PRISMA 6 (2023): 769-774
PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika
https://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/prisma/
ISSN 2613-9189

Beberapa Sifat Ruang Norma Cone Bernilai-$C[a, b]$ pada Ruang ℓ_p

Sunarsini[a,*], Sadjidon[b], Rizky Darmawan[c]

[a, b, c] *Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya, Indonesia*

* *Alamat Surel:* sunarsini@matematika.its.ac.id

Abstrak

Ruang bernorma cone merupakan perluasan dari ruang bernorma yaitu jika kodomain dari fungsi norma diganti dengan ruang Banach real dengan himpunan cone yang termuat di dalamnya, Pada paper ini dikonstruksi suatu norma tertentu bernilai-$C[a, b]$ pada ruang $\ell_p, 1 \leq p < \infty$. Selanjutnya, diselidiki beberapa sifat yang terkait diantaranya adalah sifat kekonvergenan, kelengkapan, keterbukaan/ ketertutupan dan keterbatasan dari ruang tersebut.

Kata kunci: ruang bernorma, cone, ruang bernorma cone, ruang Banach cone

1. Pendahuluan

Konsep ruang metrik cone diperkenalkan oleh Guang dan Zhang pada tahun 2007. Ruang ini merupakan perumuman dari ruang metrik, yaitu dengan mengganti kodomain metrik dengan ruang Banach real dengan himpunan cone yang termuat di dalamnya. Mereka meneliti teorema titik tetap pemetaan kontraktif Banach (Guang & Zhang, 2007). Selanjutnya, Gordji dkk memperkenalkan ruang bernorma cone yang merupakan perumuman dari ruang bernorma. Jika kodomain norma diganti dengan ruang Banach real dengan himpunan cone yang termuat di dalamnya, maka ruang bernorma X menjadi ruang bernorma con (Gordji et.al, 2012). Dalam paper tersebut diperkenalkan pula ruang Banach cone, yaitu ruang bernorma cone yang lengkap.

Sementara itu, sifat-sifat seperti konvergensi, kelengkapan, keterbukaan/ketertutupan, maupun keterbatasan memiliki peranan penting, salah satunya dalam penelitian titik tetap pemetaan kontraktif Banach yang dilakukan oleh Guang dan Zhang. Untuk itu muncul suatu gagasan baru pada paper ini yaitu akan dikonstruksi suatu norma cone bernilai-$C[a, b]$ pada ruang $\ell_p, 1 \leq p < \infty$. Selanjutnya, diselidiki beberapa sifat yang terkait diantaranya adalah sifat kekonvergenan, kelengkapan, keterbukaan/ketertutupan dan keterbatasan dari ruang tersebut.

2. Tinjauan Pustaka

Pada bagian ini diberikan beberapa definisi, teorema dan contoh terkait ruang bernorma, ruang Banach dan ruang bernorma cone.

Misalkan X ruang vektor atas field $\mathbb{R}$. Suatu norma pada X adalah fungsi $\|\,.\,\|_X : X \to \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ berlaku:

(N1) $\|x\|_X \geq 0$

(N2) $\|x\|_X = 0 \Leftrightarrow x = 0_X$ (vektor nol)

(N3) $\|\alpha x\|_X = |\alpha|\|x\|_X$

(N4) $\|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X$

To cite this article:
Sunarsini, Sadjidon, & Darmawan, R. (2023). Beberapa Sifat Ruang Norma Cone Bernilai-$C[a, b]$ pada Ruang ℓ_p. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika* 6, 769-774.

Pasangan $(X, \| . \|_X)$ disebut ruang bernorma (Rynne et.al, 2001). Jika setiap barisan Cauchy di X konvergen di X maka ruang bernorma $(X, \| . \|_X)$ dikatakan lengkap (ruang Banach). Sebagai contoh, $C[a, b]$ ruang Banach dengan norma $\| f\|_\infty := \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|, \forall f \in C[a, b]$ (Rynne et.al, 2001). Kemudian, himpunan $\ell_p, 1 \leq p < \infty$ merupakan himpunan dari semua barisan bilangan real yang memiliki deret konvergen-p absolut. Jadi $\ell_p := \{\bar{x} = (x_1, x_1, \dots) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$. Himpunan $\ell_p, 1 \leq p < \infty$ merupakan ruang Banach terhadap norma $\|\bar{x}\|_{\ell_p} := (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}, \forall \bar{x} \in \ell_p$ (Kreyszig, 1991).

Definisi 2.1 (Guang, 2007; Sonmez et.al.,2010) *Diberikan E ruang Banach real, θ elemen nol pada E, dan $P \subseteq E$. Himpunan P disebut cone jika memenuhi*

(C1) *P tertutup, tak kosong, dan $P \neq \{\theta\}$,*
(C2) *Untuk setiap $a, b \geq 0$ serta $x, y \in P$, berlaku $ax + by \in P$,*
(C3) *Jika $x \in P$ dan $(-x) \in P$, maka $x = \theta$.*

Misalkan E ruang Banach real, $P \subseteq E$ dan P himpunan cone. Untuk setiap $x, y \in E$ didefinisikan urutan parsial " $\preccurlyeq$ ", sebagai berikut: $x \preccurlyeq y \Leftrightarrow y - x \in P$. Sedangkan $x \prec y \Leftrightarrow y - x \in P$ tetapi $x \neq y$ serta $x \ll y \Leftrightarrow y - x \in Int(P)$ dimana $Int(P) :=$ interior dari P.

Berikut ini diberikan contoh himpunan cone dan himpunan semua titik interior dari cone.

Contoh 2.1 Diberikan $E = C[a, b]$ ruang Banach dengan norma $\| . \|_\infty$. Himpunan $P := C_{0+}[a, b]$ dimana $C_{0+}[a, b] := \{f : f(t) \geq 0, \forall t \in [a, b],\ f$ kontinu $\}$ merupakan himpunan cone. Himpunan semua titik interior dari $C_{0+}[a, b]$ adalah himpunan $C_+[a, b] := \{f : f(t) > 0, \forall t \in [a, b],\ f$ kontinu $\}$. Dari Contoh 2.1 ini terlihat bahwa $Int(C_{0+}[a, b]) \neq \emptyset$.

Misalkan X ruang vektor atas field $\mathbb{R}$, E ruang Banach real, $P \subseteq E$ dan P himpunan cone. Suatu fungsi $\| . \|_X^E : X \to E$ disebut norma cone di X jika untuk setiap $x, y \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ berlaku:

(NC1) $\|x\|_X^E \succcurlyeq 0_E$

(NC2) $\|x\|_X^E = 0_E \Leftrightarrow x = 0_X$

(NC3) $\|\alpha x\|_X^E = |\alpha| \|x\|_X^E$

(NC4) $\|x + y\|_X^E \preccurlyeq \|x\|_X^E + \|y\|_X^E$

Pasangan $(X, \| . \|_X^E)$ disebut ruang bernorma cone.

Selanjutnya, diberikan pengertian barisan konvergen, barisan Cauchy dan kelengkapan himpunan di ruang bernorma cone.

Definisi 2.2 (Guang, 2007; Sonmez et.al., 2010; Gordji et.al., 2012)

Pandang $(X, \| . \|_X^E)$ ruang bernorma cone.

i. Suatu barisan (x_n) di $(X, \| . \|_X^E)$ dikatakan konvergen ke $x \in X$ jika setiap $c \in E$ dengan $0_E \ll c$, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq N$ berakibat $\|\bar{x}_n - \bar{x},\|_X^E \ll c$.
ii. Suatu barisan (x_n) di $(X, \| . \|_X^E)$ dikatakan barisan Cauchy jika setiap $c \in E$ dengan $0_E \ll c$, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n, m \geq N$ berakibat $\|\bar{x}_n - \bar{x}_m\|_X^E \ll c$.
iii. Jika setiap barisan Cauchy di X konvergen di X maka ruang bernorma $(X, \| . \|_X^E)$ dikatakan lengkap. Ruang bernorma cone yang lengkap disebut ruang Banach cone.

3. Pembahasan

Pada bagian ini dikonstruksi suatu fungsi norma cone tertentu dari ruang vektor $X = \ell_p, 1 \leq p < \infty$, ke ruang Banach $E = C[a, b]$ dengan himpunan cone P adalah $C_{0+}[a, b]$ dan $Int(C_{0+}[a, b])= C_+[a, b]$. Himpunan cone $C_{0+}[a, b]$ dan $Int(C_{0+}[a, b])$ masing-masing telah dibahas pada Contoh 2.1. Pada pembahasan berikutnya, jika diperlukan penggunaan himpunan $Int(C_{0+}[a,b])$ maka selalu digunakan himpunan $C_+[a,b]$. Demikian juga untuk penulisan $X=\ell_p, 1\le p<\infty$, digunakan notasi $X=\ell_p$. Sebelum melangkah untuk mendapatkan norma cone tertentu bernilai pada ruang ℓ_p bernilai-$C[a,b]$, diberikan Lemma berikut.

Lemma 3.1. *Diberikan $f,g\in C[a,b]$, maka pernyataan berikut berlaku*:

a. $f\preccurlyeq g$ *jika dan hanya jika* $f(t)\le g(t), \forall t\in[a,b]$.
b. $f\ll g$ *jika dan hanya jika* $f(t)<g(t), \forall t\in[a,b]$.
c. $f=g$ *jika dan hanya jika* $f(t)=g(t), \forall t\in[a,b]$.

Bukti:

a. $f\preccurlyeq g \Leftrightarrow g-f\in C_{0+}[a,b]$
$\Leftrightarrow g(t)-f(t)\ge 0, \forall t\in[a,b]$
$\Leftrightarrow f(t)\le g(t)\ \forall t\in[a,b]$.
b. $f\ll g \Leftrightarrow g-f\in\ Int(C_{0+}[a,b])=C_+[a,b]$
$\Leftrightarrow g(t)-f(t)\ge 0, \forall t\in[a,b]$
$\Leftrightarrow f(t)\le g(t)\ \forall t\in[a,b]$.
c. $f=g\Leftrightarrow g-f=\theta, \forall t\in[a,b]$
$\Leftrightarrow f(t)=g(t), \forall t\in[a,b]$. ■

Di bawah ini diberikan bentuk norma cone bernilai-$C[a,b]$ pada ruang ℓ_p.

Teorema 3.1. *Diberikan sebarang $F\in C_+[a,b]$ tetap, himpunan cone $C_{0+}[a,b]\subset C[a,b]$ dan fungsi $\|\ \|_{\ell_p}^C:\ell_p\to C[a,b]$ yang didefinisikan sebagai*

$$\|\bar{x}\|_{\ell_p}^C=F_{\bar{x}}^p,\qquad \bar{x}\in\ell_p$$

dimana $F_{\bar{x}}^p$ adalah fungsi bernilai real dengan

$$F_{\bar{x}}^p(t):=\|\bar{x}\|_{\ell_p}F(t),\qquad \forall t\in[a,b].$$

Fungsi $\|\ \|_{\ell_p}^C$ merupakan norma cone bernilai-$C[a,b]$ pada ruang ℓ_p dan pasangan $(\ell_p, \|\ \|_{\ell_p}^C)$ merupakan ruang bernorma cone bernilai-$C[a,b]$ pada ruang ℓ_p.

Bukti:

Ambil sebarang $\bar{x},\bar{y}\in\ell_p$ dan $\alpha\in\mathbb{R}$. Telah diketahui bahwa $X=\ell_p$ merupakan ruang bernorma terhadap norma $\|\bar{x}\|_{\ell_p}:=(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p)^{\frac{1}{p}}, \forall\bar{x}\in\ell_p$.

(NC1) Dari kenyataan $\|\bar{x}\|_{\ell_p}\ge 0$, kemudian $F(t)\ge 0, \forall t\in[a,b]$ maka $\|\bar{x}\|_{\ell_p}F(t)\ge 0, \forall t\in[a,b]$. Dengan demikian $F_{\bar{x}}^p\in C_{0+}[a,b]$ dimana $C_{0+}[a,b]$ adalah himpunan cone. Jadi diperoleh $F_{\bar{x}}^p(t)\succcurlyeq\theta$. Oleh karena itu $\|\bar{x}\|_{\ell_p}^C\succcurlyeq\theta$.

(NC2) $\|\bar{x}\|_{\ell_p}^C=\theta\Leftrightarrow F_{\bar{x}}^p=\theta\Leftrightarrow F_{\bar{x}}^p(t)=0, \forall t\in[a,b]$
$\Leftrightarrow \|\bar{x}\|_{\ell_p}F(t)=0, \forall t\in[a,b]$
$\Leftrightarrow \|\bar{x}\|_{\ell_p}=0\Leftrightarrow\bar{x}=0$.

(NC3) Dengan sifat norma $\|\,.\,\|_{\ell_p}$ diperoleh $\|\alpha\bar{x}\|_{\ell_p}F(t)=|\alpha|\|\bar{x}\|_{\ell_p}F(t), \forall t\in[a,b]$. Selanjutnya, $F_{\alpha\bar{x}}^p(t)=|\alpha|F_{\bar{x}}^p(t)$, $\forall t\in[a,b]$. Artinya, $F_{\alpha\bar{x}}^p=|\alpha|F_{\bar{x}}^p$. Jadi $\|\alpha\bar{x}\|_{\ell_p}^C=|\alpha|\|\bar{x}\|_{\ell_p}^C$.

(NC4) Dari ketaksamaan segitiga pada norma $\|\,.\,\|_{\ell_p}$ dan Lemma 3.1, maka didapat

$$\|\bar{x}+\bar{y}\|_{\ell_p}\le\|\bar{x}\|_{\ell_p}+\|\bar{y}\|_{\ell_p}$$
$$\|\bar{x}+\bar{y}\|_{\ell_p}F(t)\le\|\bar{x}\|_{\ell_p}F(t)+\|\bar{y}\|_{\ell_p}F(t), \forall t\in[a,b]$$
$$\Leftrightarrow F_{\bar{x}+\bar{y}}^p(t)\preccurlyeq F_{\bar{x}}^p+F_{\bar{y}}^p$$
$$\Leftrightarrow \|\bar{x}+\bar{y}\|_{\ell_p}^C\preccurlyeq\|\bar{x}\|_{\ell_p}^C+\|\bar{y}\|_{\ell_p}^C.$$

Karena memenuhi (NC1)-(NC4) maka terbukti $(\ell_p, \|\ \|_{\ell_p}^C)$ *merupakan ruang bernorma cone bernilai-$C[a,b]$ pada ruang ℓ_p*. ■

Berikutnya, diberikan teorema bahwa sifat konvergensi barisan dan barisan Cauchy yang berada di ruang bernorma cone $(\ell_p, \|\ \|_{\ell_p}^C)$ memiliki suatu ekivalensi yang bersesuaian dengan sifat konvergensi barisan dan barisan Cauchy yang berada di ruang bernorma ℓ_p.

Teorema 3.2. *Diberikan ruang bernorma cone $\left(\ell_p, \|\ \|_{\ell_p}^C\right)$ dan $\bar{x} \in \ell_p$. Jika $(\bar{x}_n)$ barisan di ℓ_p, maka pernyataan berikut berlaku:*

a. *Barisan $(\bar{x}_n)$ di ruang bernorma cone $\left(\ell_p, \|\ \|_{\ell_p}^C\right)$ konvergen ke $\bar{x}$ jika dan hanya jika $(\bar{x}_n)$ di ruang bernorma ℓ_p konvergen ke $\bar{x}$.*
b. *Barisan $(\bar{x}_n)$ adalah barisan Cauchy di ruang bernorma cone $\left(\ell_p, \|\ \|_{\ell_p}^C\right)$ jika dan hanya jika $(\bar{x}_n)$ barisan Cauchy di ruang bernorma ℓ_p.*

Bukti:

a. $(\Rightarrow)$ Misalkan $(\bar{x}_n)$ barisan di ruang bernorma cone $\left(\ell_p, \|\ \|_{\ell_p}^C\right)$ konvergen ke $\bar{x}$, artinya untuk setiap $h \in C[a,b],\ h \gg \theta$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq N$ berakibat $\|\bar{x}_n - \bar{x},\|_{\ell_p}^C \ll h$. Untuk setiap $n \geq N$ berlaku $\|\bar{x}_n - \bar{x}\|_{\ell_p} F(t) < h(t), \forall t \in [a,b]$.

$$\|\bar{x}_n - \bar{x}\|_{\ell_p} < \frac{h(t)}{F(t)}, \forall t \in [a,b] \tag{1}$$

Mudah dipahami bahwa $\frac{h(t)}{F(t)} > 0,\ \forall t \in [a,b]$. Dilain pihak, untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $h_\varepsilon \in C_+[a,b]$ sehingga untuk sebarang $t \in [a,b]$ berlaku $h_\varepsilon(t) = \varepsilon F(t)$. Akibatnya $\varepsilon = \frac{h_\varepsilon(t)}{F(t)}$. Dengan demikian, untuk sebarang $t \in [a,b]$ tetap dan dengan mengambil $h = h_\varepsilon$ maka dari (1), terdapat $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga berlaku

$$\|\bar{x}_n - \bar{x}\|_{\ell_p} < \frac{h(t)}{F(t)} = \varepsilon, \forall n \geq N_\varepsilon. \tag{2}$$

Dengan kata lain barisan $(\bar{x}_n)$ di ruang bernorma ℓ_p konvergen *ke* $\bar{x}$.

$(\Leftarrow)$ Misalkan barisan $(\bar{x}_n)$ di ruang bernorma ℓ_p konvergen ke $\bar{x}$, artinya untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq N_\varepsilon$ berakibat $\|\bar{x}_n - \bar{x}\|_{\ell_p} < \varepsilon$. Dilain pihak, untuk setiap $h \in C_+[a,b]$, terdapat $\varepsilon_h > 0$ sehingga

$$\varepsilon_h = \frac{h(t)}{F(t)}, \forall t \in [a,b].$$

Jadi didapat $\varepsilon_h F(t) = h(t), \forall t \in [a,b]$. Dengan mengambil $\varepsilon = \varepsilon_h$ dan dengan mengalikan kedua ruas (2) dengan $F(t), \forall t \in [a,b]$ maka terdapat $N_h \in \mathbb{N}$ sehingga $\forall n \geq N_h$ berlaku

$$\|\bar{x}_n - \bar{x}\|_{\ell_p} F(t) = h(t), \qquad \forall t \in [a,b].$$

Jadi untuk setiap $h \in C[a,b],\ h \gg \theta$ terdapat $N_h \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq N_h$ berakibat $\|\bar{x}_n - \bar{x},\|_{\ell_p}^C \ll h$. Terbukti barisan $(\bar{x}_n)$ di ruang bernorma cone $\left(\ell_p, \|\ \|_{\ell_p}^C\right)$ konvergen ke $\bar{x}$.

b. Bukti analog dengan bagian (a) dan menggunakan Definisi 2.2. ∎

Teorema 3.3. *Ruang bernorma cone $\left(\ell_p, \|\ \|_{\ell_p}^C\right)$ merupakan ruang Banach cone.*

Bukti:

Ambil sebarang barisan Cauchy $(\bar{x}_n)$ di ruang bernorma $\left(\ell_p, \|\ \|_{\ell_p}^C\right)$. Dari Teorem 3.2 (b) maka $(\bar{x}_n)$ adalah barisan Cauchy di ℓ_p. Karena telah diketahui bahwa ℓ_p adalah ruang Banach, maka $(\bar{x}_n)$ konvergen ke $\bar{x} \in \ell_p$. Berdasarkan Teorema 3.2 (a) diperoleh bahwa barisan Cuachy $(\bar{x}_n)$ di ruang bernorma cone $\left(\ell_p, \|\ \|_{\ell_p}^C\right)$ konvergen ke $\bar{x} \in \left(\ell_p, \|\ \|_{\ell_p}^C\right)$. Jadi $\left(\ell_p, \|\ \|_{\ell_p}^C\right)$ ruang Banach cone. ∎

Selanjutnya, ditunjukkan sifat terbuka dan tertutup di ruang bernorma cone $\left(\ell_p, \|\ \|_{\ell_p}^C\right)$. Namun, sebelumnya diberikan teorema berikut ini.

Teorema 3.4. Misalkan $(X, \|\,.\,\|_X^E)$ ruang bernorma cone dan $A \subseteq X$. Jika A ruang Banach cone, maka A tertutup.

Bukti:
Misalkan A ruang Banach cone, maka setiap barisan Cauchy (x_n) di A konvergen di A. Dilain pihak, setiap barisan di A yang konvergen ke $x \in X$ adalah barisan Cauchy. Karena A ruang Banach cone maka $x \in A$. Jadi A tertutup. ■

Teorema 3.5. *Ruang bernorma cone* $\left(\ell_p, \|\quad\|_{\ell_p}^C\right)$ *adalah terbuka dan tertutup*.

Bukti:
Karena ruang bernorma cone $\left(\ell_p, \|\quad\|_{\ell_p}^C\right)$ adalah ruang Banach cone, maka dari Teorema 3.4, ruang bernorma cone $\left(\ell_p, \|\quad\|_{\ell_p}^C\right)$ tertutup. Selanjutnya, untuk setiap $\bar{x} \in \ell_p$, persekitaran-h dari $\bar{x} \in \ell_p$ adalah himpunan

$$B_h(\bar{x}) = \{\bar{y} \in \ell_p \colon \|\bar{x} - \bar{y}\|_{\ell_p}^C \ll h\}$$

untuk suatu $h \in C[a,b], 0 \ll h$. Terlihat bahwa $B_h(\bar{x}) \subseteq \ell_p$, artinya setiap titik di dalam ℓ_p adalah titik interior dari ℓ_p. Oleh karena itu ruang bernorma cone $\left(\ell_p, \|\quad\|_{\ell_p}^C\right)$ terbuka.■

Berikut ini diberikan sebuah teorema hubungan ekivalensi pada sifat keterbukaan/ketertutupan antar ruang bernorma cone $\left(\ell_p, \|\quad\|_{\ell_p}^C\right)$ dengan ruang bernorma ℓ_p.

Teorema 3.6. *Pandang ruang bernorma cone* $\left(\ell_p, \|\quad\|_{\ell_p}^C\right)$. *Jika* $A \subseteq \ell_p$ *maka pernyataan berikut berlaku:*

a. *Himpunan* A *terbuka di ruang bernorma cone* $\left(\ell_p, \|\quad\|_{\ell_p}^C\right)$ *jika dan hanya jika himpunan* A *terbuka di ruang bernorma* ℓ_p.
b. *Himpunan* A *tertutup di ruang bernorma cone* $\left(\ell_p, \|\quad\|_{\ell_p}^C\right)$ *jika dan hanya jika himpunan* A *tertutup di ruang bernorma* ℓ_p.

Bukti:

a. $(\Rightarrow)$ Misalkan A terbuka di ruang bernorma cone $\left(\ell_p, \|\quad\|_{\ell_p}^C\right)$, jadi setiap titik dari A adalah titik interior dari A. Artinya untuk setiap $\bar{a} \in A$ terdapat $h \in C[a,b]$, $h \gg \theta$ sehingga $B_h(\bar{a}) \subseteq A$ dimana $B_h(\bar{a}) = \{\bar{x} \in \ell_p \colon \|\bar{a} - \bar{x}\|_{\ell_p}^C \ll h\}$. Ambil $\bar{x} \in B_h(\bar{a})$, maka diperoleh $\|\bar{a} - \bar{x}\|_{\ell_p}^C \ll h$. Selanjutnya,

$$\|\bar{x}_n - \bar{x}\|_{\ell_p} F(t) < h(t), \forall t \in [a,b].$$

$$\|\bar{x}_n - \bar{x}\|_{\ell_p} < \frac{h(t)}{F(t)}, \forall t \in [a,b] \tag{3}$$

Mudah dipahami bahwa $\frac{h(t)}{F(t)} > 0,\ ,\forall t \in [a,b]$. Sekarang, ambil $t' \in [a,b]$ tetap, dan misalkan $\frac{h(t')}{F(t')} = \varepsilon$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan dari (3) dapat ditulis $\|\bar{x}_n - \bar{x}\|_{\ell_p} < \varepsilon$. Artinya $\bar{x} \in B(\bar{a}; \varepsilon)$. Karena $B_h(\bar{a}) \subseteq A$ maka $\bar{x} \in A$. Dengan demikian $B(\bar{a}; \varepsilon) \subseteq A$. Jadi $\bar{a}$ titik interior dari A. di ruang bernorma ℓ_p. Karena $\bar{a} \in A$ sebarang maka A terbuka di ruang bernorma ℓ_p.
$(\Leftarrow)$ Misalkan A terbuka di ruang bernorma ℓ_p, artinya setiap titik di A. adalah titik interior dari A. di ruang bernorma ℓ_p . Dengan kata lain untuk setiap $\bar{a} \in A$ terdapat $\varepsilon > 0$ sehingga $B(\bar{a}; \varepsilon) \subseteq A$. Selanjutnya, diambil sebarang $\bar{x} \in B(\bar{a}; \varepsilon)$ maka

$$\|\bar{a} - \bar{x}\|_{\ell_p} < \varepsilon \tag{4}$$

Kalikan kedua ruas (4) dengan $F(t), \forall t \in [a,b]$ maka diperoleh

$$\|\bar{a} - \bar{x}\|_{\ell_p} F(t) < \varepsilon\, F(t), \qquad \forall t \in [a,b] \tag{5}$$

Misalkan $h(t) = \varepsilon F(t),\ \forall t \in [a,b]$ maka dari (5) berakibat $\|\bar{a} - \bar{x}\|_{\ell_p}^{C} \ll h$. Artinya, $\bar{x}$ adalah sebarang elemen di $B_h(\bar{a})$. Karena $B(\bar{a};\varepsilon) \subseteq A$ maka $\bar{x} \in A$. Jadi $B_h(\bar{a}) \subseteq A$. Dengan demikian $\bar{a}$ titik inerior dari A di ruang bernorma cone $\left(\ell_p, \|\quad\|_{\ell_p}^{C}\right)$. Karena $\bar{a} \in A$ sebarang, maka A terbuka di ruang bernorma cone $\left(\ell_p, \|\quad\|_{\ell_p}^{C}\right)$.

b. Bukti analog dengan (a) dengan catatan bahwa A tertutup di ruang bernorma cone $\left(\ell_p, \|\quad\|_{\ell_p}^{C}\right)$ artinya $A^c = \ell_p \backslash A$ terbuka di $\left(\ell_p, \|\quad\|_{\ell_p}^{C}\right)$. Demikian juga A tertutup di ruang bernorma ℓ_p artinya $A^c = \ell_p \backslash A$ terbuak di ℓ_p. ■

Selanjutnya, diberikan suatu teorema yang menunjukkan sifat keterbatasan dalam ruang bernorma cone $\left(\ell_p, \|\quad\|_{\ell_p}^{C}\right)$.

Teorema 3.7. *Ruang bernorma cone* $\left(\ell_p, \|\quad\|_{\ell_p}^{C}\right)$ *tidak terbatas cone.*

Bukti:
Karena $\|\bar{x}\|_{\ell_p}^{C}$ bergantung pada nilai $\|\bar{x}\|_{\ell_p}$ untuk $\bar{x} \in \ell_p$, maka untuk setiap $\beta \geq 0$ pastilah terdapat $\bar{x} \in \ell_p$ sedemikian hingga $\|\bar{x}\|_{\ell_p} > \beta$. Jadi, untuk setiap $\beta \geq 0$ ada fungsi $f_\beta(t) \coloneqq \beta F(t)$, untuk setiap $t \in [a,b]$. Hal ini berakibat $\|\bar{x}\|_{\ell_p} F(t) > f_\beta(t)$, untuk setiap $t \in [a,b]$. Dengan demikian berlaku $\|\bar{x}\|_{\ell_p}^{C} \succ f_\beta$ dan $f_\beta \in C_{0+}[a,b]$. Dilain pihak, untuk setiap $g \in C_{0+}[a,b]$ maka terdapat $\beta_g \geq 0$ sedemikian hingga $g(t) = f_{\beta_g}(t)$ untuk setiap $t \in [a,b]$. Hal ini berakibat $g = f_{\beta_g}$, maka $\|\bar{x}\|_{\ell_p}^{C} \succ g$. Jadi jelas bahwa $g \in C[a,b], g \gg 0$. Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa untuk setiap $g \in C[a,b], g \succcurlyeq \theta$ terdapat $\bar{x} \in \ell_p$ dengan $\|\bar{x}\|_{\ell_p} > \beta_g > 0$ sedemikian hingga $\|\bar{x}\|_{\ell_p}^{C} \succ g$. Jadi terbukti ℓ_p tidak terbatas cone. ■

Meskipun ruang bernorma cone $\left(\ell_p, \|\quad\|_{\ell_p}^{C}\right)$ tidak terbatas cone, namun memiliki himpunan bagian yang terbatas cone. Jika diberikan himpunan $S \subseteq \ell_p$ dengan $S \coloneqq \left\{\bar{x} \in \ell_p : \|\bar{x}\|_{\ell_p} \leq 1\right\}$ maka himpunan S terbatas cone.

4. Simpulan

Telah dikonstruksi suatu norma cone bernilai-$C[a,b]$ pada ruang ℓ_p dengan norma cone $\|\bar{x}\|_{\ell_p}^{C} = F_{\bar{x}}^{p}, \bar{x} \in \ell_p$ dimana $F_{\bar{x}}^{p}$ adalah fungsi bernilai real dengan $F_{\bar{x}}^{p}(t) \coloneqq \|\bar{x}\|_{\ell_p} F(t),\ t \in [a,b]$. Ruang bernorma cone bernilai-$C[a,b]$ pada ruang ℓ_p merupakan ruang Banach cone. Ruang ini bersifat tertutup, terbuka dan tidak terbatas cone.

Daftar Pustaka

Gordji, M. E., Ramezani, M., Khoadei, H., Baghani, H. (2012). Cone Normed Space. *Caspian Journal of Mathematical Sciences (CJMS)*, *1*, 7-12.

Long-Guang, H., & Xian, Z.(2007). Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings. *J. Math. Anal. Appl.*, *332*(10), 1468-1476.

Rynne, B. P., & Youngson, M. A. (2001). Linear Functional Analysis. London: Springer.

Sonmez, A., & Cakalli, H. (2010). Cone norms spaces and weighted means. *Mathematics and Computer Modeling*, *52*, 1660-1666.

Kreyszig, E. (1991). Introductory Functional Analysis With Applications. New York: John Wiley and Sons, Inc.