* yang ada pada graf G diberi label dengan himpunan $V(G) = \{1,2,3, \dots, |V(G)|\}$. Titik $\{u_1, u_2, u_3, \dots, u_m\}$ adalah himpunan titik pada graf *cycle*, dan titik $\{v_0, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah himpunan titik pada graf *star*, dengan pusat di v_0.

Selanjutnya pembuktian pelabelan total sisi *trimagic* super pada graf pot bunga C_mS_n untuk $m, n \geq 3$ dibagi menjadi tiga kasus.

Kasus 1. $m = 3$ dan $n \geq 3$

Pada kasus 1 akan dibuktikan untuk $m = 3$ dan $n \geq 3$. Didefinisikan pemetaan bijektif $f: V \cup E \rightarrow \{1,2,3, \dots, (|V(G)| + |E(G)|)\}$ sehingga,

$f\,(u_i) = i,$ untuk $1 \leq i \leq m$

$f\,(v_j) = m + j + 1,$ untuk $0 \leq j \leq n$

$f(v_0v_j) = m + 2n - j + 2,$ untuk $1 \leq j \leq n$

$f(v_0u_1) = m + 2n + 2$

$f(u_iu_{i+1}) = 2(m + n) - 2i + 4,$ untuk $1 \leq i \leq m - 1$

$f(u_1u_m) = 2(m + n) + 1$

akan ditunjukkan bahwa pelabelan graf pot bunga $C_mS_n$untuk $m = 3$ dan $n \geq 3$ merupakan pelabelan total sisi *trimagic* super.

Untuk sisi v_0v_j, $1 \leq j \leq n$

$$\begin{aligned} f(v_0) + f(v_0v_j) + f(v_j) &= (m + j + 1) + (m + 2n - j + 2) + (m + j + 1) \\ &= (m + 0 + 1) + (m + 2n - j + 2) + (m + j + 1) \\ &= 3m + 2n + 4 \\ &= k_3 \end{aligned}$$

Untuk sisi v_0u_1

$$\begin{aligned} f(v_0) + f(v_0u_1) + f(u_1) &= (m + j + 1) + (m + 2n + 2) + 1 \\ &= 2(m + n) + 4 \\ &= k_2 \end{aligned}$$

Untuk sisi u_iu_{i+1}, $1 \leq i \leq m - 1$

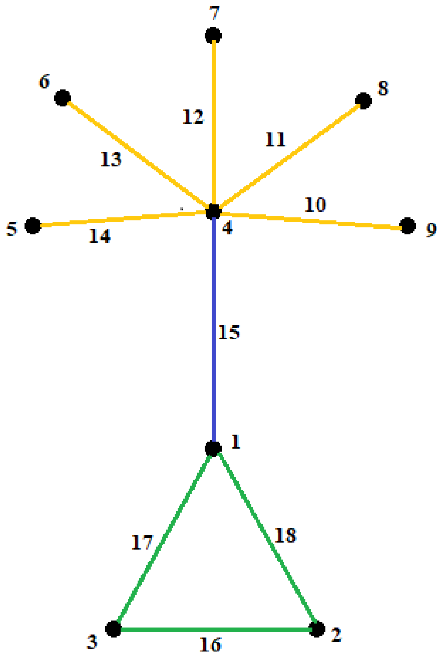
$$\begin{aligned} f(u_i) + f(u_iu_{i+1}) + f(u_{i+1}) &= i + (2(m + n) - 2i + 4) + (i + 1) \\ &= 2(m + n) + 5 \\ &= k_1 \end{aligned}$$

Untuk sisi u_1u_m, $m = 3$

$$\begin{aligned} f(u_1) + f(u_1u_m) + f(u_m) &= 1 + (2(m + n) + 1) + m \\ &= 1 + (2(m + n) + 1) + 3 \end{aligned}$$

$$= 2(m+n)+5$$
$$= k_1$$

Gambar 3.2 menunjukkan pelabelan total sisi *trimagic* super pada graf pot bunga C_3S_5



Gambar 2. Graf Pot Bunga C_3S_5 dengan $k_1 = 21, k_2 = 20$, dan $k_3 = 23$

Kasus 2. m ganjil, $m \geq 5$ dan $n \geq 3$

Pada kasus 2 akan dibuktikan untuk m ganjil, $m \geq 5$ dan $n \geq 3$. Didefinisikan pemetaan bijektif $f: V \cup E \rightarrow \{1,2,3,\dots,(|V(G)| + |E(G)|)\}$ sehingga,

$f\,(u_i) = i,$ untuk $1 \leq i \leq m$

$f\,(v_j) = m + j + 1,$ untuk $0 \leq j \leq n$

$$f(v_0v_j) = \begin{cases} m + 2n - j + 2, & untuk\ 3 \leq j \leq n \\ 2(m+n), & untuk\ j = 2 \\ m + 2n + 1, & untuk\ j = 1 \end{cases}$$

$f(v_0u_1) = 2(m+n) + 2$

$$f(u_iu_{i+1}) = \begin{cases} 2(m+n) - 2i + 3, & untuk\ 1 \leq i \leq \dfrac{m+1}{2} + 1,\ \ m \geq 5 \\ 3m + 2n - 2i + 3, & untuk\ \dfrac{m+1}{2} + 2 \leq i \leq m - 1,\ \ m \geq 7 \end{cases}$$

$f(u_1u_m) = m + 2n + 3,$ untuk $m \geq 5$

akan ditunjukkan bahwa pelabelan graf pot bunga $C_mS_n$untuk m ganjil, $m \geq 5$ dan $n \geq 3$ merupakan pelabelan total sisi *trimagic* super.

Untuk sisi v_0v_j, $3 \leq j \leq n$

$$f(v_0) + f(v_0v_j) + f(v_j) = (m + j + 1) + (m + 2n - j + 2) + (m + j + 1)$$
$$= (m + 0 + 1) + (m + 2n - j + 2) + (m + j + 1)$$

$$= 3m + 2n + 4$$
$$= k_1$$

Untuk sisi v_0v_j, $j = 2$

$$f(v_0) + f\left(v_0v_j\right) + f\left(v_j\right) = (m + j + 1) + \left(2(m + n)\right) + (m + j + 1)$$
$$= (m + 0 + 1) + \left(2(m + n)\right) + (m + j + 1)$$
$$= 4m + 2n + 4$$
$$= k_2$$

Untuk sisi v_0v_j, $j = 1$

$$f(v_0) + f\left(v_0v_j\right) + f\left(v_j\right) = (m + j + 1) + (m + 2n + 1) + (m + j + 1)$$
$$= (m + 0 + 1) + (m + 2n + 1) + (m + 1 + 1)$$
$$= 3m + 2n + 4$$
$$= k_1$$

Untuk sisi v_0u_1

$$f(v_0) + f(v_0u_1) + f(u_1) = (m + j + 1) + (2(m + n) + 2) + 1$$
$$= (m + 0 + 1) + (2(m + n) + 2) + 1$$
$$= 3m + 2n + 4$$
$$= k_1$$

Untuk sisi u_iu_{i+1}, $1 \leq i \leq \frac{m+1}{2} + 1$, $m \geq 5$

$$f(u_i) + f(u_iu_{i+1}) + f(u_{i+1}) = i + (2(m + n) - 2i + 3) + (i + 1)$$
$$= 2(m + n) + 4$$
$$= k_3$$

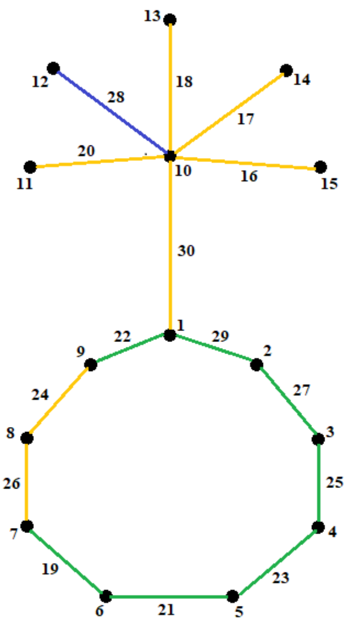
Untuk sisi u_iu_{i+1}, $\frac{m+1}{2} + 2 \leq i \leq m - 1$, $m \geq 7$

$$f(u_i) + f(u_iu_{i+1}) + f(u_{i+1}) = i + (3m + 2n - 2i + 3) + (i + 1)$$
$$= 3m + 2n + 4$$
$$= k_1$$

Untuk sisi u_1u_m, $m \geq 5$

$$f(u_1) + f(u_1u_m) + f(u_m) = 1 + (m + 2n + 3) + m$$
$$= 2(m + n) + 4$$
$$= k_3$$

Pelabelan total sisi *trimagic* super pada graf pot bunga C_9S_5 ditunjukkan pada Gambar 3.3



Gambar 3. Graf Pot Bunga C_9S_5 dengan $k_1 = 41, k_2 = 50$, dan $k_3 = 32$

Kasus 3. m genap $m \geq 4$ dan $n \geq 3$

Pada kasus 3 akan dibuktikan untuk m genap $m \geq 4$ dan $n \geq 3$. Didefinisikan pemetaan bijektif $f: V \cup E \rightarrow \{1,2,3, \dots, (|V(G)| + |E(G)|)\}$ sehingga,

$f\ (u_i) = i,$ untuk $1 \leq i \leq m$

$f\ (v_j) = m + j + 1,$ untuk $0 \leq j \leq n$

$f\ (v_0 v_j) = m + 2n - j + 2,$ untuk $1 \leq j \leq n$

$f(v_0 u_1) = m + 2n + 2$

$$f(u_i u_{i+1}) = \begin{cases} 2(m+n) - 2i + 3, & untuk\ 1 \leq i \leq \dfrac{m}{2} \\ 3m + 2n - 2i + 2, & untuk\ \dfrac{m}{2} + 1 \leq i \leq m - 1 \end{cases}$$

$f(u_1 u_m) = 2(m+n) + 2$

akan ditunjukkan bahwa pelabelan graf pot bunga $C_m S_n$untuk m genap $m \geq 4$ dan $n \geq 3$ merupakan pelabelan total sisi *trimagic* super.

Untuk sisi $v_0 v_j,\ \ 1 \leq j \leq n$

$$\begin{aligned} f(v_0) + f(v_0 v_j) + f(v_j) &= (m + j + 1) + (m + 2n - j + 2) + (m + j + 1) \\ &= (m + 0 + 1) + (m + 2n - j + 2) + (m + j + 1) \\ &= 3m + 2n + 4 \\ &= k_1 \end{aligned}$$

Untuk sisi $v_0 u_1$

$$\begin{aligned} f(v_0) + f(v_0 u_1) + f(u_1) &= (m + j + 1) + (m + 2n + 2) + 1 \\ &= (m + 0 + 1) + (m + 2n + 2) + 1 \\ &= 2(m+n) + 4 \end{aligned}$$

$$= k_2$$

Untuk sisi $u_i u_{i+1}$, $\quad 1 \le i \le \frac{m}{2}$

$$f(u_i) + f(u_i u_{i+1}) + f(u_{i+1}) = i + (2(m+n) - 2i + 3) + (i+1)$$
$$= 2(m+n) + 4$$
$$= k_2$$

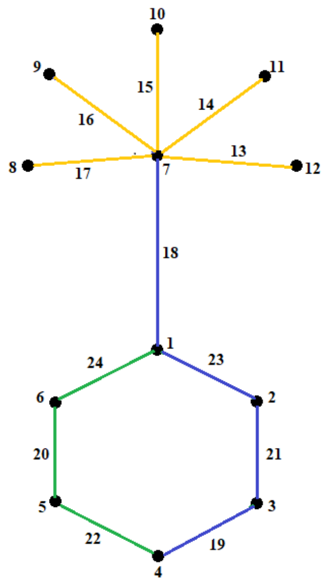
Untuk sisi $u_i u_{i+1}$, $\quad \frac{m}{2} + 1 \le i \le m - 1$

$$f(u_i) + f(u_i u_{i+1}) + f(u_{i+1}) = i + (3m + 2n - 2i + 2) + (i+1)$$
$$= 3m + 2n + 3$$
$$= k_3$$

Untuk sisi $u_1 u_m$

$$f(u_1) + f(u_1 u_m) + f(u_m) = 1 + (2(m+n) + 2) + m$$
$$= 3m + 2n + 3$$
$$= k_3$$

Berikut contoh pelabelan total sisi *trimagic* super pada graf pot bunga $C_6 S_5$



Gambar 4. Graf Pot Bunga $C_6 S_5$ dengan $k_1 = 32, k_2 = 26$, dan $k_3 = 31$

diperoleh untuk setiap $uv \in E(G)$, nilai $f(u) + f(uv) + f(v)$ adalah k_1, k_2, atau k_3. Sehingga terbukti bahwa graf pot bunga $C_m S_n$ memuat pelabelan total sisi *trimagic*. Karena pada graf pot bunga $C_m S_n$ memiliki $|V(G)| = m + n + 1$ titik dan semua titik diberi label dengan himpunan $V(G) = \{1, 2, 3, \ldots, m + n + 1\}$, sehingga graf pot bunga $C_m S_n$ memuat pelabelan total sisi *trimagic* super untuk setiap bilangan bulat positif $m, n \ge 3$.

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan maka dapat diambil kesimpulan bahwa graf pot bunga $(C_m S_n)$ memuat pelabelan total sisi *trimagic* super. Teorema 3.1 pada kasus 1, menunjukkan bahwa graf pot bunga (C_mS_n) dengan $m = 3$ dan $n \geq 3$, memuat pelabelan total sisi *trimagic* super. Teorema 3.1 pada kasus 2, menunjukkan bahwa graf pot bunga (C_mS_n) dengan m ganjil, $m \geq 5$ dan $n \geq 3$, memuat pelabelan total sisi *trimagic* super. Teorema 3.1 pada kasus 3, menunjukkan bahwa graf pot bunga (C_mS_n) dengan m genap, $m \geq 4$ dan $n \geq 3$ memuat pelabelan total sisi *trimagic* super.

Daftar Pustaka

Ahmad, M. (2012). Pelabelan Graceful dan Pelabelan pada Graf Pot Bunga dan Graf Pohon Palem. (*Master's Thesis*). Jakarta: Universitas Indonesia.

Babujee, J. (2004). On Edge Bimagic Labeling. *Journal of Combinations Information & System Sciences,*Vol. 28, 239-244.

C. Jayasekaran, J. L. (2017). Edge Trimagic Total Labeling of Mobius Ladder, Book and Dragon Graphs . *Annals of Pure and Applied Mathematics*, 151-163.

C. Jayasekaran, J. L. (2017). On Edge Trimagic Labeling of Umbrella, Dumb Bell and Circular Ladder Graphs. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, 73-87.

C. Jayasekaran, M. R. (2013). Edge Trimagic Labeling for some Graphs. *International Journal of Combinatorial Graphs Theory and Applications*, 175-186.

C. Jayasekaran, S. R. (2018). Edge Trimagic Total Labeling of Cycle Related Graphs. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 511-519.

K. Amuthavalli, P. S. (2019). Reverse Super Edge-Trimagic Labeling for Star Related Graphs. *Malaya Journal of Matematik*, 519-525.

Rosa, A. K. (1970). Magic Valuation of Finite Graphs. *Canad. Math. Bull.*, 451-461.

Sedlack, J. (1964). Theory of Graphs and Its Applications. *House Czechoslovak Acad. Sci. Prague*, 163-164.

Wallis, W. (2001). Magic Graphs. *New York: Birkhauser Boston*.