PRISMA 6 (2023): 762-768
PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika
https://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/prisma/
ISSN 2613-9189

Persamaan Diferensial Tundaan Sebagai Model Siklus Bisnis

I Gst Ngr Rai Usadha[a)], Ni Ketut Tari Tastrawati[b)]

[a,b]Depart. Matematika, FSAD,ITS, Surabaya, Jurusan Matematika,FMIPA, UNUD, Denpasar.

[a]Alamat Surel: usadha@matematika.its.ac.id

Abstrak

Persamaan Diferensial Tundaan telah diaplikasikan secara luas pada banyak bidang, seperti Teori Osilasi, Teori Stabilitas, Penyelesaian Periodik, dan dinamika populasi. Hal tersebut menunjukkan bahwa dalam beberapa dekade telah banyak Ilmuwan menaruh perhatian yang mendalam pada persamaan diferensial tundaan. Dalam artikel ini dibahas suatu model siklus bisnis dalam bidang ekonomi Makro yang merupakan pengembangan dari model Toree. Dalam model Toree, keputusan investasi hanya mempertimbangkan kejadian pada saat sekarang. Pada kenyataannya Investasi bergantung pada pendapatan pada waktu keputusan investasi dibuat dan juga pada stok modal pada waktu investasi berakhir. Stok modal pada waktu investasi berakhir merupakan konsekuensi dari fakta bahwa pada waktu t-T terdapat beberapa investasi yang akan berakhir antara waktu t-T dan t. Diasumsikan bahwa hasil stok modal dalam periode ini menjadi pertimbangan ketika investasi baru direncanakan. Adanya penyelesaian Osilasi sempurna dari model, menunjukkan adanya siklus investasi pada model bisnis tersebut.Dengan menerapkan Teori Bifurkasi Hopf, dapat diketahui adanya solusi Osilasi dari model yang diberikan. Demikian pula adanya orbit periodik dan orbit spiral dapat diketahui penyelesaian tersebut stabil atau tidak. Hal ini dapat ilustrasikan dengan mengambil contoh model linear.

Kata kunci:

Persamaan diferensial tundaan, Teori Bifurkasi Hopf, Penyelesaian osilasi

1. Pendahuluan

Persamaan Diferensial Tundaan telah diaplikasikan secara luas pada banyak bidang, seperti Teori Osilasi (Agarwal, et. al, 2005), (Dix, et.al, 2008) , (Erbe, et.al, 2007), (Hale, 1977), (Ladas et.al, 1991), (Guo, et.al, 2014), (Gopalsamy, 1987), Teori Stabilitas (Liu , Yan, 2014), Penyelesaian Periodik (Man , Minh, 2004), dan dinamika populasi (Gopalsamy, 1992), (Kuang, 1993). Hal tersebut di atas menunjukkan bahwa dalam beberapa dekade telah banyak akhli menaruh perhatian yang mendalam pada persamaan diferensial tundaan.

Pada banyak aplikasi, jika keadaan mendatang dari sistem tidak tergantung pada keadaan sebelumnya dan hanya ditentukan oleh keadaan saat ini, maka apabila sistem tersebut dimodelkan dengan suatu persamaan yang menyatakan keadaan beserta percepatan perubahan keadaan tersebut, maka umumnya digunakan persamaan diferensial biasa atau persamaan diferensial parsial. Sehingga solusi yang diperoleh merupakan suatu pendekatan awal untuk situasi sebenarnya. Sedangkan model yang lebih realistik harus meliputi keadan sistem pada waktu sebelumnya (Hale and Lunel, 1993).

Dalam penelitian ini dibahas suatu model siklus bisnis dalam bidang ekonomi Makro yang merupakan pengembangan dari model Toree (Torre, 1997). Dalam model Toree, keputusan imvestasi hanya mempertimbangkan kejadian pada saat sekarang. Pada kenyataannya investasi bergantung pada pendapatan pada waktu keputusan investasi dibuat dan juga pada stok modal pada waktu investasi berakhir. Stok modal pada waktu investasi berakhir merupakan konsekuensi dari fakta bahwa pada waktu t-T terdapat beberapa investasi yang akan berakhir antara waktu t-T dan t. Diasumsikan bahwa hasil stok modal dalam periode ini menjadi pertimbangan ketika investasi baru direncanakan. Adanya penyelesaian Osilasi dari model, menunjukkan adanya siklus investasi pada model bisnis tersebut.

Dalam penelitian ini dibahas pengembangan siklus bisnis standar IS-LM dalam sistem dinamik yang diperkenalkan oleh V. Torre, (Torre, 1977)

To cite this article:
Usadha, I. G. N. R. & Tastrawati, N. K. T. (2023). Persamaan Diferensial Tundaan Sebagai Model Siklus Bisnis . *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika* 6, 762-768.

$$\dot{Y} = \alpha\big(I(Y,r) - S(Y,r)\big)$$
$$\dot{r} = \beta(L(Y,r) - \bar{M})$$

Dengan Y adalah *gross product* (produk kotor), I adalah investasi, S adalah *saving* (penghematan/simpanan), L adalah kebutuhan dana/pinjaman, M adalah suplai/penyediaan dana (konstan). Sedangkan α dan β masing-masing sebagai indeks pasar barang dan uang.

Dari model tersebut, tampak bahwa model hanya mempertimbangkan kejadian pada saat sekarang. Pada banyak aplikasi, jika suatu sistem yang menjadi perhatian, bahwa keadaan mendatang dari sitem tidak tergantung pada keadaan sebelumnya dan hanya ditentukan oleh keadaan saat ini, maka sistem tersebut dimodelkan dengan suatu persamaan yang menyatakan keadaan beserta percepatan perubahan keadaan tersebut, umumnya digunakan persamaan diferensial biasa atau persamaan diferensial parsial. Prinsip hubungan sebab akibat ini hanya tepat merupakan suatu pendekatan awal untuk situasi sebenarnya, sedangkan model yang lebih realistik harus meliputi keadan sistem pada waktu sebelumnya (Hale and Lunel, 1993)

Oleh karena itu dalam model siklus bisnis Kalecki, Kalecki mengasumsikan bahwa bagian keuntungan yang tersimpan adalah investasi dan pertumbuhan modal bergantung pada keputusan investasi sebelumnya. Ini merupakan periode persiapan atau time delay, (Kalecki, 1935).

Investasi bergantung pada pendapatan pada waktu keputusan investasi dibuat dan juga pada stok modal, K, pada waktu investasi berakhir. Stok modal pada waktu investasi berakhir merupakan konsekuensi dari fakta bahwa pada waktu t-T terdapat beberapa investasi yang akan berakhir antara waktu t-T dan t. Diasumsikan bahwa hasil stok modal dalam periode ini menjadi pertimbangan ketika investasi baru direncanakan.

Selanjutnya jika K adalah stok modal, r adalah suku bunga (*interest rate)*, maka fungsi investasi bergantung pada Y, K, dan r, sedangkan fungsi saving dan permintaan uang bergantung pada Y dan r. Sehingga laju pertumbuhan *gross product* dapat dinyatakan dalam indeks pasar barang (α) dikalikan dengan selisih dari investasi dan saving. Begitu juga dengan laju pertumbuhan suku bunga (*interest rate)* dapat dinyatakan sebagai indeks pasar uang (β) dikalikan dengan selisih antara permintaan uang dan persediaan uang. Sedangkan laju pertumbuhan stok modal dapat dinyatakan sebagai selisih dari investasi (yang didasarkan pada pendapatan pada waktu periode investasi sebelumnya) dan stok modal yang mengalami penurunan nilai sebesar δ. Dengan demikian modelnya dapat ditulis kembali

$$\dot{Y} = \alpha(I(Y,K,r) - S(Y,r))$$
$$\dot{r} = \beta(L(Y,r) - \bar{M}) \qquad (1)$$
$$\dot{K} = I(Y(t-T),K,r) - \delta K$$

Persamaan (1) dapat dipandang sebagai sistem dinamik dari model ekonomi IS-LM dalam bentuk persamaan diferensial tundaan.

2. Permasalahan

Dalam penelitian ini permasalahan yang akan dijawab adalah:

1. Apakah sistem (1) mempunyai solusi Osilasi?
2. Apakah solusi tersebut stabil?
3. Untuk nilai T berapakah solusi sistem (1) periodik?

3. Pembahasan.

Dengan menerapkan teori Bifurkasi Hopf dimana T sebagai parameter bifurkasi dapat diketahui ada tidaknya solusi Osilasi dari (1), yaitu ada tidaknya orbit periodik atau orbit spiral pada sistem dinamik (1).

Demikian pula adanya siklus pada solusi (1), ditandai oleh adanya *limit cycle*/orbit periodik pada sistem (1). Selanjutnya diasumsikan bahwa I,S dan L bergantung secara linear dari argumen-argumenya, yaitu

$I = \eta Y - \delta_1 K - \beta_1 r$

$S = \iota_1 Y + \beta_2 r$

$L = \iota_2 Y - \beta_3 r$

dengan $\eta, \delta_1, \iota_1, \iota_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3$adalah konstanta-konstanta positif. Substitusikan I, S, L ke (1) diperoleh

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= \alpha\big((n - \iota_1)Y - (\beta_1 + \beta_2)r - \delta_1 K\big) \\ \dot{r} &= \beta(\iota_2 Y = \beta_3 r - \bar{M}) \\ \dot{K} &= \eta Y(t - T) - \beta_1 r - (\delta + \delta_1)K \end{aligned} \tag{2}$$

Persamaan kharakteristik dari (2) mempunyai bentuk:

$$\begin{vmatrix} \alpha(\eta - \iota_1) - \lambda & -\alpha(\beta_1 + \beta_2) & -\alpha\delta_1 \\ \beta\iota_2 & -\beta\beta_3 - \lambda & 0 \\ \eta e^{-\lambda T} & -\beta_1 & -(\delta + \delta_1) - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

Yaitu $\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C + D\lambda e^{-\lambda T} + E\, e^{-\lambda T} = 0$ (4)

dengan $A = \delta + \delta_1 + \beta\beta_3 - \alpha(\eta - \iota_1)$,

$B = (\delta + \delta_1)\big(\beta\beta_3 - \alpha(\eta - \iota_1)\big) + \alpha\beta\iota_2(\beta_1 + \beta_2) - \alpha\beta\beta_3(\eta - \iota_1)$,

$C = -\alpha\backslash bta\, \beta_1\iota_2\delta_1 - (\delta + \delta_1)\alpha\beta\big(\beta_3(\eta - \iota_1) - \iota_2(\beta_1 + \beta_2)\big)$,

$D = \alpha\eta\delta_1, \quad E = \alpha\beta\beta_3\eta\delta_1$

Persamaan (4) sangat sulit diselesaikan secara analitis. Ada dua cara hampiran untuk mendapatkan nilai λ.

Pertama, jika waktu tunda T kecil, $0 < T \ll 1$, digunakan metode analisis kestabilan linear.

Untuk itu, dimisalkan $e^{-\lambda T} \approx 1 - \lambda T$, maka persamaan kharakteristik (4) menjadi

$\lambda^3 + (A - DT)\lambda^2 + (B + D - ET)\lambda + C + E = 0$
(5)

Dari persamaan (5) menurut teori bifurkasi, dan kriteria Routh-Huwitz terjadi bifurkasi di titik $T = T_0$ dengan $A - DT_0 > 0,\ B + D - ET_0 > 0,\ C + E > 0$ dan $(A - DT_0)(B + D - ET_0 = C + E$

Dimisalkan $g(\lambda, T) = \lambda^3 + (A - DT)\lambda^2 + (B + D - ET)\lambda + C + E = 0$

Untuk $T = T_0,\ g(\lambda, T_0) = \lambda^3 + +s\lambda^2 + k^2\lambda + k^2 s$

Dengan $s = A - DT_0, k^2 = B + D - ET_0$. Nilai eigen dari (5) diperoleh dengan memfaktorkan $g(\lambda, T_0) = 0$, yaitu: $\lambda^3 + +s\lambda^2 + k^2\lambda + k^2 s = 0,\ (\lambda + s)(\lambda^2 + k^2) = 0$. Sehingga diperoleh $\lambda_0(T_0) = -s = -(A - DT_0)$, dan

$\lambda_{1,2}(T_0) = \pm ik = \pm i\sqrt{B + D - ET_0}$

Hal tersebut menunjukkan adanya orbit periodik dan limit cycle yang stabil. Jadi solusi dari sistem (2) adalah berosilasi.

Kedua. Untuk waktu tunda yang besar pendekatan linear tidak sesuai. Untuk itu dipergunakan pendekatan yang lebih umum pada ruang kompleks. Dimisalkan $\lambda = \sigma + i\,\omega$.

Dari persamaan (4) diperoleh bagian real :

$$\sigma^3 - 3\sigma\omega + A\sigma^2 - A\omega^2 + \beta\sigma + C + e^{-\sigma T}(D\sigma\, cos\omega T + D\omega sin\omega T + E\, cos\omega T) = 0 \quad (6)$$

Dan bagian imajiner:

$$3\sigma^2\omega - \omega^3 + 2A\sigma\omega + B\omega + e^{-\sigma T}(D\omega\, cos\omega T - D\sigma\, sin\omega\, T - E\, sin\omega T) = 0 \quad (7)$$

Untuk mendapatkan bifurkasi pertama, diambil $\sigma = 0$ sehingga (6) dan (7) menjadi

$$-A\omega^2 + C + (D\omega sin\omega T + E\, cos\omega T) = 0 \quad (8)$$

$$-\omega^3 + B\omega + (D\omega\, cos\omega T - E\, sin\omega T) = 0 \quad (9)$$

Misalkan dari (8) dan (9) dperoleh penyelesaian sebagai titik bifurkasi pertama adalah (ω_{bif}, T_{bif}), maka titik bifurkasi yang lain (ω, T) harus memenuhi $\omega T = \omega_{bif}T_{bif} + 2n\pi,\ n = 1,2, ...$

Selanjutnya persamaan (8) dan (9) ditulis dalam bentuk:

$$-A\omega^2 + C = -(D\omega sin\omega T + E\, cos\omega T) \quad (10)$$

$$-\omega^3 + +B\omega = -(D\omega\, cos\omega T - E\, sin\omega T) \quad (11)$$

Jika (10) dan (11) masing-masing dikuadratkan dan dijumlahkan, maka diperoleh:

$$\omega^6 + (A - 2B)\omega^4 + (B^2 - 2AC - D^2)\omega^2 + C^2 - E^2 = 0 \quad (12)$$

Persamaan (12) merupakan persamaan kubik dari ω^2.

Berikut diberikan suatu lemma yang berkaitan dengan akar-akar persamaan kubik.

Lemma 1.: (Khan, 2000)

Syarat perlu dan cukup bahwa persamaan kubik $z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3 = 0$, *dengan* $a_3 > 0$ *mempunyai paling sedikit satu akar positif adalah :*

1. *Berlaku salah satu dari*
   a. $a_1 < 0, a_2 \geq 0, a_1^2 > 3\, a_2$, *atau*
   b. $a_2 < 0$
2. $\Delta < 0$, *dengan* $\Delta = \frac{4}{27}a_2^3 - \frac{1}{27}a_1^2a_2^2 + \frac{4}{27}a_1^3a_3 - \frac{2}{3}a_1a_2a_3 + a_3^3$

Bukti lengkap pada (Khan, 2000).

Ruas kiri persamaan (12) positif jika ω^2besar, $\omega^2 \gg 1$, dan bernilai negatif, jika $\omega = 0$ dan $c^2 < E^2$. Oleh karena itu, jika syarat perlu dan cukup Lemma 1. dipenuhi, maka (12) mempunyai sekurang-kurangnya satu akar positif. Akar positif terkecil dipilih sebagai $\omega = \omega_{bif}$. Menurut teori bifurkasi, Bifurkasi Hopt (adanya *limit Cycle/*orbit periodik) terjadi apabila $Re\left(\frac{d}{dT}(\lambda(T))\right) \neq 0$ pada saat $T = T_{bif}, \lambda = i\omega_{bif}$. Dimana jika $g(\lambda(T), T) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c + d\, \lambda e^{-\lambda T} + f\, e^{-\lambda T} = 0$, maka $dG = 0$, yaitu $\frac{\partial G}{\partial \lambda}\, . d\lambda + \frac{\partial G}{\partial T}\, . dT = 0$

Jadi $\frac{d\lambda}{dT} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial T}}{\frac{\partial G}{\partial \lambda}}$.

Contoh ilustrasi:

Diasumsikan $\alpha = 3, \beta = 2, \delta = 0{,}1\ , \delta_1 = 0{,}5, \eta = 0{,}3, \iota_1 = 0{,}2\ , \iota_2 = 0{,}1$
$\bar{M} = 0{,}05, \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0{,}2.$
$Maka\ sistem$ (2) menjadi

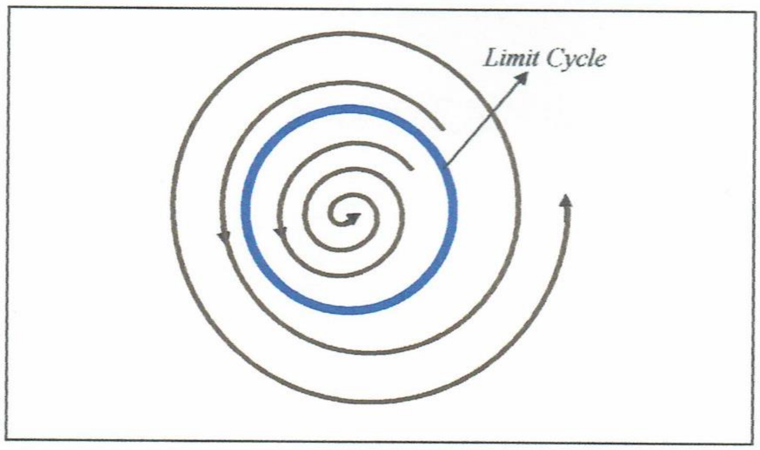
$$\dot{Y} = 0{,}3Y - 1{,}2r - 1{,}5K$$
$$\dot{r} = 0{,}2Y - 0{,}4r - 0{,}1$$
$$\dot{K} = 0{,}3Y(t - T) - 0{,}2r - 0{,}6K$$
(13)

Persamaan kharakteristik (13) berbentuk:

$$\lambda^3 + 0{,}7\, \lambda^2 + 0{,}18\, \lambda + 0{,}12 + 0{,}45\, \lambda e^{-\lambda T} + 0{,}18\, e^{-\lambda T} = 0$$

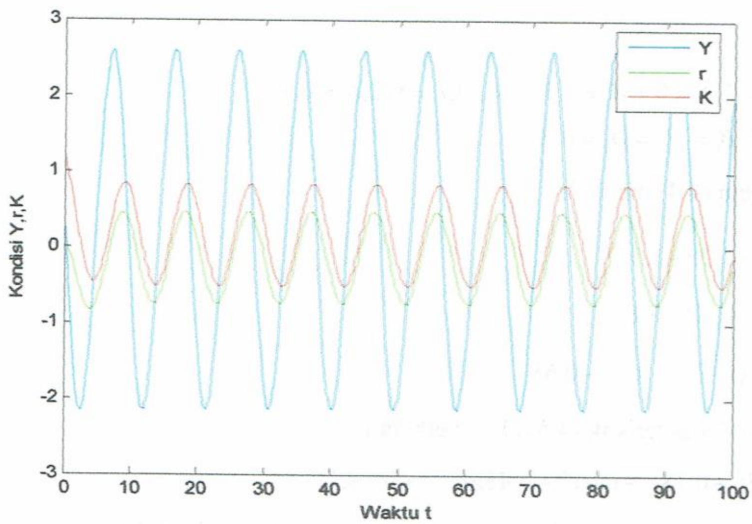
Dari (8) dan (9) diperoleh $T_{bif} = 0{,}740471$ .Oleh karena memenuhi Lemma 1, maka ω_{bif} adalah akar positif terkecil dari (12). Dan bifurkasi Hopf terjadi pada saat T melewati $T_{bif} = 0{,}740471$ sedangkan nilai eigennya: $\lambda_0(T_{bif}) = -0{,}382583, \lambda_{1,2} = \pm 0{,}6993i$

Dengan demikian periode dari *limit cycle* adalah:
$\bar{T} = \frac{2\pi}{|\lambda(T_{bif})|} = \frac{2\pi}{0,6993} = 8,98496$ yang menggambarkan siklus model IS-LM (13) mempunyai periode hampir 9. Gambar 1, menunjukkan adanya *limit cycle* pada $T_{bif} = 0,740471$



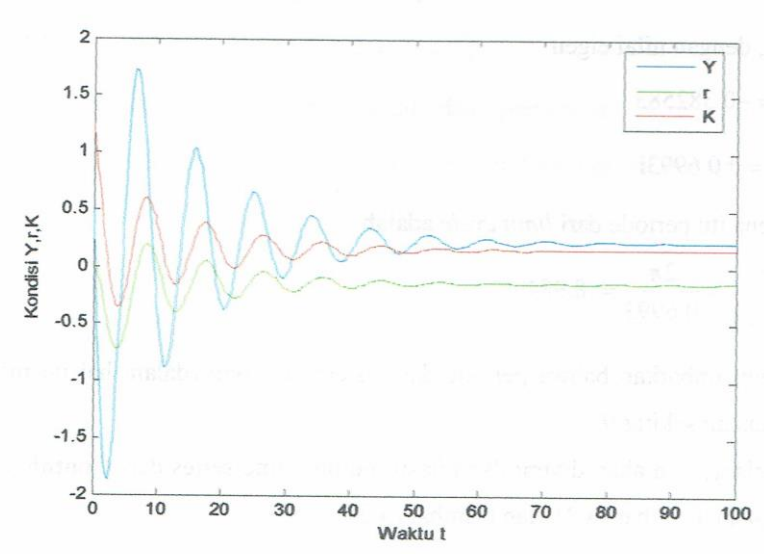
Gambar 1: Limit cycle/orbit periodik dari model IS-LM (13), pada T=0,740471 dan orbit spiral.

Sedangkan Gambar 2 menujukkan solusi osilasi (harmonik) dari sistem (13) untuk T=0,740471.

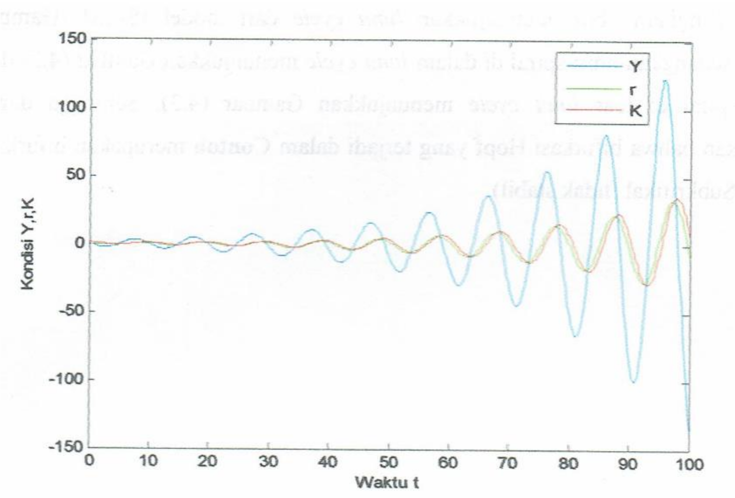


Gambar 2: Ploting Time Series dari solusi (stabil) sistem (13) untuk waktu tunda T=0,740471

Pada Gambar 1, tampak bahwa untuk $T < T_{bif}$ terdapat orbit spiral yang stabil, menuju orbit periodik. Sedangkan untuk $T > T_{bif}$terdapat orbit spiral (tidak stabil) yang menjauhi orbit periodik. Hal ini diperkuat oleh ploting time seriesnya seperti tampak pada Gambar 3 dan Gambar 4.



Gambar 3: Solusi Osilasi yang stabil dari sistem (13) untuk waktu tunda $T < T_{bif}$



Gambar 4: Ploting time series dari solusi (tidak stabil) sistem (13) untuk waktu tunda $\mathrm{T} > \mathrm{T}_{\mathrm{bif}}$

4. Simpulan

Berdasarkan uraian pada Pembahasan maka dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Dengan aplikasi Teori bifurkasi Hopf, Model IS-LM (2) mempunyai solusi Osilasi.
2. Untuk wantu tunda $T = T_{bif}$, solusinya berosilasi sempurna (harmonik), stabil, yang berarti ada siklus pada sistem tersebut.
3. Untuk waktu tunda $T < T_{bif}$, solusinya berosilasi dan stabil. Sedangkan untuk $T > T_{bif}$ solusinya berosilasi tetapi tidak stabil.

Daftar Pustaka

Agarwal, R. P., Grace, S. R., Kiguradze, I., & O'Regan, D. (2005). Oscilation of Funtional Differential Equations. *Math Comput. Model*, 41(4-5), 417-461.

Dix, J. D., Misra, N., Padhy, L., & Rath, R. (2008). Oscillatory and Asymptotic Behaviour of a Neutral Differential Equation with Oscillating Coefficients. *Electron. J. Qual. Theo*, 19, 1-10.

Erbe, L., Petersson, A., & Saker, S. H. (2007). Oscillation Criteria for Second Order Nonlinear Delay Dynamic Equation. *J. Math. Anal. Appl*, 333 (1), 505-522.

Gopalsamy, K. (1987). Oscillatory Properties of System of First Order Linear Delay Differential Inequalities. *Pacific J. of Mathematics, 299-305.*

Gopalsamy, K. (1992). Stability and Oscillation in Delay Differential Equations of Population Dynamics. *Boston: Kluwer Academic Publisher.*

Guo, S., Wanbiao, M., & Pradeep, B. (2014). Necessary and Sufficient Condition for Oscillation of Neutral Delay Differential Equations. *Elect. J. Diff. Eqs,* 2014 (138), 1-12.

Hale, J. K. (1977). Theory of Funifferential Equationsnal . *New York: Springer-Verlag.*

Kalecki, M. (1935). A Macrodynamic Theory of Business Cycle. *Econometrica,* 3, 327-344.

Khan, Q. J. (2000). Hopf BIfurcation in Multyparty Political System with Time Delay in Switching. *Applied Matematics Letters*, 13, 43-52.

Kuang, Y. (1993). Delay differential EQUATIONS with Application in Population Dynami*c. San Diego: Academic Press.*

Ladas, G., & Gyorri, I. (1991). Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications. *Oxford: Clarendon Press.*

Liu, G., & Yan, J. (2014). Global Asymptotic Stability of Nonlinear Neutral Differential Equation. *Commun. Nonlinear Sci.,* 19 (4), 1035-1041.

Man, N. M., & Minh, N. V. (2004). On the Existence of Quasi Periodic and Almost Periodic Solutions of Neutral Functional Differential Equations. *Commun. Pure Appl. Anal*., 3 (2), 291-300.

Torre, V. (1977). Existence of Limit Cycle and Control in Complete Keynesian systems. Econometrica, 45, 1457-1466