PRISMA 6 (2023): 796-804
PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika
https://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/prisma/
ISSN 2613-9189

Penerapan Grup Operasi Penjumlahan Aritmetika Modulo 12 Dan Modulo 24 Pada Sistem Kerja Jam

Zakiyah Bahanan[a,*]

[a]*Univerversitas Negeri Malang, Malang, Jawa Timur 65145, Indonesia*

* *Alamat Surel: zakiyah.bahanan.2103118@students.um.ac.id*

Abstrak

Istilah kongruensi sering muncul dalam kehidupan sehari-hari. Ketika bekerja dengan kongruensi, penggunaan aritmetika modular dalam teori bilangan menjadi dasar untuk menyelesaikan permasalahan mengenai bilangan bulat. Himpunan dari bilangan modulo sering digunakan untuk menunjukkan dalam memenuhi sifat-sifat pada teori grup pada suatu operasi biner yang berlaku pada modulo tertentu.Tujuan dari makalah ini membahas mengenai penggunaan jam dengan sistem 12 jam dan sistem 24 jam yang disajikan dengan menerapkan sifat-sifat grup penjumlahan aritmetika modulo 12 dan modulo 24. Metode yang digunakan adalah studi pustaka berdasarkan analisis sumber pustaka yang relevan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa modulo 12 dan modulo 24 terhadap operasi penjumlahan memenuhi keempat sifat grup sehingga $(Z_{12}, +)$ dan $(Z_{24}, +)$ masing-masing adalah grup. Penerapan grup operasi penjumlahan aritmetika modulo 12 dan modulo 24 pada sistem kerja jam secara tidak langsung dapat membantu menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan pengaturan waktu disesuaikan dengan aturan perhitungan pada masing-masing sistem.

Kata kunci:

Teori Grup, Aritmetika Modulo 12, dan Aritmetika Modulo 24

1. Pendahuluan

Istilah kongruensi sering muncul dalam kehidupan sehari-hari. Misalnya, kerja kalender yang kita gunakan dalam tahun Masehi, jam arloji, meteran serbaguna (*utility meter*), odometer, dan masih banyak lagi contoh-contoh penggunaan kongruensi yang secara tidak langsung ada disekitar kita (Rosen, 2011). Ketika bekerja dengan kongruensi, penggunaan aritmetika modular dalam teori bilangan menjadi metode aritmetika untuk menyelesaikan permasalahan mengenai bilangan bulat. Ide dasar dari aritmetika modular adalah bekerja dengan membaginya dengan angka tertentu sehingga terdapat sisa dan sisa hasil pembagian inilah yang dijadikan patokan untuk mengetahui maknanya. Salah satu contoh dari aritmetika modular ada pada sistem kerja jam yaitu jam yang berbentuk analog di mana dalam satu hari dibagi menjadi dua periode 12 jam yang terdapat dua belas angka, yaitu angka 1,2,3,4,5,...,12. Angka-angka tersebut menunjukkan waktu yang didapati pada setiap keadaan tertentu. Pengatur waktu pada jam ini menggunakan aritmetika modulo 12. Jika jam analog dikonversikan menjadi sistem 24 jam, maka ketika jam menunjukkan angka 12 pada siang hari, maka jam tersebut menunjukkan pukul 12.00, setelah itu maka pasti jarum jam akan berputar menunjukkan angka 1. Angka 1 dalam hal ini pada sistem 24 jam menunjukkan pukul 13.00 yang artinya keadaan itu terjadi pada jam 1 sore (Sembiring, 2012). Perputaran jarum jam ini akan berulang secara terus menerus setiap 12 jam, dimana ketika jam menunjukkan angka 12 pada malam hari, maka dengan sistem 24 jam keadaan tersebut menunjukkan pukul 24.00 dan sama artinya dengan pukul 00.00.

Jika diperhatikan, pada penggunaan jam digital maka dapat diperoleh sistem 12 jam atau sistem 24 jam. Jika digunakan sistem 12 jam maka tidak ada persoalan tentang penentuan jam (Sembiring, 2012). Sistem 12 jam terdiri atas 12 angka dengan angka 12 diganti dengan angka 0. Sehingga keseluruhan angka-angka yang tersedia adalah 0,1,2,3,4,5,...,11. Dalam sistem 24 jam, jam digital hampir sama dengan jam analog, hanya saja angka-angka yang tersedia pada jam digital terdiri dari 24 angka, yang diantaranya adalah angka 0,1,2,3,4,5,6,...,23 (Sembiring, 2012). Pada tulisan ini, akan dibahas mengenai penggunaan jam dengan

To cite this article:
Bahanan, Z. (2023). Penerapan Grup Operasi Penjumlahan Aritmetika Modulo 12 Dan Modulo 24 Pada Sistem Kerja Jam. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika 6*, 796-804

sistem 12 jam dan sistem 24 jam yang disajikan dengan menerapkan sifat-sifat grup penjumlahan aritmetika modulo 12 dan modulo 24.

2. Pembahasan

2.1. *Aritmetika Modulo*

Aritmetika modulo merupakan salah satu topik bahasan dalam teori bilangan yang memegang peranan penting dalam perhitungan bilangan bulat, khususnya pada aplikasi kriptografi. Aritmetika modulo yang juga dikenal sebagai aritmetika modular atau aritmetika jam, memiliki pengertian sebagai suatu sistem aritmetika untuk bilangan bulat dimana bilangan-bilangan tersebut akan kembali ke awal ketika sampai pada nilai tertentu (Yuniawatika, 2015; Kaisar, 2008).

Operator yang digunakan pada aritmetika modulo adalah mod (Munir, 2016). Operator mod, jika digunakan pada pembagian bilangan bulat, akan memberikan sisa hasil pembagian. Misalnya 23 dibagi 5 memberikan hasil bagi sama dengan 4 dan sisa sama dengan 3, sehingga dapat ditulis $23 \bmod 5 = 3$. Definisi operator modulo dinyatakan sebagai berikut.

Misalkan a dan m adalah bilangan bulat, dengan $m > 0$. Operasi $a \bmod m$ (dibaca "a modulo m") memberikan sisa r jika a dibagi dengan m. Dengan kata lain, $a \bmod m = r$ sedemikian sehingga $a = mq + r$, dengan $0 \leq r < m$ (Munir, 2016). Bilangan m disebut modulus atau modulo, dan hasil aritmetika modulo m terletak di dalam himpunan $\{0,1,2,\ldots,m-1\}$ (Rosen, 2011; Juniardi dkk, 2019). Demikian pula, kita tahu bahwa a tidak habis dibagi m, kita sebut r residu positif terkecil dari a modulo m.

2.2. *Teori Grup*

Himpunan dari bilangan modulo sering digunakan untuk menunjukkan dalam memenuhi sifat-sifat pada teori grup pada suatu operasi biner yang berlaku pada modulo tertentu. Misalnya, himpunan bilangan modulo 5, maka himpunannya memuat $\{0,1,2,3,4\}$. Operasi biner penambahan modulo n dan perkalian modulo n pada himpunan $\{0,1,2,\ldots,m-1\}$, yang dilambangkan dengan Z_n, memainkan peran yang sangat penting dalam aljabar abstrak (*abstract algebra*) (Gallian, 2021).

Grup didefinisikan sebagai suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi satu operasi biner $*$ (dinotasikan $(G,*)$) sedemikian sehingga memenuhi empat sifat berikut (Juniardi dkk, 2019; Niven dkk, 1991).

- Tertutup terhadap operasi $*$
  $\forall a,b \in G$, berlaku $a * b \in G$
- Assosiatif terhadap operasi $*$
  $\forall a,b,c \in G$, berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$
- Memiliki elemen identitas
  $\exists e \in G$ sedemikian sehingga $a * e = e * a = a, \forall a \in G$
- Memiliki invers
  Untuk masing-masing $a \in G\ \exists a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

2.3. *Fungsi Bilangan Bulat Terbesar (Fungsi Floor)*

Pada teori bilangan, bilangan bulat terbesar pada pada suatu bilangan real, dinotasikan dengan $\lfloor x \rfloor$, adalah bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x. Dengan kata lain, $\lfloor x \rfloor$ adalah bilangan bulat yang memenuhi $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. Fungsi bilangan bulat terbesar juga disebut dengan fungsi *floor* (Rosen, 2011).

2.4. *Aritmetika Modulo 12*

Jam yang sering kita gunakan dalam keseharian dapat juga menggunakan modulo 12 yakni membagi 24 jam dalam sehari menjadi dua periode yang masing-masing berlangsung 12 jam. Periode 12 jam pertama ditetapkan sebagai AM yang berlangsung dari pukul 00.00 malam hingga pukul 11.59 siang hari. Sementara periode kedua ditandai dengan PM, mencakup 12 jam mulai dari pukul 12.00 siang hingga pukul 11.59 malam. Bilangan yang digunakan dalam modulo 12 yaitu $Z_{12} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$. Hal lain yang tidak boleh terlupakan adalah penggunaan satuan waktu menit dan detik dimana 1 jam = 60 menit dan 1 menit = 60 detik. Sehingga, bilangan yang dipakai dapat dituliskan dari 00.00 sampai 11.59 (Sembiring, 2012). Perhatikan tabel cayley di bawah ini

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Gambar 1. Tabel Cayley untuk Operasi Penjumlahan Modulo **12**

Berdasarkan tabel cayley di atas maka modulo 12 (Z_{12}) terhadap operasi penjumlahan memenuhi sifat tertutup, memiliki elemen identitas yakni 0 (atau 00.00) dan masing-masing elemen mempunyai invers, sedangkan sifat asosiatif diadopsi dari sifat asosiatif bilangan bulat, sehingga modulo 12 (Z_{12}) terhadap operasi penjumlahan memenuhi keempat sifat grup, dapat disimpulkan $(Z_{12},+)$ adalah grup. Jika dikaji lebih jauh, $(Z_{12},+)$ juga merupakan grup komutatif karena untuk setiap z_1, $z_2 \in Z_{12}$ berlaku $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$. Selain itu juga, $(Z_{12},+)$ adalah grup siklik karena dalam Z_{12}, $\langle 1\rangle = \langle 5\rangle = \langle 7\rangle = \langle 11\rangle = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\} = Z_{12}$ untuk $Z_{12} = \langle a\rangle = \{n \cdot a | n \in \mathbb{Z}^+\}$ (Gallian, 2021) .

Catatan:

- Jika bilangan yang menunjukkan jam dibagi dengan 12, nilai fungsi *floor*-nya bilangan ganjil maka jenis waktu yang digunakan berubah yakni dari AM menjadi PM dan sebaliknya. Tetapi, jika nilai fungsi *floor* adalah bilangan genap maka jenis waktu yang digunakan tetap. Aturan ini didasarkan pada putaran dua periode 12 jam (AM dan PM) dalam sehari, dimana jika diperoleh nilai fungsi bilangan bulat terbesar yaitu bilangan genap maka putaran waktu yang dihasilkan adalah periode yang sama, sehingga jenis waktu yang digunakan tetap. Sedangkan jika nilai fungsi bilangan bulat terbesar yaitu bilangan ganjil maka putaran yang dihasilkan adalah periode yang berbeda, sehingga jenis waktu yang digunakan berubah. Penetapan pembulatan fungsi *floor* menyesuaikan dengan batas minimum putaran periode 12 jam yaitu 0.

- Untuk menyederhanakan perhitungan digunakan teorema kongruensi pada penjumlahan, perkalian, dan/ atau perpangkatan modulo (Rosen, 2011), yaitu:

  (1) Teorema kongruensi pada penjumlahan modulo

  Jika a,b,p,q adalah bilangan bulat, dengan $a \equiv p \pmod{12}$ dan $b \equiv q \pmod{12}$ maka $a + b \equiv p + q \pmod{12}$.

  Bukti:

  Karena $a \equiv p \pmod{12}$ dan $b \equiv q \pmod{12}$, kita tahu bahwa $12|(a - p)$ dan $12|(b - q)$. Jadi, ada bilangan bulat k dan l dengan $12k = a - p$ dan $12l = b - q$. Perhatikan bahwa $(a + b) - (p + q) = (a - p) + (b - q) = 12k + 12l = 12(k + l)$. Oleh karena itu, $12|[(a + b) - (p + q)]$. Sehingga $a + b \equiv p + q \pmod{12}$.

  (2) Teorema kongruensi pada perkalian modulo

  Jika a,b,p,q adalah bilangan bulat, dengan $a \equiv p \pmod{12}$ dan $b \equiv q \pmod{12}$ maka $ab \equiv pq \pmod{12}$.

  Bukti:

  Karena $a \equiv p \pmod{12}$ dan $b \equiv q \pmod{12}$, kita tahu bahwa $12|(a - p)$ dan $12|(b - q)$. Jadi, ada bilangan bulat k dan l dengan $12k = a - p$ dan $12l = b - q$. Perhatikan bahwa $ab - pq = ab - pb + pb - pq = b(a - p) + p(b - q) = 12bk + 12pl = 12(bk + pl)$. Oleh karena itu, $12|(ab - pq)$. Sehingga $ab \equiv pq \pmod{12}$.

(3) Teorema kongruensi perpangkatan modulo

Jika a, b, dan k adalah bilangan bulat sedemikian sehingga $k > 0$ dan $a \equiv b \pmod{12}$, maka $a^k \equiv b^k \pmod{12}$.

Bukti:

Karena $a \equiv b \pmod{12}$, kita tahu bahwa $12|(a-b)$, dan karena $a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1})$, kita tahu bahwa $(a-b)|(a^k - b^k)$. Oleh karena itu, maka $12|(a^k - b^k)$. Sehingga, $a^k \equiv b^k \pmod{12}$.

Contoh:

(1) Jika sekarang pukul 05.00 AM, maka pukul berapa 6 jam kemudian?

Penyelesaian:

Cara I:

Menggunakan operasi penjumlahan diperoleh $5 + 6 = 11$.

∴ Jika sekarang pukul 05.00 AM, maka 6 jam kemudian adalah pukul 11.00 AM.

Cara II:

$5 + 6 = 11 \equiv 11 \pmod{12}$.

$\left\lfloor \frac{11}{12} \right\rfloor = 0$ (genap) karena $0 \leq \frac{11}{12} < 1$ maka jenis waktu yang digunakan tetap.

∴ Jika sekarang pukul 05.00 AM, maka 6 jam kemudian adalah pukul 11.00 AM.

(2) Jika sekarang pukul 11.00 AM, maka pukul berapa 40000 jam kemudian?

Penyelesaian:

Cara I:

$11 + 40000 = 40007 \equiv 3 \pmod{12}$.

$\left\lfloor \frac{40011}{12} \right\rfloor = 3334$ (genap) karena $3334 \leq \frac{40011}{12} < 3335$ maka jenis waktu yang digunakan tetap.

∴ Jika sekarang pukul 11.00 AM, maka 40000 jam kemudian adalah pukul 03.00 AM.

Cara II:

Menggunakan teorema kongruensi pada penjumlahan modulo, yaitu:

$40000 \equiv n \pmod{12}$

$40000 = 36000 + 4000$

$36000 \equiv 0 \pmod{12}$

$4000 \equiv 4 \pmod{12}$

Sehingga,

$40000 \equiv 0 + 4 = 4 \pmod{12}$

Jadi, $11 + 4 = 15 \equiv 3 \pmod{12}$

$\left\lfloor \frac{(11+40000)}{12} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{40011}{12} \right\rfloor = 3334$ (genap) karena $3334 \leq \frac{40011}{12} < 3335$ maka jenis waktu yang digunakan tetap.

∴ Jika sekarang pukul 11.00 AM, maka 40000 jam kemudian adalah pukul 03.00 AM.

Cara III:

Menggunakan teorema kongruensi pada perkalian modulo, yaitu:

$40000 \equiv n \pmod{12}$

$40000 = 25 \times 40 \times 40$

$25 \equiv 1 \pmod{12}$

$40 \equiv 4 \pmod{12}$

Sehingga,

$40000 \equiv 1 \times 4 \times 4 = 4 \pmod{12}$

Jadi, $11 + 4 = 15 \equiv 3 \pmod{12}$

$\left\lfloor \frac{(11+40000)}{12} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{40011}{12} \right\rfloor = 3334$ (genap) karena $3334 \leq \frac{40011}{12} < 3335$ maka jenis waktu yang digunakan tetap.

∴ Jika sekarang pukul 11.00 AM, maka 40000 jam kemudian adalah pukul 03.00 AM.

(3) Jika sekarang pukul 05.45 AM, pukul berapakah 23 jam kemudian?

Penyelesaian:

Cara I:

$5 + 23 = 28 \equiv 4 \pmod{12}$

$\left\lfloor \frac{28}{12} \right\rfloor = 2$ (genap) karena $2 \leq \frac{28}{12} < 3$ maka jenis waktu yang digunakan tetap.

∴ Jika sekarang pukul 05.45 AM, maka 23 jam kemudian adalah pukul 04.45 AM.

Cara II:

$23 \equiv 11 \pmod{12}$

$5 + 11 = 16 \equiv 4 \pmod{12}$

$\left\lfloor \frac{28}{12} \right\rfloor = 2$ (genap) karena $2 \leq \frac{28}{12} < 3$ maka jenis waktu yang digunakan tetap.

∴ Jika sekarang pukul 05.45 AM, maka 23 jam kemudian adalah pukul 04.45 AM.

(4) Jika sekarang pukul 10.30 PM, pukul berapakah 17 jam 48 menit kemudian?

Penyelesaian:

$10.30 + 17.48 = 27.78 = 28.18 \equiv 4 \pmod{12}$

$\left\lfloor \frac{28}{12} \right\rfloor = 2$ (genap) karena $2 \leq \frac{28}{12} < 3$ maka jenis waktu yang digunakan tetap.

∴ Jika sekarang pukul 10.30 PM, maka 17 jam 48 menit kemudian adalah pukul 04.18 PM.

(5) Jika sekarang pukul 09.07 AM, pukul berapakah 3^{30} jam kemudian?

Penyelesaian:

Kita mulai dengan perhitungan yang sederhana

$3^3 \equiv 3 \pmod{12}$

$3^{15} = (3^3)^5 \equiv 3^5 = 3 \pmod{12}$

Sehingga,

$3^{30} = (3^{15})^2 \equiv 3^2 = 9 \pmod{12}$

Jadi, $9 + 9 = 18 \equiv 6 \pmod{12}$

Hasil bagi bulat dari $\left\lfloor \frac{9+3^{30}}{12} \right\rfloor$ suatu hal yang tidak diinginkan karena dirasa akan kesulitan untuk menentukan penyelesaiannya tanpa menggunakan alat bantu hitung. Sehingga untuk menyederhanakan perhitungan bilangan yang besar akan digunakan aritmetika modulo 24 dalam menentukan jenis periode waktu.

(6) Arsya berangkat dari Surabaya ke Pontianak dengan menggunakan kapal laut. Setelah berlayar selama 1 hari, 22 jam kapal tiba di Pontianak. Jika kapal tiba di Pontianak hari Sabtu tanggal 18 April 2020 pukul 01.00.15 AM, hari apa dan pukul berapa kapal bertolak dari Surabaya?

Penyelesaian:

1 hari, 22 jam $= (2 \times 12) + 22 = 46$ jam

$46 \equiv 10 \pmod{12}$

Sehingga,

$01.00.15 - 10.00.00 = -08.59.45$

diperoleh, $-8 \equiv 4 \pmod{12}$. Karena hasil pengurangan sebelumnya $(-08.59.45)$ maka $04.00.00 - 00.59.45 = 3.00.15$.

$\left\lfloor \frac{(46+3)}{12} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{49}{12} \right\rfloor = 4$ (genap) karena $4 \leq \frac{49}{12} < 5$ maka jenis waktu yang digunakan tetap.

Jadi, jika kapal tiba pukul 01.00.15 AM, maka 46 jam sebelumnya adalah pukul 3.00.15 AM.

∴ Kapal berangkat dari Surabaya hari Kamis tanggal 16 April 2020 pukul 3.00.15 AM.

(7) Seorang traveler melakukan perjalanan dari Sulawesi pada hari Jumat, 10 Desember 2021 pukul 06.03.52 AM. Setelah melakukan perjalanan (termasuk istirahat) selama 79 jam 23 menit 9 detik ia memasuki kota Pasuruan. Pada hari apa dan pukul berapa ia memasuki kota Pasuruan?

Penyelesaian:

$06.03.52 + 79.23.09 = 85.26.61 = 85.27.01 \equiv 1 \pmod{12}$

$\left\lfloor \frac{85}{12} \right\rfloor = 7$ (ganjil) karena $7 \leq \frac{85}{12} < 8$ maka jenis waktu yang digunakan berubah.

Sehingga, memasuki kota Pasuruan pada pukul 01.27.01 PM.
Untuk melihat banyaknya hari yang dilalui, kita lihat bahwa perjalanan dari Sulawesi ke Pasuruan ditempuh selama 79 jam 23 menit 9 detik, karena 1 hari $= 2 \times (12$ jam), maka lama perjalanan yang ditempuh adalah $\left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor = 3$ karena $3 \leq \frac{7}{2} < 4$. Selanjutnya, kita gunakan sistem modulo 7 sebagai penentuan hari, kita tentukan bahwa $3 \equiv 3 \pmod 7$. Sehingga, 3 hari kemudian tiba di kota Pasuruan.
∴ Seorang traveler tiba di kota Pasuruan pada hari Senin, 13 Desember 2021 pukul 01.27.01 PM.

2.5. *Aritmetika Modulo 24*

Dalam sistem 24 jam kita menggunakan hitungan jam dimulai dari pukul 00.01 sampai pukul 24.00. Hal ini didasarkan pada perhitungan waktu 1 hari yang terdiri dari 24 jam, sehingga kita bisa dengan jelas membedakan pengaturan waktu pada jam siang dan malam. Oleh karena itu, penggunaan sistem kerja jam dapat direalisasikan ke dalam residu modulo 24. Bilangan yang digunakan dalam modulo 24 yaitu $Z_{24} = \{0,1,2,3,4,5,6,\dots,23\}$. Hal lain yang tidak boleh terlupakan adalah penggunaan satuan waktu menit dan detik dimana 1 jam $= 60$ menit dan 1 menit $= 60$ detik. Sehingga, bilangan yang dipakai dapat dituliskan dari 00.00 sampai 23.59 (Sembiring, 2012). Perhatikan tabel cayley di bawah ini

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
13	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
14	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
15	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
16	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
17	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
18	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
19	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
20	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
21	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
22	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
23	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

Gambar 2. Tabel Cayley untuk Operasi Penjumlahan Modulo **24**

Berdasarkan tabel cayley di atas maka modulo 24 (Z_{24}) terhadap operasi penjumlahan memenuhi sifat tertutup, memiliki elemen identitas yakni 0 (atau 00.00) dan masing-masing elemen mempunyai invers, sedangkan sifat asosiatif diadopsi dari sifat asosiatif bilangan bulat, sehingga modulo 24 (Z_{24}) terhadap operasi penjumlahan memenuhi keempat sifat grup maka $(Z_{24}, +)$ adalah grup. Jika dikaji lebih jauh, $(Z_{24}, +)$ juga merupakan grup komutatif karena untuk setiap $z_1, z_2 \in Z_{24}$ berlaku $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$. Selan itu juga, modulo 24 $(Z_{24}, +)$ adalah grup siklik karena dalam Z_{24},
$\langle 1 \rangle = \langle 7 \rangle = \langle 11 \rangle = \langle 13 \rangle = \langle 17 \rangle = \langle 19 \rangle = \langle 23 \rangle = \{0,1,2,3,4,5,6,\dots,23\} = Z_{24}$ untuk $Z_{24} = \langle a \rangle = \{n \cdot a | n \in \mathbb{Z}^+\}$ (Gallian, 2021).

Catatan:

Untuk menyederhanakan perhitungan digunakan teorema kongruensi pada penjumlahan, perkalian, dan/ atau perpangkatan modulo (Rosen, 2011), yaitu:

(1) Teorema kongruensi pada penjumlahan modulo
Jika a,b,p,q adalah bilangan bulat, dengan $a \equiv p \pmod{24}$ dan $b \equiv q \pmod{24}$ maka $a + b \equiv p + q \pmod{24}$.
Bukti:
Karena $a \equiv p \pmod{24}$ dan $b \equiv q \pmod{24}$, kita tahu bahwa $24|(a - p)$ dan $24|(b - q)$. Jadi, ada bilangan bulat k dan l dengan $24k = a - p$ dan $24l = b - q$. Perhatikan bahwa $(a + b) - (p + q) = (a - p) + (b - q) = 24k + 24l = 24(k + l)$. Oleh karena itu, $24|[(a + b) - (p + q)]$. Sehingga $a + b \equiv p + q \pmod{24}$.

(2) Teorema kongruensi pada perkalian modulo

Jika a,b,p,q adalah bilangan bulat, dengan $a \equiv p \pmod{24}$ dan $b \equiv q \pmod{24}$ maka $ab \equiv pq \pmod{24}$.

Bukti:

Karena $a \equiv p \pmod{24}$ dan $b \equiv q \pmod{24}$, kita tahu bahwa $24|(a-p)$ dan $24|(b-q)$. Jadi, ada bilangan bulat k dan l dengan $24k = a - p$ dan $24l = b - q$. Perhatikan bahwa $ab - pq = ab - pb + pb - pq = b(a-p) + p(b-q) = 24bk + 24pl = 24(bk + pl)$. Oleh karena itu, $24|(ab - pq)$. Sehingga $ab \equiv pq \pmod{24}$.

(3) Teorema kongruensi perpangkatan modulo

Jika a, b, dan k adalah bilangan bulat sedemikian sehingga $k > 0$ dan $a \equiv b \pmod{24}$, maka $a^k \equiv b^k \pmod{24}$.

Bukti:

Karena $a \equiv b \pmod{24}$, kita tahu bahwa $24|(a-b)$, dan karena $a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1})$, kita tahu bahwa $(a-b)|(a^k - b^k)$. Oleh karena itu, maka $24|(a^k - b^k)$. Sehingga, $a^k \equiv b^k \pmod{24}$.

Contoh:

(1) Jika sekarang pukul 06.00, maka pukul berapa 140 jam kemudian?

Penyelesaian:

$140 \equiv 20 \pmod{24}$

Jadi, $6 + 20 = 26 \equiv 2 \pmod{24}$

atau $6 + 140 = 146 \equiv 2 \pmod{24}$

∴ Jika sekarang pukul 06.00, maka 14 jam kemudian adalah pukul 02.00.

(2) Jika sekarang pukul 17.00, maka pukul berapa 100000 jam kemudian?

Penyelesaian:

Cara I:

Menggunakan teorema kongruensi pada penjumlahan modulo, yaitu:

$100000 \equiv n \pmod{24}$

$100000 = 96000 + 4000$

$96000 \equiv 0 \pmod{24}$

$4000 \equiv 16 \pmod{24}$

Sehingga,

$100000 \equiv 0 + 16 = 16 \pmod{24}$

Jadi, $17 + 16 = 33 \equiv 9 \pmod{24}$

∴ Jika sekarang pukul 17.00, maka 100000 jam kemudian adalah pukul 09.00.

Cara II:

Menggunakan teorema kongruensi pada perkalian modulo, yaitu:

$100000 \equiv n \pmod{12}$

$100000 = 10 \times 100 \times 100$

$10 \equiv 10 \pmod{24}$

$100 \equiv 4 \pmod{24}$

Sehingga,

$100000 \equiv 10 \times 4 \times 4 = 160 \pmod{24}$

Jadi, $17 + 160 = 177 \equiv 9 \pmod{24}$

∴ Jika sekarang pukul 17.00, maka 100000 jam kemudian adalah pukul 09.00.

(3) Jika sekarang pukul 22.30, pukul berapakah 17 jam 48 menit kemudian?

Penyelesaian:

$22.30 + 17.48 = 39.78 = 40.18 \equiv 16 \pmod{24}$

∴ Jika sekarang pukul 22.30, maka 17 jam 48 menit kemudian adalah pukul 16.18.

(4) Jika sekarang pukul 09.07, pukul berapakah 3^{30} jam kemudian?

Penyelesaian:

Kita mulai dengan perhitungan yang sederhana

$3^3 \equiv 3 \pmod{24}$
$3^{15} = (3^3)^5 \equiv 3^5 = 3 \pmod{24}$
Sehingga,
$3^{30} = (3^{15})^2 \equiv 3^2 = 9 \pmod{24}$
Jadi, $9 + 9 = 18 \equiv 18 \pmod{24}$
∴ Jika sekarang pukul 09.07, maka 3^{30} jam kemudian adalah pukul 18.07.

(5) Jika sekarang pukul 09.07, pukul berapakah 5^{578} jam kemudian?
Penyelesaian:
Kita mulai dengan perhitungan yang sederhana
$5^2 \equiv 1 \pmod{24}$
Sehingga,
$5^{578} = (5^2)^{289} \equiv 1^{289} = 1 \pmod{24}$
Jadi, $9 + 1 = 10 \equiv 10 \pmod{24}$
∴ Jika sekarang pukul 09.07, maka 5^{578} jam kemudian adalah pukul 10.07.

(6) Arsya berangkat dari Surabaya ke Pontianak dengan menggunakan kapal laut. Setelah berlayar selama 1 hari, 22 jam kapal tiba di Pontianak. Jika kapal tiba di Pontianak hari Sabtu tanggal 18 April 2020 pukul 01.00.15, hari apa dan pukul berapa kapal bertolak dari Surabaya?
Penyelesaian:
1 hari, 22 jam $= 24 + 22 = 46$ jam
$46 \equiv 22 \pmod{24}$
Sehingga,
$01.00.15 - 22.00.00 = -20.59.45$
diperoleh, $-20 \equiv 4 \pmod{24}$. Karena hasil pengurangan sebelumnya $(-20.59.45)$ maka $4.00.00 - 00.59.45 = 3.00.15$.
Jadi, jika kapal tiba pukul 01.00.15, maka 46 jam sebelumnya adalah pukul 3.00.15.
∴ Kapal berangkat dari Surabaya hari Kamis tanggal 16 April 2020 pukul 3.00.15.

(7) Seorang traveler melakukan perjalanan dari Sulawesi pada hari Jumat, 10 Desember 2021 pukul 06.03.52 AM. Setelah melakukan perjalanan (termasuk istirahat) selama 79 jam 23 menit 9 detik ia memasuki kota Pasuruan. Pada hari apa dan pukul berapa ia memasuki kota Pasuruan?
Penyelesaian:
$06.03.52 + 79.23.09 = 85.26.61 = 85.27.01 \equiv 1 \pmod{24}$
Sehingga, memasuki kota Pasuruan pada pukul 01.27.01.
Untuk melihat banyaknya hari yang dilalui, kita lihat bahwa perjalanan dari Sulawesi ke Pasuruan ditempuh selama 79 jam 23 menit 9 detik, karena 1 hari $= 24$ jam, maka lama perjalanan yang ditempuh adalah $\left\lfloor \frac{85}{24} \right\rfloor = 3$ karena $3 \leq \frac{85}{24} < 4$. Selanjutnya, kita gunakan sistem modulo 7 sebagai penentuan hari, kita tentukan bahwa $3 \equiv 3 \pmod{7}$. Sehingga, 3 hari kemudian tiba di kota Pasuruan.
∴ Seorang traveler tiba di kota Pasuruan pada hari Senin, 13 Desember 2021 pukul 01.27.01.

3. Simpulan

Penerapan grup operasi penjumlahan aritmetika modulo 12 dan modulo 24 pada sistem kerja jam secara tidak langsung diterapkan dalam kehidupan keseharian untuk membantu menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan pengaturan waktu. Terdapat persamaan dan perbedaan dalam metode perhitungan masalah pengaturan waktu pada sistem kerja 12 jam dan 24 jam. Persamaan tersebut diantaranya adalah penggunaan teorema kongruensi pada penjumlahan, perkalian, dan/ atau perpangkatan modulo. Sedangkan perbedaannya terletak pada penyertaan penggunaan fungsi *floor* pada aritmetika modulo 12 sebagai penentu jenis periode, yakni AM atau PM.

Daftar Pustaka

Gallian, J.A. (2021). *Contemporary Abstract Algebra*. Tenth edition. New York: CRC Press.

Juniarti, Sukestiyarno, Mulyono, & Dwidayati, N. (2019). *Modul Berbasis Structure Sense Materi Grup*. Cirebon: CV. Confident.

Kaisar. (2008). Aplikasi Aritmetika Modulo dalam Metode Diffie-Hellman Key Exchange. (*Online*). (https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2007-2008/Makalah/MakalahIF2153-0708-004.pdf), diakses 9 Mei 2022.

Munir, R. (2016). *Matematika Diskrit*. Edisi keenam. Bandung: Informatika.

Niven, I., Zuckerman, H. S., Montgomery, H. L. (1991). *An Introduction to the Theory of Numbers*, Fifth edition. Canada: Courier Campaniea, Inc.

Rosen, K.H. (2011). *Elementay number teory and its applications*. Sixth edition. Boston: Addison Wesley.

Sembiring, E.T.br. (2012). Penerapan Sifat-sifat Grup Penjumlahan Modulo 12 dan Modulo 24 pada Jam. *J. Gener. Kampus*. *5*(1), 76–84.

Yuniawatika. (2015). Penerapan Aritmatika Modulo dalam Budaya Primbon Jawa. *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matatematika*. 664–673.