UJM 10 (1) 2021
UNNES Journal of Mathematics
http://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/ujm

BILANGAN TERHUBUNG TITIK PELANGI PADA GRAF BUNGA (W_mK_n) DAN GRAF OLEANDER (Or_n)

Dennynatalis Taha ✉, Nurwan, Salmun K. Nasib, Nisky Imansyah Yahya

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Gorontalo, Indonesia
Jl. Prof. Dr. Ing. B. J. Habibie, Kab. Bone Bolango, Kota Gorontalo, 96119

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima September 2020
Disetujui Juni 2021
Dipublikasikan Juni 2021

Keywords:
Flower Graph, Oleander Graph, Rainbow Vertex Connection, Rainbow Vertex Connection Number

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mencari bilangan terhubung titik pelangi. Misalkan $G = (V(G), E(G))$ adalah Graf Terhubung tak-trivial. Graf G dikatakan terhubung titik pelangi jika antara setiap dua titik pada suatu lintasan memiliki warna yang berbeda. $Rainbow\ Vertex\ Connection$ pada graf G yang terhubung $(rvc(G))$ merupakan minimum warna yang dibutuhkan untuk membuat graf G terhubung titik pelangi. Pada penelitian ini membahas tentang bilangan terhubung titik pelangi $(rvc(G))$ pada Graf Bunga (W_m, K_n) dan Graf Oleander (Or_n). Berdasarkan hasil dari penelitian maka diperoleh $rvc(W_m, K_n) = 2$ jika $m = 3$ dan $m = 4$ dan $n \geq 3$, $rvc(W_m, K_n) = 3$ jika $m = 5$. $rvc(Or_n) = diam - 1$ jika $n = 3, n = 4$ dan $n = 5$, $rvc(Or_n) = diam - 1$ jika $n = 6$.

Abstract

This study aims to look for rainbow vertex connection numbers. Let $G = (V(G), E(G))$ be a nontrivially connected graph. Graph G is rainbow vertex if between each of the two vertex on a track has a different color. The Rainbow Vertex Connection on the connected G graph $(rvc(G))$ is the minimum color needed to make the G graph connected to the rainbow vertex. This research discusses about rainbow vertex connection number $(rvc(G))$ on Flower Graph (W_m, K_n) and Oleander Graph (Or_n). Based on the result of the study, it is obtained $rvc(W_m, K_n) = 2$ if $m = 3$ and $m = 4$ and $n \geq 3$, $rvc(W_m, K_n) = 3$ if $m = 5$. $rvc(Or_n) = diam - 1$ if $n = 3, n = 4$ and $n = 5$, $rvc(Or_n) = diam - 1$ if $n = 6$

How to cite:

Taha, D., Nurwan., Nasib, S.K. dan Yahya, N.I. 2021. Bilangan Terhubung Titik Pelangi Pada Graf Bunga (W_m, K_n) dan Graf Oleander (Or_n). *UNNES Journal of Mathematics*. 10(1):8-13.

✉Alamat korespondensi:
E-mail: dennynatalist@gmail.com

p-ISSN 2252-6943
e-ISSN 2460-5859

PENDAHULUAN

Graf pertama kali digunakan pada tahun 1736 oleh matematikawan Swiss yang bernama Leonhard Euler untuk menyelesaikan masalah jembatan Konigsberg. Masalah jembatan konigsberg adalah seseorang tidak dapat berjalan melewati semua jembatan dengan diawali dan diakhiri di jembatan yang sama dan tepat melewati setiap jembatan satu kali. Leonhard Euler menyelesaikan masalah tersebut dengan memodelkan masalah ini ke dalam Graf (Munir, 2010).

Graf berlabel adalah Graf yang titik atau sisinya memiliki label. Jika pelabelannya adalah titik, maka pelabelan disebut dengan pelabelan titik, jika pelabelannya adalah sisi maka pelabelannya disebut pelabelan sisi. Jika pelabelannya titik dan sisi maka pelabelannya disebut dengan pelabelan titik dan sisi atau pelabelan total .

Dalam teori Graf, Metode pewarnaan Graf merupakan sebuah kasus khusus untuk pelabelan sebuah Graf. Pelabelan disini maksudnya dengan memberikan warna pada titik dan sisi dengan batas terntentu (Puspasari, Dafik and Slamin, 2014).

Pewarnaan Graf merupakan penambahan warna pada elemen sebuah Graf itu sendiri. Pewarnaan Graf sangat berjasa dalam menentukan jumlah minimum warna yang dibutuhkan untuk mewarnai suatu graf. Pewarnaan Graf terbagi atas tiga yaitu : Pewarnaan titik, Pewarnaan sisi, Pewarnaan wilayah. Konsep pewarnaan terus mengalami perkembangan, salah satunya adalah tentang bilangan terhubung titik pelangi (Harsya and Agustin, 2014).

(Chartrand *et al.*, 2008) pertama kali memperkenalkan tentang bilangan terhubung pelangi. Bilangan terhubung pelangi dapat diaplikasikan untuk mengamankan system pengiriman informasi dari satu pihak ke pihak lainnya dan bisa diaplikasikan juga untuk jaringan komunikasi.

Bilangan terhubung pelangi terbagi atas beberapa jenis, salah satunya adalah bilangan terhubung titik pelangi yang dinotasikan dengan $rvc(G)$. Bilangan terhubung titik pelangi adalah minimum warna yang dibutuhkan untuk mewarnai suatu graf G sehingga graf tersebut terhubung pelangi.

Suatu graf G dikatakan terhubung pelangi apabila terdapat paling sedikit satu lintasan titik pelangi. (Krivelevich and Yuster, 2009) memberikan batasan untuk bilangan terhubung titik pelangi yaitu :

Teorema 1.1 $diam(G) - 1 \leq rvc(G)$

Beberapa penelitian yang terkait dengan bilangan terhubung pelangi. (Kumala, 2019) menunjukkan tentang bilangan terhubung pelangi pada Graf Bunga $(W_m K_n)$ dan Graf Lemon (Le_n), (Bustan, 2016) menunjukkan tentang bilangan terhubung titik pelangi pada Graf Lingkaran Bintang $(S_m C_n)$, (Bustan, 2017) menunjukkan terhubung pelangi pada Graf Oleander (Or_n). Tujuan penelitian ini dapat menentukan bilangan terhubung titik pelangi pada graf bunga $(W_m K_n)$ dan graf oleander (Or_n).

METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literature. Adapun prosedur analisis yang digunakan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Merumuskan masalah dalam penelitian
2. Mempelajari referensi
3. Mendeskripsikan Masalah untuk menganalisis permasalahan yang telah diperoleh , adapun langkah-langkah yang dilakukan untuk menganalisis antara lain :
    a. Menggambar Graf
    b. Menentukkan pola bilangan terhubung titik pelangi
    c. Membuktikan teorema

Merumuskan kesimpulan berdasarkan hasil-hasil analisis teorema.

HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Bilangan terhubung titik pelangi pada Graf Bunga (W_m, K_n)

Definisi 3.1 Misalkan m dan n adalah bilangan bulat positif dengan m ≥ 3 dan n ≥ 3. W_m adalah graf roda dan K_n adalah graf lengkap. Graf bunga adalah graf yang diperoleh dengan cara mengambil satu salinan graf roda W_m dan menambahkan $2n$ salinan graf lengkap K_n. Kemudian untuk setiap $\in [1,2m]$ ditempelkan sisi ke-i dari W_m ke suatu sisi dari salinan graf K_n ke-i.

Misalkan $i \in [1, m], j \in [1, n-2]$ dan $j \neq s$. Himpunan titik dan himpunan sisi dari graf bunga (W_m, K_n) didefinisikan sebagai berikut.

$$V(W_m, K_n) = \{u_0\} \cup \{u_i\} \cup \{u_j^{0,1}\} \cup \{u_j^{i,i+1} | u_j^{m,m+1} = u_j^{m,1}\}$$

$$\begin{aligned} &E(W_m, K_n) \\ &= \{u_0 u_i\} \cup \{u_0 u_j^{0,i}\} \cup \{u_i u_j^{0,i}\} \\ &\cup \{u_i u_j^{i,i+1} | u_j^{m,m+1} = u_j^{m,1}\} \cup \{u_i u_{i+1} | u_{m+1} = u_1\} \\ &\cup \{u_{i+1} | u_{m+1} = u_1, u_j^{m,m+1} = u_j^{m,1}\} \cup \{u_j^{0,i} u_s^{0,i}\} \\ &\cup \{u_j^{i,i+1} u_s^{i,i+1} | u_j^{m,m+1} = u_j^{m,1}, u_s^{m,m+1} = u_s^{m,1}\}. \end{aligned}$$

Teorema 3.1 *Misalkan m dan n adalah bilangan bulat positif dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 3$. Bilangan terhubung titik pelangi untuk Graf Bunga (W_m, K_n) adalah*

$$rvc(W_m, K_n) \begin{cases} 2, & \text{Jika } m = 3, m = 4 \text{ dan } n \geq 3 \\ 3, & \text{Jika } m = 5 \quad \text{dan } n \geq 3. \end{cases}$$

Bukti. □

Pembuktian Teorema 3.1 dibagi menjadi dua kasus :

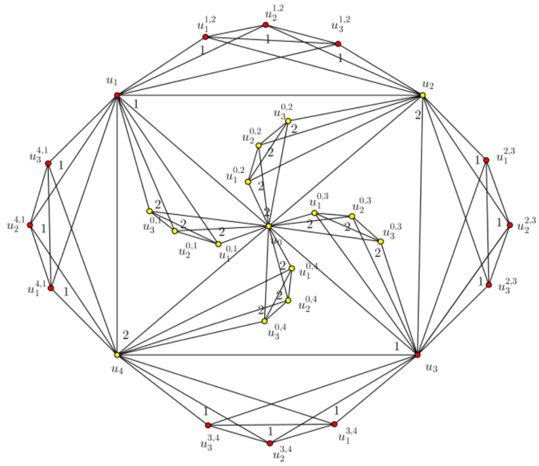
Kasus 1. $rvc(W_m, K_n) = 2$ jika $m = 3, m = 4$ dan $n \geq 3$.

Diketahui $diam = 3$. Berdasarkan Teorema 1.1 $rvc(G) \geq diam - 1 = 3 - 1 = 2$.

Akan ditunjukan $rvc(W_m, K_n) = 2$.

Misalkan $i \in [1-m], u_j^{i,i+1} | u_j^{m,m+1} = u_j^{m,1}$ dan $j \in [1-(n-2)]$. Didefinisikan pewarnaan $c: V(W_m, K_n) \to [1,2]$ sebagai berikut.

$$(c(v)) = \begin{cases} u_i = (i+1)\, mod 2 + 1 \\ u_j^{i,i+1} = 1 \\ u_0 = u_j^{0,i} = 2 \end{cases}$$



Kasus 2. $rvc(W_m, K_n) = 3$ jika $m = 5$ dan $n \geq 3$.

Diketahui $diam = 3$. Berdasarkan Teorema 1.1 $rvc(G) \geq diam - 1 = 3 - 1 = 2$. Akan ditunjukan $rvc(W_m, K_n) = 2$.

Andaikan terdapat pewarnaan $rvc(W_m, K_n)$ dengan 2 warna, maka terdapat c^* suatu 2 pewarnaan titik pelangi yang didefinisikan dengan $c^*: V(W_m, K_n) \to [1,2]$.

Misalkan $i \in [1-m], u_j^{i,i+1} | u_j^{m,m+1} = u_j^{m,1}$ dan $j \in [1-(n-2)]$. Didefinisikan pewarnaan $c^*: V(W_m, K_n) \to [1,2]$ sebagai berikut.

$$(c^*(v)) = \begin{cases} u_i = (i+1) mod\ 2 + 1 \\ u_0 = u_j^{0,i} = u_j^{i,i+1} = 1 \end{cases}$$

Perhatikan, titik u_m tidak dapat diwarnai dengan warna [1,2]. Jika u_m diberi warna 1 maka terdapat lintasan titik yang tidak pelangi seperti yang ada pada tabel 1.

Tabel 1. Tabel lintasan titik yang tidak pelangi m=5 warna 1

Kasus	Kondisi	Lintasan yang Tidak Pelangi

1	$i = m, k = 1$ $j \in [1-(n-2)]$	$u_j^{i-1,i}, u_i, u_k, u_j^{k,k+1}$ $u_j^{i-1,i}, u_i, u_k, u_{k+1}$ $u_j^{i-1,i}, u_i, u_k, u_j^{0,k}$ $u_{i-1}, u_i, u_k, u_j^{k,k+1}$ $u_j^{k,k+1}, u_k, u_i, u_j^{0,i}$
2	$i = m, k \in [1-(m-2)]$ $j \in [1-(n-2)]$	$u_j^{i-1,i}, u_i, u_0, u_j^{0,k}$ $u_j^{i-1,i}, u_i, u_0, u_j^{0,k+2}$

Jika u_m diberi warna 1 maka terdapat lintasan titik yang tidak pelangi seperti yang ada pada tabel 2.

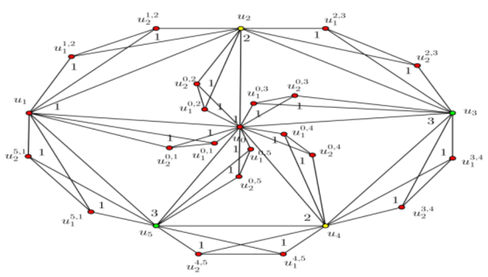
Tabel 2. Tabel lintasan titik yang tidak Pelangi m=5 warna 2

Kasus	Kondisi	Lintasan yang Tidak Pelangi
1	$i = m, u_j^{m,m+1} = u_j^{m,1}, k = 4$ $j \in [1-(n-2)]$	$u_j^{k-1,k}, u_k, u_i, u_j^{i,i+1}$ $u_j^{k-1,k}, u_k, u_i, u_{i+1}$ $u_j^{k-1,k}, u_k, u_i, u_j^{0,i}$ $u_j^{i,i+1}, u_i, u_k, u_j^{0,k}$ $u_j^{i,i+1}, u_i, u_k, u_{k-1}$

Karena Graf Bunga (W_m, K_n) untuk $m = 5$ tidak berlaku 2 pewarnaan titik pelangi. Maka diperoleh

$$rvc(W_m, K_n) \geq 3 = diam$$

Selanjutnya akan dibuktikan $rvc(W_m, K_n) = 3$ untuk $m = 5$, dengan mendefinisikan 3 pewarnaan titik pelangi pada Graf bunga (W_m, K_n)untuk $m = 5$ seperti yang ada pada gambar 2.



Gambar 2. Contoh Pewarnaan Graf (W_5, K_4)

3.2 Bilangan terhubung titik pelangi pada Graf Oleander (Or_n)

Definisi 3.2 Graf Oleander, dinotasikan dengan Or_n adalah graf yang diperoleh dari graf matahari dengan menambahkan sisi-sisi menggunakan aturan sebagai berikut.

(i). $v_{i+1}v_i$ untuk $1 \leq i \leq n-1 \cup u_1v_n$.
(ii). $u_{i+2}v_i$ untuk $1 \leq i \leq n-2$.
(iii). $u_{i-n+2}v_i$ untuk $n-1 \leq i \leq n$.

Diameter $(diam)$ graf oleander adalah $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Graf Oleander memiliki $2n$ sisi dan $4n$ titik.

Teorema 3.2 *Misalkan n adalah bilangan bulat positif dengan $n \geq 3$. Bilangan terhubung titik pelangi untuk Graf Oleander (Or_n) adalah*

$$rvc(Or_n)\begin{cases} diam - 1, Jika\ n = 3, n = 4 \text{ dan } n = 5 \\ diam - 1, \quad Jika\ n = 6 \end{cases}$$

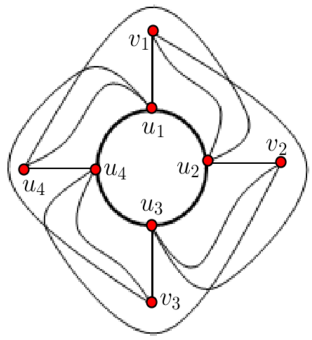
Bukti.

Pembuktian Teorema 3.2 dibagi menjadi dua kasus :

Kasus 1. $rvc(Or_n) = diam - 1$ jika $n = 3, n = 4$ dan $n = 5$.

Diketahui $diam = 2$. Berdasarkan teorema 1.1 $rvc(G) \geq diam - 1 = 2 - 1 = 1$. Akan ditunjukkan $rvc(Or_n) = 1$.

Didefinisikan pewarnaan dengan memisalkan $u_iv_i = 1$ untuk $i \in [1-n]$. Agar terbentuk bilangan terhubung titik pelangi pada graf oleander Or_n untuk $n = 3, n = 4$ dan $n = 5$. Dimana setiap antara dua titik Or_3, Or_4 dan Or_5 terdapat lintasan titik pelangi. Misalnya ambil titik u_1 dan u_3, sehingga lintasan titik $u_1 - u_3$ melewati titik u_2 dimana $c(u_2) = 1$, sedangkan untuk lintasan titik $v_1 - v_3$ melewati titik u_3 dimana $c(u_3) = 1$. Sehingga terbukti $rvc(Or_n) = 1$. Selanjutnya diberikan contoh pewarnaan pada gambar 3

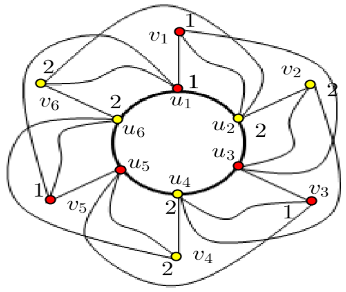


Gambar 3. Contoh Pewarnaan Graf (Or_4)

Kasus 2. $rvc(Or_n) = diam - 1$ jika $n = 6$.

Diketahui $diam(Or_n) = 3$. Berdasarkan teorema 1.1 $rvc(G) \geq diam - 1 = 3 - 1 = 2$. Akan ditunjukkan $rvc(Or_6) = 2$. Dedifinisikan pewarnaan dengan memisalkan $i \in [1 - n]$

$$\big(c(v)\big) = \{u_i = v_i = \big(i + (diam - 2)\big)\big(mod(diam - 1)\big) + 1\}$$



Gambar 3. Contoh Pewarnaan Graf Or_6

PENUTUP

Berdasarkan hasil dan pembahasan, dapat ditarik kesimpulan bahwa :

1. Untuk mengetahui Bilangan terhubung titik pelangi pada graf bunga (W_m, K_n) dapat menggunakan teorema 3.1 sebagai berikut

Teorema 3.1 *Misalkan m dan n adalah bilangan bulat positif dengan* $m \geq 3$ *dan* $n \geq 3$. *Bilangan terhubung titik pelangi untuk Graf Bunga* (W_m, K_n) *adalah*

$$rvc(W_m, K_n\}\begin{cases} 2, & \text{Jika } m = 3, m = 4 \text{ dan } n \geq 3 \\ 3, & \text{Jika } m = 5 \quad \text{dan } n \geq 3. \end{cases}$$

2. Untuk bilangan terhubung titik pelangi pada graf oleander (Or_n) dapat menggunakan teorema 3.2 sebagai berikut

Teorema 3.2 *Misalkan n adalah bilangan bulat positif dengan* $n \geq 3$. *Bilangan terhubung titik pelangi untuk Graf Oleander* (Or_n) *adalah*

$$\boldsymbol{rvc(Or_n)}\begin{cases} \boldsymbol{diam - 1, Jika\ n = 3, n = 4 \text{ dan } n = 5} \\ \quad \boldsymbol{diam - 1, \quad Jika\ n = 6} \end{cases}$$

UCAPAN TERIMAKASIH

Ucapan terimakasih umumnya ditempatkan setelah simpulan. Berisi ucapan terimakasih kepada lembaga pemberi dana, dan atau individu yang telah membantu dalam pelaksanaan penelitian dan penulisan manuskrip.

Ketentuan umum penulisan daftar pustaka: (1) Rujukan yang dicantumkan dalam daftar pustaka hanyalah rujukan yang benar-benar dikutip dalam manuskrip. (2) Untuk artikel hasil penelitian, daftar pustaka dirujuk dari sekitar 10-15 artikel jurnal ilmiah. Sedangkan artikel non penelitian sekurang-kurangnya telah merujuk 15 artikel ilmiah. (3) Kemutakhiran jurnal ilmiah yang dirujuk harus diperhatikan, sekurang-kurangnya merupakan hasil publikasi yang relevan dalam 10 tahun terakhir. (4) Daftar pustaka disusun secara alfabetis berdasarkan urutan abjad nama penulis. (5) Ketentuan nama penulis: nama yang ditampilkan adalah nama akhir (nama keluarga) penulis diikuti dengan singkatan nama awal (dan tengah jika ada). Jika penulisnya lebih dari satu orang, maka cara penulisannya sama. (6) Penulisan judul rujukan diawali dengan huruf kapital hanya pada awal kalimat. (7) Setiap penulisan nama, tahun, judul artikel dan seterusnya diakhiri dengan titik (.) sebelum dilanjutkan kata berikutnya. Khusus penulisan volume (nomor) jurnal diberi tanda titik dua (:) tanpa jarak spasi. Contoh-contoh penulisan dapat dilihat pada penjelasan setiap jenis pustaka yang layak dirujuk.

DAFTAR PUSTAKA

Bustan, A. W. (2016) ‘Bilangan terhubung titik pelangi untuk graf lingkaran bintang’, *Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 10(2).

Bustan, A. W. (2017) ‘Bilangan Terhubung Pelangi untuk graf Oleander’, *Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 2(1).

Chartrand, G. *et al.* (2008) 'Rainbow connection in graphs', 133(1), pp. 85–98.

Hars ya, A. Y. and Agustin, I. H. (2014) 'Pewarnaan Titik Pada Operasi Graf Sikel', *Journal University Of Jember*, 1(1).

Krivelevich, M. and Yuster, R. (2009) 'of a Graph Is (at Most) Reciprocal to Its Minimum Degree', pp. 185–191. doi: 10.1002/jgt.

Kumala, I. S. (2019) 'Bilangan Terhubung Pelangi pada Graf Bunga dan Graf lemon', *Matematika dan Pendidikan Matematika*, 4(1), pp. 39–48.

Munir, R. (2010) *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika Bandung.

Puspasari, D. ., Dafik and Slamin (2014) 'Pewarnaan Titik Pada Graf Khusus Operasi dan Aplikasinya', in *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika*.