PRISMA 6 (2023): 714-719
PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika
https://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/prisma/
ISSN 2613-9189

Estimasi Parameter *Generalized Space Time Autoregressive Integrated Moving Average (GSTARIMA) dengan Pendekatan Seemingly Unrelated Regression (SUR)*

Warih Qodri Pramesthi[a,*], Dewi Retno Sari Saputro[b]

[a,b] *Program Studi Matematika FMIPA Universitas Sebelas Maret, Jl. Ir. Sutami No.36 A, Surakarta 57126, Indonesia*

**warihqodri@student.uns.ac.id, dewiretnoss@staff.uns.ac.id*

Abstrak

Data runtun waktu merupakan data yang berturut berdasarkan waktu. Data deret waktu yang melibatkan unsur waktu dan lokasi disebut *space time*. Salah satu model *space time* adalah *space time autoregressive moving average* (*STARMA*). Pada model *STARMA* hanya dapat digunakan untuk lokasi dengan karakteristik homogen. Kondisi aktual menunjukkan suatu lokasi dengan lokasi lain memiliki karakteristik heterogen sehingga penggunaan model *STARMA* kurang fleksibel. Model *STARMA* kemudian dikembangkan menjadi model *generalized space time autoregressive moving average* (*GSTARMA*) untuk mengakomodir keheterogenan lokasi. Pada model *GSTARMA* harus memenuhi asumsi data stasioner dan harus memiliki orde *autoregressive*, *moving average* serta spasial sehingga model dikembangkan menjadi model *generalized space time autoregressive integrated moving average* (*GSTARIMA*). *Ordinary least square* (*OLS*) merupakan metode yang digunakan untuk mengestimasi parameter model *GSTARIMA*. Estimasi parameter dengan metode *OLS* memiliki kelemahan yaitu menghasilkan estimasi yang tidak efisien ketika sisaan antar lokasi tidak bebas atau berkorelasi. Oleh karena itu, digunakan pendekatan *seemingly unrelated regression* (*SUR*) untuk mengatasi kelemahan tersebut. *SUR* menggunakan metode *generalized least square* (*GLS*) untuk mengestimasi parameter model. Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji model dan mengestimasi parameter *GSTARIMA* dengan pendekatan *SUR*. Hasil penelitian menunjukkan bahwa estimasi parameter *GSTARIMA* dapat diperoleh dengan asumsi orde waktu 1 dan orde spasial 1.

Kata kunci:

Space time, GSTARIMA, OLS, SUR, GLS

© 2023 Dipublikasikan oleh Jurusan Matematika, Universitas Negeri Semarang

1. Pendahuluan

Menurut Box *et al*, (1994) data runtun waktu (*time series*) merupakan serangkaian pengamatan yang berurutan dalam waktu. Data *time series* dapat dibagi menjadi dua yaitu univariat (satu variabel pengamatan) dan multivariat (dua atau lebih variabel pengamatan). Pemodelan data multivariat dengan melibatkan unsur waktu dan lokasi disebut model *space time*. Pada tahun 1980, Preifer dan Deutsch memperkenalkan model *space time autoregressive moving average* (*STARMA*). Model *STARMA* memiliki kelemahan terkadang tidak realistis karena parameter diasumsikan untuk semua lokasi, sehingga model *STARMA* dikembangkan menjadi model *generalized space time autoregressive moving average* (*GSTARMA*). Model *GSTARMA* dianggap lebih realistis karena menganSumsikan parameter yang berbeda untuk setiap lokasi (Borovka *et al*, 2002). Model *GSTARMA* harus memenuhi asumsi kestasioneran data dan harus memiliki orde *autoregressive* dan *moving average* serta orde spasial yang ditentukan 1. Orde spasial ditentukan 1 karena orde spasial yang lebih besar dari 1 sulit diinterpretasikan dalam model. Untuk memenuhi asumsi kestasioneran data perlu dilakukan proses *differencing*, sehingga model *GSTARMA* dikembangkan menjadi model *generalized space time autoregressive integrated moving average* (*GSTARIMA*)(Min *et al*, 2010). Menurut Qomariyah *et al*., (2016) model GSTARIMA digunakan untuk data yang tidak stasioner dengan elemen *autoregressive* dan *moving average*.

To cite this article:
Pramesthi, W. Q., & Saputro, D. R. S. (2023). Estimasi Parameter *Generalized Space Time Autoregressive Integrated Moving Average* (*GSTARIMA*) dengan Pendekatan *Seemingly Unrelated Regression* (*SUR*). *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika 6*, 714-719

Metode yang dapat digunakan untuk mengestimasi parameter GSTARIMA meliputi metode *ordinary least square* (*OLS*) dan pendekatan *seemingly unrelated regression* (*SUR*). Pada estimasi parameter menggunakan metode *OLS* memiliki kelemahan yakni dapat menghasilkan estimator yang tidak efisien pada data dengan residual yang saling berkorelasi. Untuk mengatasi hal tersebut digunakan pendekatan *SUR* dengan menggunakan *generalized least square* (*GLS*) sebagai metode estimasi parameter untuk model tersebut. Nisak, (2016) melakukan penelitian pendekatan SUR pada model GSTARIMA dan penerapannya pada peramalan data curah hujan. Hasil penelitiannya menujukkan bahwa model GSTARIMA ((1)(1,12,36)-SUR dapat digunakan untuk meramalkan curah hujan musiman dasarian di Kabupaten Malang Selatan. Oleh karena itu, dalam penelitian ini dikaji model GSTARIMA-SUR dan estimasi parameternya.

2. Pembahasan

Model *GSTARIMA* merupakan pengembangan dari model *GSTARMA* dengan penambahan integrated pada model dan diasumsikan memiliki karakteristik lokasi yang heterogen. Bagian ini membahas tentang stasioneritas, identifikasi model, bobot lokasi normalisasi korelasi silang, model *GSTARIMA* dan model *SUR* serta estimasi parameter model tersebut.

2.1. *Stasioneritas*

Suatu data dapat dikatakan stasioner jika rata-rata dan variansi data tidak berubah secara sistematis dari waktu ke waktu (Wei, 2006). Identifikasi kestasioneran dalam rata-rata dapat diliat dari uji *augmented dickey-fuller* (*ADF*). Uji *ADF* dilakukan dengan melihat keberadaan *unit root* dalam model. Menurut Adam dkk., (2017) $ADF_{hit} = \frac{\frac{\sum_{t=1}^{n} Z_{t-1}Z_t}{\sum_{t=1}^{n} Z_{t-1}^2} - 1}{\sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}(Z_t - Z_{t-1})^2}{n-1}\left(\sum_{t=1}^{n} Z_{t-1}^2\right)^{-1}}}$, dengan Z_t merupakan data pengamatan ke-*t* dan *n* adalah banyaknya pengamatan. Kriteria pengambilan keputusan yang digunakan yaitu H_0 ditolak jika $ADF_{hit} \in DK$ dengan $DK = \{ADF_{hit} | ADF_{hit} < \text{nilai kritis Mackinnon}\}$. Jika data time series tidak stasioner dalam rata-rata maka perlu dilakukan *differencing*, sedangkan jika data tidak stasioner dalam variansi maka perlu dilakukan transformasi (Wei, 2006).

2.2. *Identifikasi model*

Identifikasi model dilakukan untuk menentukan orde pada model GSTARIMA. Menurut Gusnadi dkk., (2015) orde dalam model dapat ditentukan melalui nilai *akaik e's information criterion* (*AIC*) dengan rumus yang ditulis sebagai $AIC = \ln\left(\left|\hat{\Sigma}_{\mathrm{p}}\right|\right) + \frac{2K^2p}{n}$, dengan $\hat{\Sigma}_{\mathrm{p}} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \hat{\mathbf{u}}_t [\,\hat{\mathbf{u}}_t]'$ adalah matriks penduga varian-kovarian residual, $\hat{\mathbf{u}}_t$ adalah residual pada waktu ke-*t*, *n* adalah banyak pengamatan, dan *K* adalah banyak parameter pada model.

2.3. *Bobot normalisasi korelasi silang*

Penentuan bobot normalisasi korelasi silang pertama kali diperkenalkan oleh Suhartono and Atok R.M., 2006. Bobot lokasi dengan normalisasi dari besaran korelasi silang antarlokasi pada waktu yang berkaitan menimbulkan kemungkinan terjadinya hubungan antar lokasi (Suhartono & Subanar, 2007). Korelasi silang antara dua variabel atau lokasi ke-*i* dan ke-*j* pada *lag* ke-*k*, $corr[Z_i(t), Z_j(t-k)]$ ditulis sebagai $\rho_{ij}(k) = \frac{\gamma_{ij}(k)}{\sigma_i\sigma_j}, k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$ dengan dengan $\gamma_{ij}(k)$ adalah kovarians silang antara kejadian pada lokasi ke-*i* dan ke-*j* pada *lag* ke-*k*, $\sigma_i\ dan\ \sigma_j$ merupakan standar deviasi dari kejadian pada lokasi ke-*i* dan ke-*j*. Penentuan bobot lokasi normalisasi korelasi silang antar lokasi pada *lag* waktu yang bersesuaian harus memenuhi $W_{ij} = \frac{r_{ij}(k)}{\sum_{k\neq 1}|r_{ik}(k)|}\ ;\ i \neq j\ \wedge\ \sum_{i\neq j}\left|W_{ij}\right| = 1$ dengan $r_{ij}(k) = \frac{\sum_{t=k+1}^{n}[Z_i(t) - \bar{Z}_i][Z_j(t-k) - \bar{Z}_j]}{\sqrt{\left(\sum_{t=1}^{n}(Z_i(t) - \bar{Z}_i)^2\right)\left(\sum_{t=1}^{n}(Z_j(t) - \bar{Z}_j)^2\right)}}$, dengan dengan $r_{ij}(k)$ adalah nilai korelasi antara pengamatan pada lokasi ke-*i* dan ke-*j* pada lag ke-*k*, $Z_i(t)$ adalah data pengamatan pada lokasi ke-*i* waktu ke-*t*, $\bar{Z}_i$ dan $\bar{Z}_j$ adalah rata-rata data pada lokasi *i* dan ke-*j*.

2.4. *Model GSTARIMA, model SUR, dan estimasi parameter model*

a. Model *GSTARIMA*

Menurut Setiawan dkk., (2015) model GSTARIMA merupakan model umum dari GSTAR yang diperkenalkan oleh Borovka *et al*., (2002). GSTARIMA (p_{λ_k}, d, q_{v_k}) di definisikan sebagai

$$\nabla \boldsymbol{Z}_i(t) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=0}^{\lambda_k} \boldsymbol{\Phi}_{kl}^{(i)} \boldsymbol{W}^l \nabla \boldsymbol{Z}_i(t-k) - \sum_{k=1}^{q} \sum_{l=0}^{v_k} \boldsymbol{\Theta}_{kl}^{(i)} \boldsymbol{W}^l \mathrm{e}_i(t-k) + e_i(t) \quad (1)$$

dengan $\nabla \boldsymbol{Z}_i(t) = (1-\mathrm{B})^d Z_t$ adalah vektor dari data lokasi ke-*i* dan waktu ke-*t*, *d* adalah orde *differencing*, *p* adalah orde *autoregressive*, *q* adalah orde *moving average*, λ_k adalah orde spasial pada *autoregressive*, v_k adalah orde spasial pada *moving average*, $\boldsymbol{\Phi}_{kl}^{(i)}$ adalah matriks diagonal parameter pada orde *autoregressive k* dan orde spasial *l* setiap lokasi ke-*i* dengan elemen $diag(\boldsymbol{\Phi}_{kl}^{(1)}, \dots \boldsymbol{\Phi}_{kl}^{(N)})$, $\boldsymbol{\Theta}_{kl}^{(i)}$ adalah matriks diagonal parameter pada orde *moving average k* dan orde spasial *l* setiap lokasi ke-*i* dengan elemen $diag(\boldsymbol{\Theta}_{kl}^{(1)}, \dots \boldsymbol{\Theta}_{kl}^{(N)})$, $\boldsymbol{W}^l$ adalah matriks pembobot spasial, dan $e_i(t)$ adalah residu pada lokasi ke-*i* dan waktu ke-*t*.

b. Model *SUR*

Menurut Hendra Perdana, (2020) *SUR* merupakan suatu sistem persamaan yang terdiri beberapa persamaan regresi dimana residualnya tidak berkorelasi antar pengamatan dalam satu persamaan, tetapi residualnya berkorelasi antar persamaan. Alaba *et al*., (2010) melakukan suatu penelitian dengan membandingkan estimasi parameter model *SUR* dengan *OLS* dan *GLS*. Hasil penelitian tersebut menyimpulkan bahwa estimator model *SUR* dengan metode *GLS* lebih baik dari pada metode *OLS* karena standar *error OLS* lebih besar. Menurut Nisak, (2016) model *SUR* dengan *M* persamaan ditulis sebagai

$$\boldsymbol{y_i} = \boldsymbol{X_i}\boldsymbol{\beta_i} + \boldsymbol{\varepsilon_i},\ i = 1, \dots, m \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & X_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_m \end{pmatrix}$$

c. Estimasi parameter

Menurut Kurniawati dkk., (2017) estimasi parameter *GSTARIMA* dapat dilakukan dengan cara mengestimasi parameter model *GSTARI* dan *GSTIMA*. Model *GSTARI* dan model *GSTAR* pada dasarnya sama, namun pada model *GSTARI* nilai Z sudah dilakukan *differencing* sehingga tahapan untuk mengestimasi parameternya sama. Model *GSTARIMA* tanpa *integrated* dan *moving average* menjadi model *GSTAR* yang ditulis sebagai

$$\boldsymbol{Z}_i(t) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=0}^{\lambda_k} \boldsymbol{\Phi}_{kl}^{(i)} \boldsymbol{W}^l \boldsymbol{Z}_i(t-k) + e_i(t) \quad (3)$$

Menurut (Hendra Perdana, 2020) jika diketahui $\{Z(t): t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm T\}$ merupakan sebuah deret waktu dari *N* lokasi, maka model *GSTAR* dari orde waktu *p* dan orde spasial $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, *GSTAR* (*p;* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$) dalam notasi matriks ditulis sebagai

$$Z(t) = \sum_{k=1}^{p} (\boldsymbol{\Phi}_{kl}^{(i)} + \sum_{l=0}^{\lambda_k} \boldsymbol{\Phi}_{kl}^{(i)} \boldsymbol{W}^l) \boldsymbol{Z}(t-k) + \boldsymbol{e}(t) \quad (4)$$

Model GSTAR dengan orde waktu 1 dan orde spasial 1 dapat ditulis GSTAR (1,1). Model GSTAR (1,1) dalam notasi matriks ditulis sebagai

$$Z(t) = (\boldsymbol{\Phi}_{k0}^{(i)} + \boldsymbol{\Phi}_{kl}^{(i)} \boldsymbol{W}) \boldsymbol{Z}(t-k) + \boldsymbol{e}(t) \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} Z_1(t) \\ Z_2(t) \\ \vdots \\ Z_N(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{k0}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Phi}_{k0}^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{\Phi}_{k0}^{(N)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1(t-k) \\ Z_2(t-k) \\ \vdots \\ Z_N(t-k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{kl}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Phi}_{kl}^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{\Phi}_{kl}^{(N)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & w_{12} & \cdots & w_{1N} \\ w_{21} & 0 & \cdots & w_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{N1} & w_{N2} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1(t-k) \\ Z_2(t-k) \\ \vdots \\ Z_N(t-k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ \vdots \\ e_N(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Z_1(t) \\ Z_2(t) \\ \vdots \\ Z_N(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{k0}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Phi}_{k0}^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{\Phi}_{k0}^{(N)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1(t-k) \\ Z_2(t-k) \\ \vdots \\ Z_N(t-k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{kl}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Phi}_{kl}^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{\Phi}_{kl}^{(N)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} W_{12}Z_2(t-k) + \cdots + W_{1N}Z_N(t-k) \\ W_{21}Z_1(t-k) + \cdots + W_{2N}Z_N(t-k) \\ \vdots \\ W_{N1}Z_1(t-k) + \cdots + W_{NN}Z_N(t-k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ \vdots \\ e_N(t) \end{pmatrix}$$

diperoleh notasi baru $V_i(t) = \sum_{i=1}^{N} W_{ij}Z_j(t)$ sehingga

$$\begin{pmatrix} Z_1(t) \\ Z_2(t) \\ \vdots \\ Z_N(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{k0}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Phi}_{k0}^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{\Phi}_{k0}^{(N)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1(t-k) \\ Z_2(t-k) \\ \vdots \\ Z_N(t-k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{kl}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Phi}_{kl}^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{\Phi}_{kl}^{(N)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1(t-k) \\ V_2(t-k) \\ \vdots \\ V_N(t-k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ \vdots \\ e_N(t) \end{pmatrix}$$

diperoleh persamaan model regresi linear ditulis sebagai $Z_{i,t} = X_{i,t}\beta_i + \varepsilon_{i,t}$ dengan

$$Z_{i,t} = \begin{pmatrix} Z_1(1) \\ Z_1(2) \\ \vdots \\ Z_1(t) \\ \vdots \\ Z_N(1) \\ Z_N(2) \\ \vdots \\ Z_N(t) \end{pmatrix}, \beta_i = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{k0}^{(1)} \\ \boldsymbol{\Phi}_{k0}^{(2)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Phi}_{k0}^{(N)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Phi}_{kl}^{(1)} \\ \boldsymbol{\Phi}_{kl}^{(2)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Phi}_{kl}^{(N)} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ \vdots \\ e_N(t) \\ \vdots \\ e_1(t) \\ e_2(t) \\ \vdots \\ e_N(t) \end{pmatrix},$$

$$X_{i,t} = \begin{pmatrix} Z_1(t-k) & \cdots & V_1(t-k) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ Z_1(t-k) & \cdots & V_1(t-k) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_1(t-k) & \cdots & V_1(t-k) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & Z_N(t-k) & \cdots & V_N(t-k) \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & Z_N(t-k) & \cdots & V_N(t-k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & Z_N(t-k) & \cdots & V_N(t-k) \end{pmatrix}$$

diperoleh persamaan dalam bentuk matriks ditulis sebagai

$$\begin{pmatrix} Z_{1,t} \\ Z_{2,t} \\ \vdots \\ Z_{N,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{1,t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X_{2,t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & X_{N,t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{N,t} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Z} \quad = \quad \mathrm{X} \quad \beta \quad + \quad \varepsilon \tag{6}$$

Asumsi yang harus dipenuhi dalam persamaan model *SUR* adalah E($\boldsymbol{\varepsilon}$) = 0 dan E($\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}'$) = $\boldsymbol{\sigma}_{ij}\boldsymbol{I}_T$ (Greene, 2002). Struktur matriks varians-kovarians pada sistem persamaan model SUR ditulis sebagai

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}') = \begin{pmatrix} e_1e_1' & e_1e_2' & \dots & e_1e_m' \\ e_2e_1' & e_2e_2' & \dots & e_2e_m' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_me_1' & e_me_2' & \dots & e_me_m' \end{pmatrix}$$

karena E($\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}'$) = $\boldsymbol{\sigma}_{ij}\boldsymbol{I}_T$, ditulis sebagai

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}') = \begin{pmatrix} \sigma_{11}\boldsymbol{I}_T & \sigma_{12}\boldsymbol{I}_T & \dots & \sigma_{1m}\boldsymbol{I}_T \\ \sigma_{21}\boldsymbol{I}_T & \sigma_{22}\boldsymbol{I}_T & \dots & \sigma_{2m}\boldsymbol{I}_T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1}\boldsymbol{I}_T & \sigma_{m2}\boldsymbol{I}_T & \dots & \sigma_{mm}\boldsymbol{I}_T \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}') = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \cdots & \sigma_{mm} \end{pmatrix} \otimes \boldsymbol{I}_T$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}') = \boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{I}_T = \boldsymbol{\Omega}$$

Matriks $\boldsymbol{\Sigma}$ merupakan matriks varians-kovarians residual berukuran $(m \times m)$ dan $\mathbf{I}_T$ merupakan matriks identitas berukuran $(T \times T)$. Estimasi parameter model SUR dengan metode GLS memerlukan invers dari matriks varians-kovarians yang ditulis sebagai

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{I}_T$$

$$\boldsymbol{\Omega}^{-1} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \otimes \boldsymbol{I}_T \quad (7)$$

Menurut Setiawan dkk., (2016) Estimasi parameter dalam model *SUR* adalah menggunakan GLS. Metode GLS diperoleh dengan meminimumkan *generalized sum of square* $\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}$ diperoleh

$$\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{Z} - 2\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} \quad (8)$$

Berikut diuraikan perhitungan untuk memeroleh nilai minimum dari jumlah kuadrat residu

$$\frac{\partial(\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial\boldsymbol{\beta}} = -2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{Z} + \mathbf{2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{Z} \quad (9)$$

Karena $\boldsymbol{\Omega}^{-1} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \otimes \boldsymbol{I}_T$, sehingga penduga $\boldsymbol{\beta}$ untuk model GSTARIMA-SUR ditulis sebagaai

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'(\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \otimes \boldsymbol{I}_T)\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'(\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \otimes \boldsymbol{I}_T)\boldsymbol{Z} \quad (10)$$

3. Simpulan

Berdasarkan pembahasan diperoleh simpulan bahwa Estimasi parameter pada model *GSTARIMA* dengan pendekatan *SUR*. Metode *SUR* merupakan metode dengan estimasi parameter menggunakan metode *GLS* yang diperoleh dengan meminimumkan *generalized sum of square* $\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}$. Estimasi parameter untuk model *GSTARIMA* dengan pendekatan *SUR* dengan orde waktu 1 dan orde spasialnya 1 diperoleh

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'(\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \otimes \boldsymbol{I}_T)\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'(\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \otimes \boldsymbol{I}_T)\boldsymbol{Z}$$

Daftar Pustaka

Adam, I., Kusnandar, D., & Perdana, H. (2017). Penerapan Model GSTAR(1,1) untuk Data Curah Hujan. *Buletin Ilmiah Math. Stat. Dan Terapannya (Bimaster)*, *6*(03), 159–166.

Alaba, O. O., Olubusoye, E. O., & Ojo, S. O. (2010). Efficiency of Seemingly Unrelated Regression Estimator over the Ordinary Least Squares. *European Journal of Scientific Research*, *39*(1), 153–160.

Borovka, S. A., Lopuhaa, H. P., & Nurani, B. (2002). Generalized STAR model with experimental weights. In M. Stasinopoulos, & G. Touloumi (Eds.). *Proceedings of the 17th International Workshop on Statistical Modelling*, 139–147.

Box, G. E. P., Jenkins, G. M., & Reinsel, G. C. (1994). Time Series Analysis: Forecasting and Control. *Third Edition. Englewood Cliffs: Prentice Hall Time*. https://doi.org/10.2307/3150485

Greene, W. H. (2002). Econometric analysis. *Fifth Edition. New York University: Prentice-Hall.* https://doi.org/10.1007/3-7908-1599-3_5

Gusnadi, R., Rahmawati, R., & Prahutama, A. (2015). Pemodelan Generalized Space Time Autoregressive (GSTAR) Seasonal Pada Data Jumlah Wisatawan Mancanegara Empat

Kabupaten/Kota di Jawa Tengah. *Jurnal Gaussian*, *4*(4), 1017–1026.

Hendra Perdana, G. H. Y. (2020). Penerapan Gstar-Sur Pada Jumlah Penumpang Pesawat Domestik Di Bandara Indonesia. *Bimaster : Buletin Ilmiah Matematika, Statistika Dan Terapannya*, *9*(2), 275–284. https://doi.org/10.26418/bbimst.v9i2.39919

Kurniawati, E., Naomi, N. D., & Dadan, K. (2017). Model space-time dan penerapannya pada produksi kelapa sawit di PT Perkebunan Nusantara XIII. *Buletin Ilmiah Math. Stat. Dan Terapannya (Bimaster)*, *6*, 183–192.

Min, X., Hu, J., & Zhang, Z. (2010). Urban traffic network modeling and short-term traffic flow forecasting based on GSTARIMA model. *IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems, Proceedings, ITSC*, 1535–1540. https://doi.org/10.1109/ITSC.2010.5625123

Nisak, S. C. (2016). Seemingly Unrelated Regression Approach for GSTARIMA Model to Forecast Rain Fall Data in Malang Southern Region Districts. *Cauchy*, *4*(2), 57. https://doi.org/10.18860/ca.v4i2.3488

Qomariyah, L., Toharudin, T., & Soemartini. (2016). Generalized Space Time Autoregressive Integrated Moving Average (GSTARIMA) Model to Forecast Cocoa Export Volume. *Proceeding of The 2nd International Conference on Applied Statistics 2016*.

Setiawan, A., Aidi, M. N., & Sumertajaya, I. M. (2015). Modelling of Forecasting Monthly Inflation By Using Varima and Gstarima Models. *Forum Statistika Dan Komputasi*, *21*(1), 60–63.

Setiawan, Suhartono, & Prastuti, M. (2016). S-GSTAR-SUR model for seasonal spatio temporal data forecasting. *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*, *10*, 53–65.

Suhartono, & Atok R.M. (2006). Pemilihan Bobot Lokasi yang Optimal pada Model GSTAR. *Prosiding Konferensi Matematika XIII. Universitas Negeri Semarang, Semarang*.

Suhartono, S., & Subanar. (2007). Some Comments on the Theorem Providing Stationarity Condition for Gstar Models in the Paper by Borovkova Et Al. *Journal of the Indonesian Mathematical Society*, *13*(1), 115–122.

Wei, W. W. S. (2006). Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods. *United State of America : Addison-Wesley Publishing Co., USA*.