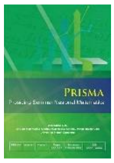
PRISMA 6 (2023): 782-785
PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika
https://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/prisma/
ISSN 2613-9189



Aproksimasi pada Ring

Dian Winda Setyawati[a,*], Subiono[b]

[a, b] *Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya, 60111, Indonesia*

* *Alamat Surel: dian_ws_math@matematika.its.ac.id*

Abstrak

Suatu ideal I pada ring R dapat mempartisi ring R membentuk kelas - kelas ekivalensi sehingga dapat dibentuk aproksimasi bawah dan aproksimasi atas dari himpunan tak kosong $S \subseteq R$ yang berkaitan dengan ideal I. Misalkan S adalah himpunan bagian tak kosong dari R , aproksimasi bawah dari S yang bersesuaian dengan ideal I didefinisikan sebagai himpunan elemen di R di mana kelas ekivalensi dari elemen tersebut adalah himpunan bagian dari S sedangkan aproksimasi atas dari S yang bersesuaian dengan ideal I didefinisikan sebagai himpunan elemen di R di mana kelas ekivalensi elemen beririsan dengan himpunan S. Pada paper ini akan diberikan sifat terkait hubungan antara aproksimasi atas dan aproksimasi bawah dengan melibatkan ideal berbeda dari ring R dan dua himpunan yang berbeda yang merupakan himpunan bagian dari ring R. Sifat ini merupakan kelanjutan dari hasil paper terkait sifat hubungan antara aproksimasi atas dan aproksimasi bawah dengan melibatkan subgrup normal berbeda dari grup G.

Kata kunci: kelas ekivalensi, aproksimasi bawah, aproksimasi atas

1. Pendahuluan

Suatu himpunan tak kosong R dengan operasi biner penjumlahan (+) dan operasi biner perkalian pada himpunan R disebut ring jika $(R,+)$ grup komutatif, $(R,\cdot)$ bersifat tertutup dan $(R,+,\cdot)$ bersifat distributif. Suatu Subring I dari ring R disebut ideal pada ring R jika untuk setiap $r \in R$ dan $i \in I$ berlaku $ri \in I$ dan $ir \in I$. Suatu ideal pada ring R dapat mempartisi ring R membentuk kelas - kelas ekivalensi sehingga dapat dibentuk aproksimasi bawah dan aproksimasi atas dari himpunan tak kosong $S \subseteq R$ yang berkaitan dengan ideal I. Topik tentang aproksimasi dari himpunan tak kosong telah diteliti pada beberapa paper (B. Davvaz & A. Malekzadeh, 2013; C. Wang, D. Chen & Q. Hu, 2013, L. Glebsky, 2017; B. Davvas, 2018; I. I. Pavlyuk, S. V. Sudoplatov, 2020).

Pada paper (B. Davvaz, 2004) telah diberikan sifat – sifat aproksimasi bawah dan aproksimasi atas dari suatu himpunan bagian pada ring dengan melibatkan satu ideal dari ring dengan dua himpunan bagian yang berbeda dari ring dan dua ideal dari ring dengan satu himpunan bagian dari ring. Pada paper ini akan diberikan sifat – sifat aproksimasi bawah dan aproksimasi atas dari suatu himpunan bagian pada ring dengan melibatkan dua ideal yang berbeda dari ring dengan dua himpunan bagian yang berbeda dari ring. Paper ini merupakan kelanjutan dari paper (D.W. Setyawati & Subiono, 2022).

2. Metode

Dalam melakukan penelitian digunakan metode kajian pustaka. Beberapa paper dikaji untuk mempelajari sifat – sifat aproksimasi pada ring serta mengaitkan hasil pada paper (D.W. Setyawati & Subiono, 2022) dan diterapkan pada ring. Selanjutnya, pada penelitian ini akan dibentuk proposisi baru. Beberapa definisi dan proposisi berikut ini akan dijadikan sebagai rujukan dalam penelitian ini.

Definisi 1 (B. Davvaz, 2004)
Diberikan R ring dan I ideal dari ring R . Maka akan terbentuk ruang Aproksimasi (R,I). Pada ruang Aproksimasi (R,I), $S \subseteq R$, himpunan

To cite this article:
Setyawati, D. W. & Subiono (2023). Aproksimasi pada Ring. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika* 6, 782-785.

$$\underline{Apr_I}(S) = \{a \in R |\ a + I \subseteq S\}$$

dan

$$\overline{Apr_I}\ (S) = \{a \in R |\ a + I \cap S\ \neq \emptyset\}$$

disebut aproksimasi bawah dan aproksimasi atas dari himpunan S yang bersesuaian dengan ideal I dari ring R.

Contoh 2
Diberikan

$$D_{2x2}(\mathbb{Z}_{24}) = \left\{\begin{bmatrix}[a]_{24} & [0]_{24}\\ [0]_{24} & [b]_{24}\end{bmatrix} \middle| [a]_{24}, [b]_{24} \in \mathbb{Z}_{24}\right\}$$

dan

$$I = \left\{\begin{bmatrix}[a]_{24} & [0]_{24}\\ [0]_{24} & [b]_{24}\end{bmatrix} \in D_{2x2}(\mathbb{Z}_{24}) \middle| [a]_{24} \in \langle[12]_{24}\rangle \text{ dan } [b]_{24} \in \langle[4]_{24}\rangle\right\}$$

merupakan ideal pada ring $D_{2x2}(\mathbb{Z}_{24})$ maka banyaknya koset yang berbeda dari I pada $D_{2x2}(\mathbb{Z}_{24})$ adalah $\left|\frac{D_{2x2}(\mathbb{Z}_{24})}{I}\right| = \frac{24\times 24}{2\times 6} = 48.$

Misal $S_1 = \{[0]_{24}, [3]_{24}, [5]_{24}, [12]_{24}, [15]_{24}\} = \langle[12]_{24}\rangle \cup ([3]_{24} + \langle[12]_{24}\rangle) \cup \{[5]_{24}\},$

$S_2 = \{[0]_{24}, [4]_{24}, [5]_{24}, [8]_{24}, [12]_{24}, [16]_{24}, [20]_{24}\} = \langle[4]_{24}\rangle \cup \{[5]_{24}\},$

$$S = \left\{\begin{bmatrix}[a]_{24} & [0]_{24}\\ [0]_{24} & [b]_{24}\end{bmatrix} \in D_{2x2}(\mathbb{Z}_{24}) \middle| [a]_{24} \in S_1 \text{ dan } [b]_{24} \in S_2\right\}$$

Maka diperoleh

(1) $$\underline{Apr_I}(S) = \left\{\begin{bmatrix}[a]_{24} & [0]_{24}\\ [0]_{24} & [b]_{24}\end{bmatrix} \in D_{2x2}(\mathbb{Z}_{24}) \middle| \left(\begin{bmatrix}[a]_{24} & [0]_{24}\\ [0]_{24} & [b]_{24}\end{bmatrix} + I\right) \subseteq S\right\}$$
$$= I \cup \left(\begin{bmatrix}[3]_{24} & [0]_{24}\\ [0]_{24} & [0]_{24}\end{bmatrix} + I\right)$$
$$= \left\{\begin{bmatrix}[a]_{24} & [0]_{24}\\ [0]_{24} & [b]_{24}\end{bmatrix} \in D_{2x2}(\mathbb{Z}_{24}) \middle| [a]_{24} \in S_1 - \{[5]_{24}\} \text{ dan } [b]_{24} \in S_2 - \{[5]_{24}\}\right\}$$

(2) $$\overline{Apr_I}(S) = \left\{\begin{bmatrix}[a]_{24} & [0]_{24}\\ [0]_{24} & [b]_{24}\end{bmatrix} \in D_{2x2}(\mathbb{Z}_{24}) \middle| \left(\begin{bmatrix}[a]_{24} & [0]_{24}\\ [0]_{24} & [b]_{24}\end{bmatrix} + I\right) \cap S\ \neq \emptyset\right\}$$
$$= I \cup \left(\begin{bmatrix}[0]_{24} & [0]_{24}\\ [0]_{24} & [5]_{24}\end{bmatrix} + I\right) \cup \left(\begin{bmatrix}[3]_{24} & [0]_{24}\\ [0]_{24} & [0]_{24}\end{bmatrix} + I\right) \cup \left(\begin{bmatrix}[3]_{24} & [0]_{24}\\ [0]_{24} & [5]_{24}\end{bmatrix} + I\right) \cup$$
$$\left(\begin{bmatrix}[5]_{24} & [0]_{24}\\ [0]_{24} & [0]_{24}\end{bmatrix} + I\right) \cup \left(\begin{bmatrix}[5]_{24} & [0]_{24}\\ [0]_{24} & [5]_{24}\end{bmatrix} + I\right)$$
$$= \left\{\begin{bmatrix}[a]_{24} & [0]_{24}\\ [0]_{24} & [b]_{24}\end{bmatrix} \in D_{2x2}(\mathbb{Z}_{24}) \middle| \begin{matrix}[a]_{24} \in S_1 \cup \{[17]_{24}\}\\ \text{dan } [b]_{24} \in S_2 \cup \{[1]_{24}, [9]_{24}, [13]_{24}, [17]_{24}, [21]_{24}\}\end{matrix}\right\}$$

Berikut akan diberikan sifat – sifat yang berlaku pada aproksimasi bawah / atas dari suatu himpunan pada ring.

Proposisi 3 (B. Davvaz, 2004)
Diberikan R ring dan I ideal dari ring R. Untuk setiap ruang aproksimasi (R, I) dan setiap himpunan bagian $S, H \subseteq R$ berlaku

(1) $\underline{Apr_I}(S) \subseteq S \subseteq \overline{Apr_I}\ (S)$
(2) $\underline{Apr_I}(\emptyset) = \emptyset = \overline{Apr_I}\ (\emptyset)$
(3) $\underline{Apr_I}(R) = R = \overline{Apr_I}\ (R)$
(4) Jika $S \subseteq H$, maka $\underline{Apr_I}(S) \subseteq \underline{Apr_I}(H)$ dan $\overline{Apr_I}\ (S) \subseteq \overline{Apr_I}\ (H)$,
(5) $\underline{Apr_I}(S \cap H) = \underline{Apr_I}(S) \cap \underline{Apr_I}(H)$,
(6) $\overline{Apr_I}\ (S \cap H) \subseteq \overline{Apr_N}\ (S) \cap \overline{Apr_N}\ (H)$,

(7) $\underline{Apr_I}(S \cup H) \supseteq \underline{Apr_I}(S) \cup \underline{Apr_I}(H)$,
(8) $\overline{Apr_I}\,(S \cup H) = \overline{Apr_I}\,(S) \cup \overline{Apr_I}\,(H)$,

Proposisi 4 (B. Davvaz, 2004)
Diberikan I, J adalah dua ideal dari ring R sedemikian hingga $I \subseteq J$ dan S himpunan bagian dari R. Maka
(1) $\underline{Apr_J}(A) \subseteq \underline{Apr_I}(A)$,
(2) $\overline{Apr_I}\,(A) \subseteq \overline{Apr_J}\,(A)$.

3. Hasil dan Pembahasan

Pada pembahasan ini akan diberikan sifat terkait hubungan antara aproksimasi atas dan aproksimasi bawah dengan melibatkan dua ideal berbeda dari ring R dan dua himpunan yang berbeda yang merupakan himpunan bagian dari ring R. Sifat ini merupakan kelanjutan dari paper (D.W. Setyawati & Subiono, 2022).

Proposisi 5
Diberikan I dan J masing – masing ideal dari ring R. Jika $S, H \subseteq R$ dan $S, H \neq \emptyset$ maka
$$\overline{Apr_I}(S) + \overline{Apr_J}(H) = \overline{Apr_{I+J}}(S + H).$$
Bukti.
Karena Ideal dari ring merupakan subgrup normal maka bukti didapatkan dari proposisi 4 pada (D.W. Setyawati & Subiono, 2022).

Proposisi 6
Diberikan I dan J masing – masing ideal dari ring R. Jika $S, H \subseteq R$ dan $S,H \neq \emptyset$ maka
$$\underline{Apr_I}(S) + \underline{Apr_J}(H) \subseteq \underline{Apr_{I+J}}(S + H).$$
Bukti.
Karena Ideal dari ring merupakan subgrup normal maka bukti didapatkan dari proposisi 7 pada (D.W. Setyawati & Subiono, 2022).

Pada proposisi 6 akan menjadi sama dengan apabila S, H masing – masing ideal dari ring R. Hal ini ditunjukkan pada proposisi berikut.

Proposisi 7
Diberikan I , J, S dan H masing – masing ideal dari ring R maka
$$\underline{Apr_I}(S) + \underline{Apr_J}(H) = \underline{Apr_{I+J}}(S + H).$$
Bukti.
Karena Ideal dari ring merupakan subgrup normal maka bukti didapatkan dari proposisi 9 pada (D.W. Setyawati & Subiono, 2022).

Proposisi 8
Diberikan I dan J masing – masing ideal dari ring R. Jika $S, H \subseteq R$ dan $S,H \neq \emptyset$ maka
$$\overline{Apr_I}(S)\,\overline{Apr_J}(H) \subseteq \overline{Apr_{I+J}}(SH).$$

Bukti.
Ambil sebarang $x \in \overline{Apr_I}(S)\,\overline{Apr_J}(H)$ maka $x = \sum_{i=1}^{n} s_i h_i$ untuk suatu $s_i \in \overline{Apr_I}(S)$ dan $h_i \in \overline{Apr_J}(H)$ sehingga $s_i + I \cap S \neq \emptyset$ dan $h_i + J \cap H \neq \emptyset$. Oleh karena itu terdapat $a_i \in s_i + I \cap S$ dan $b_i \in h_i + J \cap H$ untuk $1 \leq i \leq j$ sehingga $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \in SH$ dan $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \in \sum_{i=1}^{n} (s_i + I)_i (h_i + J) = \sum_{i=1}^{n} s_i h_i + I + J$. Karena $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \in SH$ dan $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \in \sum_{i=1}^{n} s_i h_i + I + J$ maka $\sum_{i=1}^{n} s_i h_i + I + J \cap SH \neq \emptyset$. Hal ini menunjukkan bahwa $x = \sum_{i=1}^{n} s_i h_i \in \overline{Apr_{I+J}}(SH)$. Terbukti bahwa $\overline{Apr_I}(S)\,\overline{Apr_J}(H) \subseteq \overline{Apr_{I+J}}(SH)$.

Proposisi 9
Diberikan I dan J masing – masing ideal dari ring R. Jika $S, H \subseteq R$ dan $S,H \neq \emptyset$ maka

$$\underline{Apr}_I(S)\ \underline{Apr}_J(H) \subseteq \underline{Apr}_{I+J}(SH).$$

Bukti.
Ambil sebarang $x \in \underline{Apr}_I(S)\ \underline{Apr}_J(H)$ maka $x = \sum_{i=1}^{n} s_i h_i$ untuk suatu $s_i \in \underline{Apr}_I(S)$ dan $h_i \in \underline{Apr}_J(H)$ sehingga $s_i + I \subseteq S$ dan $h_i + J \subseteq H$ akibatnya $\sum_{i=1}^{n}(s_i + I)(h_i + J) = \sum_{i=1}^{n}(s_i h_i + I + J) = (\sum_{i=1}^{n} s_i h_i) + I + J = x + I + J \subseteq SH$. Hal ini menunjukkan bahwa $x = \sum_{i=1}^{n} s_i h_i \in) \subseteq \underline{Apr}_{I+J}(SH)$. Terbukti bahwa $\underline{Apr}_I(S)\ \underline{Apr}_J(H) \subseteq \underline{Apr}_{I+J}(SH)$.

4. Simpulan

Pada pembahasan, Proposisi 5, Proposisi 6, Proposisi 7, Proposisi 8 dan Proposisi 9 diperoleh sifat aproksimasi bawah dan aproksimasi atas pada ring dengan melibatkan 2 ideal yang berbeda dan 2 himpunan bagian yang berbeda dari ring. Pada pembahasan, Proposisi 5, Proposisi 6 dan Proposisi 7 operasi biner yang digunakan merupakan operasi penjumlahan pada aproksimasi atas maupun aproksimasi bawah sedangkan Proposisi 8 dan Proposisi 9 operasi biner yang digunakan merupakan operasi perkalian pada aproksimasi atas maupun aproksimasi bawah.

Daftar Pustaka

Davvaz, B. (2004). Roughness in rings. *Information Sciences*, *164*(1-4), 147-163.
Davvaz, B., & Malekzadeh, A. (2013). Roughness in modules by using the notion of reference points. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, *10*(6), 109-124.
Davvaz, B. (2018). Rough Algebraic Structures Corresponding to Ring Theory. In *Algebraic Methods in General Rough Sets* (pp. 657-695). Birkhäuser, Cham.
Glebsky, L. (2017). Approximations of groups, characterizations of sofic groups, and equations over groups. *Journal of Algebra*, *477*, 147-162.
Pavlyuk, I. I., & Sudoplatov, S. V. (2020). Approximations for theories of abelian groups. *Mathematics and Statistics*, *8*(2), 220-224.
Setyawati, D. W., & Subiono, S. (2022). Aproksimasi pada Grup. *UNEJ e-Proceeding*, 319-325.
Wang, C., Chen, D., & Hu, Q. (2013). On rough approximations of groups. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, *4*(5), 445-449.