PRISMA 6 (2023): 241-245
PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika
https://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/prisma/
ISSN 2613-9189

Kajian Fungsi Pengawasan Lyapunov Dirancang Oleh Pembatasan Input Singularitas Memerlukan Syarat Angka Reproduksi untuk Model Epidemik

Wahyu Fistia Doctorina[a*]

[a, b] *Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya, Indonesia*

* *Alamat Surel: wahyufd2020@gmail.com*

Abstrak

Control Lyapunov Function (CLF) adalah sebuah sistem tak linier, mengawasi stabilitas ke sistem untuk mendapakan CLF, turunan waktu dari sebuah fungsional seharusnya didefinisikan negatif. Frekuensi prosedur memperbaiki sebuah input pengawasan dimana fungsi rasional atau fungsi invers. Input Pengawasan tidak didefinisikan pada ruang spesifik di mana fungsi rasional sama dengan nol atau fungsi invers tak ada. Dengan singularitas, trayektori sistem pengawasan tidak dapat dibangun, dimana salah satu dari alasan penting untuk membuat sistem tak linier menjadi stabil asymptotik global, angka reproduksi $R_O \leq 1$. Jika $R_O > 1$ keseimbangan endenik, stabil asymptotik positif. Hukum pengawasan halus ke stabilitas asymptotik global dengan arti membatalkan singularitas pada input pengawasan.

Kata kunci:

Control Lyapunov Function, input singularitas, global stabilitas

1. Pendahuluan

Ada pengawasan umum untuk sistem tak linier tetapi diketahui macam-macam pengawasan dapat diterapkan ke sistem tak linier yang dibatasi, dimana keadaan aman, untuk contoh , pengawasan model linierisasi. [3, 4, 6].

Meskipun varietas pengwasan tak linier, kriteria stabilitas menggunakan sebuah energi fungsi yang merupakan umum. Pendekatan CLF adalah contoh sedemikian mode hingga fungsi energi di gunakan aktif merancang pengawasan untuk sistem tak liner [7] tetapi pendekatan ini mempunyai batas kepastian stabilitas global. Karena sebuah singularitas cenderung ke input pengawasan tujuannya merancang sebuah hukum pengawasan yang halus di mana dapat menjamin stabilitas global dengan membatalkan singularitas dari input pengawsasan di bangun pada prosedur rancang CLV.

Untuk mendapatkan CLV dari sitem tak linier yang diberikan dengan menandai input pengawasan yang membuat waktu turunan dari energi fungsi di pilih menjadi definit negatif input pengawasan meliputi sebuah invers fungsi atau sebuah fungsi rasional. Input pengawasan tak di definisikan pada ruang bagian spesifik di mana invers fungsi tidak terdapat atau penyebut dari fungsi rasional adalah semua sama dengan nol. Pada daerah ini disebut manifold singular, trayektori dari system pengawasan tidak dapat di bangun karna input pengawasan menyimpang.

Sebuah metode membatalkan singularitas yang di bangun pada prosedur rancangan CLF. Stabilitas global dari sistem pengawasan di pastikan karena hukuman pengawasan tidak memuat singularitas dan terdefinisi dengan baik. Pada sebuah ruang bagian. Dan trayektor halus dari pengawasan sistim di bangun karena pengawasan tidak memerlukan sebuah aksi.

To cite this article:
Fistia, W. F. (2023). Kajian Fungsi Pengawasan Lyapunov Dirancang Oleh Pembatasan Input Singularitas Memerlukan Syarat Angka Reproduksi untuk Model Epidemik. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika 6*, 241-245

2. Pembahasan

2.1. Singularitas Pada Pendekatan CLF

Pendekatan CLF di rancang sebuah input pengawasan untuk membuat turunan dari sebuah fungsi energy yang dipilih definit negatif. Pandangan sebuah ssstem tak linier dengan sebuah input tunggal sebagai berikut

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \qquad \text{….. (1)}$$

Misalkan bahwa ada sebuah fungsi energy v(x) dimana sebuah kontinuitas dan fungsi definit positif. Turunan waktu dari fungsi energy sepanjang trayektori system (1) adalah.

$$\dot{v} = \nabla V \dot{x}$$
$$= \nabla V[f(x) + g(x)u] ,$$

Diman ∇v menyatakan gradient v terhadap x. Jika input pengawasan u mengakibatkan

$$u < \frac{\nabla V f(x)}{\nabla V g(x)} \qquad \text{….. (2)}$$

Pada ruang bagian seluruhnya kecuali pusat, maka $\dot{v}$ juga difinit negative kecuali pusat. Keberadaan CLF menjamin pusat dari system yang asimptotik global. Tetapi input pengawasan mengakibatkan (2) mempunyai sebuah singularitas dimana penyebut sama dengan nol karena input pengawasan di berikan sebagai sebuah fungsi rasional. Yang berarti trayektori dari sistem pengawasan tidak dapat di bangun pada daerah yang disebut manifold singular karena input pengawasan divergen khususnya jika manifold tunggal membangun semua ruang bagian, trayektori tidak dapat konvergen ke pusat jika langkah awal di berikan diatas manifold tunggal karena trayektori tidak dapat melaluinya. Jadi, salah satunya tidak dapat stabilitas asimptotik global dari pusat system pengawasan, dalam sistem pengawasan menjaedi tak dapat di awasi jika trayektori manifold tunggal karena input pengawasan sebelum divergen.

Pada kejadian sistem input banyak, input pengawasan diberikan bukan fungsi rasional tetapi fungsi invers. Ketunggalan muncul jika invers dari sebuah matrik yang diberikan tidak ada saturasi boleh terjadi jika bilangan keadaan dari sebuah matrik adalah [9, 10, 12]

2.2. Pembatalan Singularitas Pada Rancangan CLF

Sebuah hukum pengawasan harus yang stabilitas asimptotik global dari pusat di berikan sistim tak linier dengan pembatalan input ketunggalan yang dibangun pada prosedur rancangan CLF. Pandang sebuah sistem tak linier dengan input tunggal u dan sebuah input matriks konstan B sebagai berikut.

$$\dot{x} = f(x) + Bu$$

dimana x adalah sebuah variabel bagian, f(x) adalah sebuah sistim dimana fungsi vector halus, B adalah sebuah input matriks dimana unsurnya adalah konstan dan u adalah sebuah input pengawasan. Misalkan bahwa sistim drift f(x) terdiri dari sebuah bagian linier Ax dan sebuah bagian tak linier ϕ(x) dimana sebuah fungsi analitik real. Maka, sistem tak linier dapat di tulis sebagai

$$\dot{x} = Ax + \emptyset(x) + Bu \qquad \text{….. (3)}$$

Jika ada sebuah input pengawasan halus yang membuat turunan waktu dari sebuah fungsi energi yang definit negatif, stabilitas asimptotik dari pusat (3) dijamin perkembangan ke stabilitas global, sebuah keadaan tambahan pada fungsi energi.

Definisi 3.1

Sebuah fungsi mengakibatkan

$$V(x) \to \infty \text{ sebagai } \| x \| \to \infty$$

Dikatakan radial tak terbatas [4]

Lemma 3.1

Misal pusat adalah sebuah titik keseimbangan untuk (3). Jika ada sebuah fungsi v yang dapat di diferensialkan dengan kontinu, sedemikian hingga

V (0) = 0 dan v (x) > 0 , V x ≠ 0

$\dot{v}(x) \angle 0 , \ni \forall x \neq 0$ …. (4)

V radial tak terbatas .

Maka, pusat adalah stabil asimptotik global.

Lemma ini menyatakan perbaikan umum, dimana keberadaan fungsi energi mengakibatkan (4) menjamin stabilitas asimptotik global. Tetapi menemukan fungsi energi untuk setiap sistim tak linier. Teorema berikut mulai dari fungsi energi sederhana dalam bentuk sempurna dan konsentrasi pada merancang input pengawasan halus yang membuat fungsi menjadi sebuah CLF untuk sistem tak linier.

Teorema 3.2

Untuk sistem (3), jika pasangan (A, B) adalah dapat di awasi dengan sebuah fungsi energi $V = X^T Mx$ sedemikian hingga L_{13} V adalah faktor $L_B V$, dimana M adalah matrik definit positif simetrik. Maka terdapat input pengawasan halus yang menjamin stabilitas asimptotik global dari pusat (3).

Bukti

Tandai input pengawasan u untuk sistem (3). Sebagai

$u = -K^T x + \rho (x)$ …. (5)

dimana K adalah bagian dan ρ (x) adalah bagian tidak linier.

Dengan input pengawasan sistim tak linier yang diberikan (3) menjadi

$$\dot{x} = (A - BK^T)x + \emptyset (x) + B\, \rho(x)$$

Sedangkan, turunan waktu dari sebuah fungsi energi V sepanjang trayektori sistem adalah

$$\dot{V} = \nabla V\, \dot{x}$$
$$= \nabla V[(A - BK^T)x + \emptyset (x) + B\, \rho(x)]$$
$$= L_{Tx}\, V + L_{\emptyset(x)}V + L_B\, V\rho(x)$$

Dimana ∇ V adalah gradien V terhadap x $L_h V$ adalah derivatif Lie dari V sepanjang h, dan $T = A - BK^T$, Terdapat sebuah K sepanjang T menjadi sebuah matriks Hurwitz karena pasangan (A,B) dapat di awasi. Misal $L_\phi V =$ a (x), $L_B V = b(x)$, dan $L_{Tx} V = c(x)$ maka

$\dot{V} = c(x) + (ax) + b(x)\rho(x)$ …. (6)

Menggunakan sebuah fungsi eneriy $V = x^T M_x$ mengakibatkan keadaan pertama dari (4), suku pertama dari kanan (6) adalah

$c(x) = x^T (M T + T^T M)\, x$

Karena T adalah matrik Hurwitz, terdapat sebuah matrik definit positif simetrik N sedemikian hingga.

$MT + T^T M = - N$,

Dimana c (x) < 0 untuk semua x kecuali pusat.

Jika bagian tak linier dari (5) dan (6) di tandai sebagai

$\rho(x) = -\frac{a(x)}{b(x)}$ …. (7)

maka derivatif waktu dari fungsi energi (6) kurang dari 0. Untuk semua x kecuali pusat dan manifold singular S = {x| b(x) = 0}. Dengan asumsi, b(x) adalah sebuah faktor dari α(x), penyebut (7) di keluarkan. Ini menuju hasil input pengawasan (5) adalah fungsi halus dan terdefinisi baik pada ruang bagian, yang mengakibatkan keadaan kedua dari (4) dan kontinu dapat di turunkan dari V(x).

Keadaan ketiga dari (4) di sesuaikan oleh ketidaksamaan Rayleigh sebagai berikut.

$\lambda_{min}(M)\, \| x \|^2 \le V \le \lambda_{max}(M)\, \| x \|^2$ dimana λ_{min} dan λ_{max} menyatakan minimum dan nilai eigen maksimum, dimana bilangan real M adalah matrik simetrik, missal || x || menuju infinitas batas bawah dan fungsi energi. Oleh karena itu input pengawasan halus (5) mengikuti fungsi energi V menjadi sebuah CLF untuk sistem yagn diberikan dan menjamin stabilitas asimptotik global dari pusat.

2.3. Contoh-Contoh

Pada umumnya mudah menemukan CLF yang sesuai untuk sebuah sistim tak linier. Memang sebuah sistim tak linier. Merancang sebuah input pengawasan yang membuat fungsi energi paling sederhana pada bentuk sempurna menjadi sebuah CLF contoh berikut menunjukkan metode sebab pengawasan halus yang menjamin stabilitas asuimptotik global tidak seperti metoda yang mempunyai sebuah limit pada stabilitas global karena singularitas pada input pengawasan atau trayektori halus karena diskontinuitas pada input pengawasan.

2.3.1 Stabilitas local dengan linieritas masukan

Contoh ini adalah kejadian bahwa pusat atraksi di batasi karena singularitas pada input pengawasan dirancang

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - x_3$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 x_3 - x_2 + 4$$
$$\dot{x}_3 = -x_1 + 4 \qquad \text{…. (8)}$$

Hasil input pengawasan oleh input linierisasi diberikan sebagai berikut

$$u = \frac{1}{x_1}\,(V - 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_3 - x_2x_3 + 3x_1\,x_3 + x_1^2 + x_2^3) \quad \ldots.(9)$$

Dengan input pengawasan, sistim tak linier (8) menjadi sebuah sistem linier dengan sebuah input pengawasan baru V pada (9). Stabilitas asimptotik dari pusat sistim dapat diperoleh sebuah input bagian sebarang di mana menstabilkan sistim linier [4]. Bagaimanapun karena input pengawasan (9) mempunyai manifold singular S = {x | x_1 + 1 = 0}, input pengawasan tidak didefinisikan pada manifold. Dan manifold membangun semua ruang bagian. Jadi, stabilitas global dari sistim pengawasan . Untuk contoh, trayektori mulai dari sebuah bagian awal X_0 = [-2 0 0}^{T} tidak dapat konvergen ke pusat karena tidak dapat melalui manifold singular.

Untuk menerapkan metode, tulis ulang sistim (8) pada bentuk (3)

$$\dot{x} = A_x + Bu + \emptyset(x)$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1\,x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pasangan (A, B) dari sistim dapat di awasi karena matriks yang dapat di awasi mempunyai rank penuh. Misal sebuah fungsi energi adalah V = X^TM x , dimana M adalah sebuah matriks definit positif simetrik sebarang

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix}$$

Dan, menghitung $L_\phi V$ dan $L_B V$

$L_\phi V$ = -2 x_1 x_3 (m_{12} x_1 + m_{22} x_2 + m_{23} x_3)

L_B V = 2[(m_{12} + m_{13}) x_1 + (m_{22} + m_{23}) x_2 + (m_{23} + m_{33}) x_3]

Merencanakan unsur-unsur dan M untuk membuat $L_B V$ menjadi X_3 adalah sebuah faktor $L_\phi V$ Contoh m_{12} = - m_{13} , m_{22} = -m_{23} , dan unsur lan dipilih sebarang M menjadi definit pisitif sebagai berikut

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} > 0$$

Matriks definit positif simetrik mengikuti

$L_\phi V$ = -2 x_1 x_3 (x_1 + x_2 – x_3)

$L_B V$ = 4 x 3 …. (10)

Mengakibtkan asumsi teorema pada sub bab 3 dan fungsi energi V menjadi sebuah CLF untuk sistem yang diberikan. Hasil input pengawasan oleh (5) , (7) dan (10) adalah

u = -K^T x ½ x_1 (x_1 + x_2 – x_3) …. (11)

dimana adalah sebuah bagian dari input untuk A – BK^T untuk menstabilkan. Tidak seperti input pengawasan (9) oleh linierisasi, tidak ada singularitas pada input pengawasan (11) Jadi, stabilitas asimptotik global dari pusat sistem (8) adalah m;enjamin input pengawasan halus

2.3.2. Atraksi Pusat

Contoh ini adalah kejadian bahwa pusat atraksi di kembangkan oleh, singalaritas

$$\dot{x_1} = x_2$$
$$\dot{x_1} = x_1 + (1 + x_1 + x_2)\,x_3$$
$$\dot{x_3} = 4$$

Input pengawasan di hasilkan oleh langkah yang diberikan sebagai

$Z_1 = X_1$

$Z_2 = X_2 + \Sigma_1 X_1$

$$Z_3 = x_3 + \frac{1}{1 + x_1 + x_2}\,(\sum Z_2 + \sum_1 x_2 + 2\,x_1) \quad \ldots\ldots(13)$$

$$u = -\sum\nolimits_3 Z_3 - \frac{\sum 1 + \sum 2}{(1 + x_1 + x_2)^2}\,[x_1 + x_2 + (1 + x_1 + x_2)x_3] - (1 + x_1 + x_2)Z_2$$

Dimana Σ_1 , Σ_2 , Σ_3 di rancang ukuran [6] Input pengawasan u pada (13) meliputi sebuah fungsi rasional. Jadi u tidak didefinisikan pada manifold singular.

3. Simpulan

Sebuah metode pengawasan dengan pembatalan input singularitas dibangun pada prosedur rancangan CLF. Metode yang diajukan menjamin stabilitas asimptotik global , hukum pengawasan halus seperti metode yang ada ., linierisaasi , pengawasan mode, Contoh yang ditunjukkan simplisitas dari pendekatan .Singularitas diwakili sebagai kombinasi linier karena pemisalan .bahwa input matriks adalah konstan dan energi fungsi adalah bentuk kwadrat sempurna.Pilihan yang lebih sedikit pada suku pembatalan dan pembatasan pada sistim yang dapat diaplikasikan .Penelitian yang lebih jauh membuktikan diterapkannya metode dengan memandang bermacam macam energi fungsi .

Daftar Pustaka

B. Castillo-Toledo and A. L. Cuevas, “Tracking through Singularities Using a Robust Differentiator,” 6th Int. Conf. Electric, Eng., Comp. Sci., Autom. Control, pp 1-5, Jan. 2009

D. Colon and F. M. Pait, “Geometry of Adaptive Control : Optimization and Geodesics,” Int. J. Adapt. Control, Signal Process, vol. 18, no. 4, pp. 381-392, Apr. 2004.

R. M. Hirschorn, “Output Trackingthrough Singularities,” Proc. 41st IEEE EDE,pp. 3843-3848, Des. 2002.

Khalil, Nonlinear Systems, 3rd Ed., Prentice Hall, New Jersey, 2002.

X. Y. Lai, S. X. Yang, J. H. She and M. Wu, “Singularity Avoidance for AcrobotsBased on Fuzz-control Strategy,” Robot., Autunom. Syst., vol. 57, no. 2, pp. 202-211, Feb. 2009.

Z. H. Li and M. Krstic,” Maximizing Regions of Attraction via Backstepping and CLFs with Singularities,” Syst., Control Lett, voll. 30, no. 4, pp. 195-207, May 1997.

D.E.Sontang,“A Universal Construction of Artstein Theorem on Nonlinear Stabilization,” Syst., Control Lett., vol. 13, no. 2, pp. 117-123, Aug. 1989.

C. J. Tomlin and S. S. Sastry, “Switching through Singularities,” Syst., Control Lett., vol. 35, no. 3, pp. 145-154, Oct. 1998.

H. Wei and S. I. Amari, “Dynamics of Learning Near Singularities in Radial Basis Function Networks,” Neur. Net., vol. 21, no. 7, pp. 989-1005, Sep. 2008

L. Xiaoping and S. Celikovsky, “Feedback Control, vol. 68, no. 4, pp. 753-774, 1997

J. X. Xu, T. H. Lee, and M. Wang, “Self-Tuning Type Variable Structure Control Method for a Class of Nonlinear Systems,” Int. J. Robust, Nonlinear Control, vol. 8, no. 13, pp. 1133-1153, Dec. 1998.

J. X. Xu. and R. Yan, “Fixed Poin Theorem-Based Iterative Learning Control for LTV Systems with Input Singularity,” IEEE Trans. Autom, Control, vol. 48, no. 3, pp. 487-492, Mar. 2003.

G. B. Koo, J. B. Park, and Y. H. Joo, “Observer-based Sampled-data controller of linear system for the wave energy converter,” Int. Journal of Fuzzy Logic and Intelligent Systems, vol. 11, no. 4, pp. 275-279, Des. 2011.

Dag Heal Yoarm, Youg Hoon Joo, “Control lyapnov Enction Design by Cancelling Input Singularity”, International Jounal of Fuzzy Logic and Intelligent System, vol. 12, no. 2, June 2022, pp. 131-136.

A Fall, A. Iggidr, G. Sallet and J. J. Tenr, “Epidemiological Models and Lyapurov Function”, Math. Mode. Nat. Phenom. vol. 2, no. 1, 2007, pp. 62-83