PRISMA 6 (2023): 757-761
PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika
https://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/prisma/
ISSN 2613-9189

Kajian Jari-Jari Kelengkungan Pada Lensa Cekung

Iis Herisman[a*], Komar Baihaqi[a]

[a*]*Departemen Matematika Fakultas Sains Analitik Data , Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya*

**Alamat Surel: iis@matematika.its.ac.id, komar@matematika.its.ac.id*

Abstrak

Lensa merupakan material yang dapat memfokuskan atau menyebarkan suatu gelombang. Pada paper ini yang akan diamati untuk lensa cekung yang memiliki bentuk permukaan yang melengkung ke dalam pada kedua sisinya, dengan bagian tengah lensa lebih tipis daripada bagian luarnya. Fokus lensa akan dipengaruhi oleh salah satu faktor yaitu jari-jari kelengkungannya permukaan lensa bagian dalam pada titik puncaknya. Dengan asumsi permukaan bagian dalam lensa merupakan kurva y^2=4px dengan p≤0, yaitu kurva parabola standar dengan puncak O(0,0) terbuka kekiri. Selanjutnya akan mengkaji jari-jari kelengkungan untuk setiap titik pada kurva parabola tersebut.

Kata kunci:

Lensa cekung, permukaan lensa dalam, jari-jari kelengkungan

1. Pendahuluan

Fungsi lensa kontak mata tentunya tidak berbeda dengan kacamata. Penggunaan lensa kontak bisa menjadi pilihan alternatif untuk memperbaiki kualitas penglihatan dengan bentuknya yang kecil, tipis, dan ringkas menjadikan lensa kontak praktis digunakan. Bahan pembuat hard contact lens adalah kaca, yang diperkenalkan sekitar tahun 1887 oleh spesialis mata Jerman yang bernama Adolf Gaston Eugene Fick, sebagai penggagas lensa kontak pertama, dari bahan blown glass. Baru sekitar tahun 1936 seorang spesialis mata yang bernama William Feinbloom, mulai memperkenalkan plastik sebagai bahan pembuat soft lens.

1.1 *Latar Belakang Masalah*

Lensa kontak adalah sejenis plastik yang tipis yang berkurva direka untuk dipakai di atas permukaan kornea. Pada umumnya, jenis-jenis dari lensa itu ada tiga, yaitu lensa cembung, cekung dan lensa datar (planar). Pada makalah ini yang akan akan dikaji hanya lensa cekung saja. Permukaan reflektif Lensa adalah material yang dapat memfokuskan atau menyebarkan gelombang. Lensa cekung atau konkaf memiliki ciri-ciri umum sebagai berikut: bersifat menyebarkan cahaya dan memfokuskan atau menyebarkan cahaya. Sedangkan fokus lensa memiliki sifat-sifat dipengaruhi oleh jari-jari kelengkungan, perbandingan indeks bias lensa, serta medium lensa.

Kurva irisan kerucut parabola sederhana dengan diasumsikan bahwa titik pusat pada titik O(0,0) terbuka kekiri salah satu bentuk lensa kotak. Ketebalan suatu lensa akan semakin menipis ketika fokus lensa semakin besar/tebal, juga berlaku sebaliknya. Menurut prinsip fisika bahwa semua cahaya yang datang sejajar dengan sumbu simetri kurva parabola akan dipantulkan ke titik fokus lensa sebaliknya jika sumber cahaya berada pada titik fokus lensa dari pemantul parabolis maka cahaya yang terpantul akan membentuk sorotan cahaya yang sejajar dengan sumbu simetri. Dalam makalah ini akan ditinjau bagaimana kecekungan dari lensa kontak diasumsikan dengan kurva parabola tersebut untuk mendapatkan titik fokus dan jari-jari kelengkungan di titik pusat parabola tersebut.

To cite this article:
Herisman, I., Baihaqi, K. (2023). Kajian Jari-Jari Kelengkungan Pada Lensa Cekung. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika 6*, 757-761

1.2 *Rumusan Masalah*
Berdasarkan bentuk ketebalan lensa kontak cekung merupakan kurva parabola yang didefinisikan bahwa parabola adalah tempat kedudukan/himpunan semua titik pada bidang datar yang berjarak sama/konstan terhadap suatu garis tertentu (garis direktris) dan suatu titik (titik fokus) yang tidak berada pada garis tersebut. Berdasarkan sudut pandang maka lensa kontak dengan kecekungan bagian permukaan dalam merupakan kurva parabola dengan titik pusat O(0,0) dengan kecekungan/terbuka ke kiri, dengan persamaan y^2=4px untuk nilai p adalah negatif.

1.3 *Tujuan Makalah*

Penulisan makalah ini bertujuan akan mengkaji desain dari permukaan dalam lensa kontak bagian dalam yang diasumsikan sebagai irisan kurva datar parabola sederhana. Kurva parabola yang diberikan selanjutnya akan mencari unsur-unsur titik fokus dan persamaan kelengkungan yang merupakan salah satu faktor yang mempengaruhi ketika lensa kontak akan memfokuskan atau menyebarkan cahaya di suatu titik pada permukaan bagian dalam dari permukaan lensa kontak tersebut.

2. Metode

Pemantulan cahaya adalah proses terjadinya peristiwa peruahan arah rambat berkas cahaya yang mengenai permukaan bidang pantul ke sisi medium asalnya. Dalam bahasa sederhana, pemantulan cahaya adalah proses terpancarnya kembali cahaya dari permukaan benda yang terkena cahaya. Untuk optika geometri, yang dipelajari adalah pemantulan teratur yang terjadi pada cermin datar dan cermin lengkung seperti cermin cekung, cermin cembung, cermin ellipsoidal atau cermin parabola. Pada makalah ini yang akan dikaji desain lensa kontak yang berbentuk cermin cekung dengan permukaan bagian dalam cekung yang diasumsikan sebagai kurva parabola sederhana dengan titik pusat di O(0,0) terbuka ke kiri.

2.1 *Rancangan Penelitian*
Makalah ini merupakan kajian dari unsur-unsur parabola sederhana. Dengan persamaan kurva parabola yang sudah didapat diterapkan sebagai desain lensa kontak berbentuk cekung.

2.2 *Subjek Penelitian*
Untuk subjek makalah merupakan aplikasi irisan kerucut parabola pada geometri optik terutama dalam mendesain ketebalan lensa optik. Dalam membuat grafik dari kurva parabola dengan software geogebra, yaitu GeoGebra-Window-Installer-5-0-303-0.

2.3 *Analisis Penelitian*
Dalam analisis makalah dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mendefinisikan dan aplikasi lensa kontak khusus untuk lensa kontak cekung.
2. Mengkaji permukaan dalam dari desain lensa kontak yang merupakan persamaan parabola sederhana yang terbuka ke kiri dengan titik pusat O(0,0).
3. Mengaplikasikan turunan dalam mencari persamaan lingkaran kelengkungan dari setiap titik pada kurva parabola terutama untuk titik pusat kurva parabola tersebut
4. Menganalisa hasil penelitian dan kesimpulan.

3. Hasil dan Pembahasan

Pada bab ini, bahwa hasil pembahasan dari makalah dijadikan beberapa subbab, diantaranya irisan kerucut kurva parabola, geometri optik lensa kontak dan desain lensa kontak cekung.

3.1 *Irisan Kerucut Parabola*

Jika permukaan irisan kerucut diiris/dipotong oleh bidang datar yang miring dan memotong pada salah satu bagian kerucut (terbuka) maka irisannnya merupakan bidang datar parabola. Kurva parabola didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 3.1: Parabola adalah tempat kedudukan/himpunan semua titik pada bidang datar yang berjarak sama/konstan terhadap suatu garis tertentu (garis direktris) dan suatu titik (titik fokus) yang tidak berada pada garis tersebut.

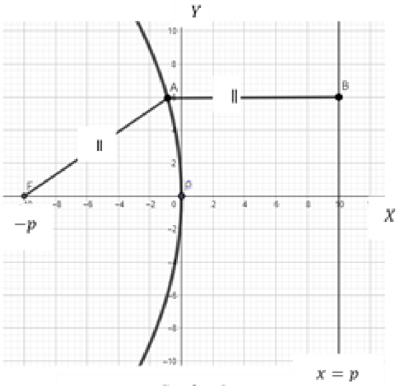
Ambil sebarang titik $A(x, y)$ pada parabola, berdasarkan definisi jarak titik $F(-p, 0)$ sebagai titik fokus sama jaraknya dari titik A ke garis direktris $x = p$ yaitu dititik $B(p, y)$ yang ditunjukkan pada gambar 1.

Jadi didapat:

$AF = AB \leftrightarrow \sqrt{(x+p)^2 + y^2} = \sqrt{(x-p)^2} \leftrightarrow$
$(x+p)^2 + y^2 = (x-p)^2 \leftrightarrow y^2 = -4px$ atau
$y^2 = 4px$ dengan p negatif.

Sifat geometri parabola tersebut adalah titik pusatnya titik $O(0,0)$ terbuka kekiri dengan titik fokus $F(-p, 0)$, garis direktris $x = p$ serta sumbu simetri adalah sumbu x

Selanjutnya untuk mendapatkan persamaan lingkaran kelengkungan untuk dititik pusat didapat dengan aplikasi turunan.



Gambar 1:
Kurva parabola $y^2 = 4px$; $p < 0$

Salah satu aplikasi turunan dalam geometri analitik adal untuk mencari kelengkungan, diantaranya dengan teorema kelengkungan suatu kurva.

Teorema 3.2: Diberikan kurva fungsi eksplisit $y = f(x)$ yang kontinu dan differensiabel. Maka kelengkungan dan jari-jari kelengkungan dari kurva masing-masing adalah

$$\mathcal{K} = \frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}} \text{ dan } \rho = \frac{\left[1+(y')^2\right]^{3/2}}{y''}.$$

Dari teorema selanjutnya dikembangkan untuk mencari persamaan lingkaran kelengkungan untuk setiap titik pada kurva parabola.

Diberikan pusat kelengkungan $C(X, Y)$ dari kurva $y = f(x)$ (pada gambar 2), didapat:

$X = x - \rho \sin \alpha$ dan $Y = y + \rho \cos \alpha$ Menurut teorema 3.2 dan dari $tg\ \alpha = y' \Rightarrow$

$sin\ \alpha = \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$ dan $cos\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}$ disubstitusikan ke persamaan diatas, didapat:

$X = x - \frac{y'\left[1+(y')^2\right]}{y''}$ dan $Y = y + \frac{1+(y')^2}{y''}$ merupakan titik pusat kelengkungan dengan dengan persamaan lingkaran kelengkungan adalah: $(x - X)^2 + (y - Y)^2 = \rho^2$.

Diberikan kurva parabola berbentuk: $y^2 = 4px$ adalah kurva parabola dengan titik puncak $(0,0)$ dan sumbu semetri adalah sumbu x dan terbuka ke kanan atau ke kiri yang tergantung pada nilai parameter p. Selanjutnya akan menentukan persamaan lingkaran untuk setiap titik termasuk titik pusat pada kurva parabola tersebut.

a. Persamaan lingkaran kelengkungan dititik sebarang (x_0, y_0) ambil $y_0 = p$ maka $x_0 = \frac{p^2}{4p} = \frac{p}{4}$

Dari $y^2 = 4px \implies 2yy' = 4p \Leftrightarrow y' = \frac{2p}{y} \Rightarrow y'|_{(\frac{p}{4},p)} = \frac{2p}{p} = 2$ dan $y' = \frac{2p}{y} = \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{4x}} = \sqrt{p}x^{-1/2} \implies$

$y'' = -\frac{\sqrt{p}}{2}x^{-3/2} \Leftrightarrow y'' = -\frac{\sqrt{p}}{2x\sqrt{x}} \implies y''|_{(\frac{p}{4},p)} = -\frac{\sqrt{p}}{2\frac{p}{4}\sqrt{\frac{p}{4}}} = -\frac{4}{p}$ kemudian disubstitusi ke persamaan lingkaran kelengkungan didapat:

$$\left(x-\left(\frac{p}{4}-\frac{2\left[1+(2)^2\right]}{-\frac{4}{p}}\right)\right)^2+\left(y-\left(p+\frac{1+(2)^2}{-\frac{4}{p}}\right)\right)^2=\frac{\left\{1+(2)^2\right\}^3}{\left(-\frac{4}{p}\right)^2}\Leftrightarrow$$

$$\left(x-\left(\frac{p}{4}-\frac{2[5]}{-\frac{4}{p}}\right)\right)^2+\left(y-\left(p+\frac{5}{-\frac{4}{p}}\right)\right)^2=\frac{\{5\}^3}{\left(-\frac{4}{p}\right)^2}\Leftrightarrow\left(x-\left(\frac{p}{4}+\frac{5p}{2}\right)\right)^2+\left(y-\left(p-\frac{5p}{4}\right)\right)^2=\frac{125p^2}{16}\Leftrightarrow$$

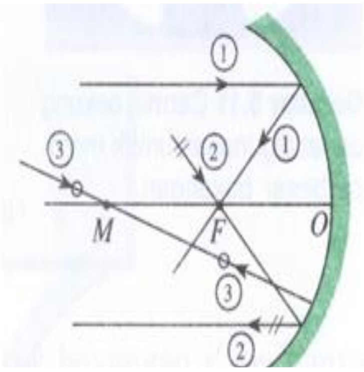
$$\left(x-\frac{11p}{4}\right)^2+\left(y+\frac{p}{4}\right)^2=\frac{125p^2}{16}.$$

b. Khusus untuk persamaan lingkaran kelengkungan di titik pusat $(0,0)$, karena sudut kemiringan kurva $y^2 = 4px$ dititik pusat $(0,0)$ adalah $\alpha = \frac{\pi}{2}$ maka dengan definisi persamaan lingkaran kelengkungan bahwa letak titik fokus ambil $F(p, 0)$ dan titik pusat lingkaran kelengkunan $M(2p, 0)$ yang terletak pada sumbu simetri dengan jari-jari $\rho = 2p$. Sehingga persamaan lingkaran kelengkungan adalah: $(x-2p)^2 + y^2 = 4p^2$, dengan p negatif.

3.2 *Geometri Optika*

Optika adalah ilmu yang mempelajari tentang cahaya atau tentang spektrum elektromagnetik. Optika dibagi atas dua bagian Optik Geometrik dan Optik Fisis. Pada makalah ini akan mengkaji optik geometri dengan lensa kontak cekung, yaitu permukaan dalam melengkung ke dalam. Cermin cekung bersifat mengumpulkan sinar (***konvergen***), artinya sinar-sinar yangsejajar yang jatuh pada permukaan cermin dipantulkan kesatu titik yang disebut titik api atau titik fokus. Titik fokus cermin ini berada di sisi depan cermin. Suatu cahaya yang berpantul pada suatu titik pada permukaan dalam cermin cekung memiliki tiga sinar istimewa, dengan sifat sebagai berikut:

1. Sinar datang sejajar sumbu utama cermin dipantulkan melaluititik fokus F.
2. Sinar datang melalui titik fokus F dipantulkan sejajar sumbuutama.
3. Sinar datang melalui titik pusat kelengkungan M dipantulkan kembali ke titik pusat lengkung tersebut.



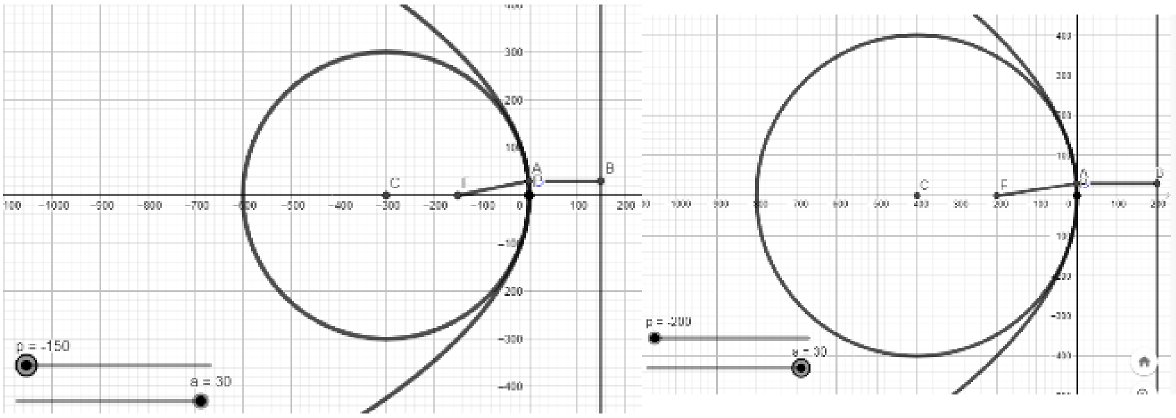
$Gambar\ 3.\ Sinar - sinar\ istimewa\ pada\ cermin\ cekung.$

Secara umum, zona lensa kontak sklera dan korneosklera dibedakan menjadi tiga zona: zona optik, zona transisi, dan zona lekat atau haptik. Lensa kontak skleradi kompensasikan dari berbagai kurva atau splines yang bergantung pada desain dan kebutuhan individu pasien.

3.3 *Desain lensa kontak*

Pada makalah ini, bahwa desain dari permukaan haptic bagian dalam diasumsikan sebagai kelengkungan di titik pusat kurva parabola yang terbuka ke kiri dengan persamaan kurva $y^2 = 4px$ dengan p negatif . Agar desain dari lensa kontak tergantung dari permukaan kulit bola mata, maka nilai p sangat besar sehingga kurva parabola diambil cukup besar. Jadi desain lensa kontak tergantung pada persamaan lingkaran kelengkungan titik pusat kurva parabola adalah $y^2 = 4px$ dengan nilai p cukup besar, karena letak titik fokus dari parabola cukup jauh berakibat kelengkungan sangat kecil.
Dengan bantuan geogebra kurva parabola $y^2 = 4px$ dengan $p = -150$ dan $p = -200$ dapat digambarkan

sebagai berikut:



$Gambar\ 5.\ Persamaan\ lingkaran\ kelengkungan\ dengan\ jari-jari\ \ 150\ dan\ 200.$

Sehingga untuk mendesain lensa kontak tergantung dari nilai p yang diharapkan dan panjang kurvanya agar sesuai dengan permukaan kulit bola mata.

4. Simpulan

Hasil dari makalah ini dapat disimpulkan bahwa:

1. Suatu lensa kontak cekung bersifat mengumpulkan sinar atau konvergen.
2. Lensa kontak sangat tergantung pada titik fokus (nilai p) dan kelengkungan.
3. Dengan asumsi lensa kontak cekung merupakan kurva parabola dengan titik pusat pada titik asal koordinat dan terbuka ke kiri.
4. Desain dari lensa kontak cekung tergantung pada bola mata yang diasumsikan sebagai persamaan lingkaran kelengkungan untuk titik pusat dari parabola.
5. Tinggi desain yang diharapkan sama dengan panjang kelengkungan untuk titik pusat kurva parabola.

Daftar Pustaka

Alonso, M., Finn, E. J. (1967). University Physics Vol. 1 Mechanics. Massachussets: Addison-Wesley

Anton, H. 1999. *Calculus, A New Horizon, 6th Edition*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

John McCleary. (1994). *Geometry from a Differentiable Viewpoint.* Cambridge University Press, Australia.

Software: GeoGebra-Window-Installer-5-0-303-0