



ANALISIS MODEL *PREDATOR-PREY* DENGAN DINAMIKA POPULASI REKRUTMEN-*DEATH*, PERLINDUNGAN *PREY* DAN FUNGSI RESPON HOLLING TIPE III

Teta Resti Anggraeni✉, Muhammad Kharis

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Indonesia
Gedung D7 Lt. 1, Kampus Sekaran Gunungpati, Semarang 50229

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima Oktober 2021
Disetujui November 2021
Dipublikasikan November 2021

Keywords:
Predator-Prey Model, Stability, Holling Type III

Abstrak

Salah satu interaksi dalam ekosistem adalah interaksi antara pemangsa dan mangsa atau disebut juga dengan interaksi *predator-prey*. Dalam matematika, interaksi tersebut dapat dibangun menjadi model Lotka-Volterra. Penelitian ini membahas model *predator-prey* yang terdiri dari dua spesies. Tujuan penelitian ini adalah menganalisis titik kestabilan model yang dilakukan secara analitik dan numerik menggunakan Maple. Diasumsikan model tersebut terjadi pada populasi rusa dan serigala. Perbedaan yang mendasar antara penelitian ini dengan penelitian sebelumnya adalah pertumbuhan *prey* yang mengikuti pola pertumbuhan rekrutmen. Metode yang digunakan adalah kajian pustaka. Tahapan yang dilakukan adalah menentukan masalah, melakukan studi pustaka, melakukan analisis dan pemecahan masalah, dan penarikan kesimpulan. Dari hasil analisis diperoleh dua titik ekuilibrium yang akan stabil pada kondisi dan syarat tertentu. Hasil simulasi numerik menunjukkan sifat yang sama dengan hasil analisa pada titik ekuilibrium.

Abstract

One of the interactions in ecosystem is the interaction between predators and prey or also known as predator-prey interactions. In mathematics, this interaction can be built into a Lotka-Volterra model. This paper discusses a predator-prey model consisting of two species. The purpose of this study is to analyze the equilibrium point of the model analytically and numerically using Maple. It is assumed that the model occurs in deer and wolf populations. The basic difference between this study and the previous one is that prey growth follows the recruitment growth pattern. The method used is a literature review. The steps taken are determining the problem, conducting a literature study, analyzing, and solving problems, and drawing. From the result of the analysis obtained two equilibrium points which will stable on the certain conditions. The numerical simulation shows the same properties as the result of the analysis.

How to cite:

Anggraeni, T. R. & Kharis, M. 2021. Analisis Model Predator-Prey dengan Dinamika Populasi Rekrutmen-Death, Perlindungan Prey dan Fungsi Respon Holling Tipe III. *UNNES Journal of Mathematics*. 7(2):56-65.

PENDAHULUAN

Lingkungan hidup adalah segala sesuatu yang berada di sekeliling makhluk hidup yang mempengaruhi kehidupannya (Effendi *et al.*, 2018). Lingkungan hidup terdiri dari komponen biotik dan komponen abiotik (Roziaty *et al.*, 2017). Komponen biotik adalah segala sesuatu yang bernyawa seperti tumbuhan, hewan, manusia, dan mikroorganisme. Sedangkan komponen abiotik adalah segala yang tidak bernyawa seperti tanah, udara, air, iklim, kelembaban, cahaya, dan bunyi (Windiani, 2010). Makhluk hidup berinteraksi satu dengan yang lain dengan lingkungan abiotik dan mempengaruhi proses pertumbuhan dan perkembangan masing-masing organisme. Oleh sebab itu, maka setiap organisme atau makhluk hidup dipengaruhi oleh faktor biotik dan abiotik dan tidak hanya secara kebetulan hidup dalam suatu lingkungan. Dengan kata lain, makhluk hidup dibentuk oleh lingkungan yang ada disekitarnya dan dapat berubah-ubah untuk merespons adanya perubahan lingkungan yang ada disekitarnya (Sembel, 2015).

Ekosistem merupakan suatu sistem ekologi yang terbentuk oleh hubungan timbal-balik antara makhluk hidup dengan lingkungannya (Jayanti, 2020). Ekosistem terdiri dari lingkungan fisik maupun organisme yang hidup disitu (Febrianto, 2016). Di dalam ekosistem terjadi banyak sekali interaksi. Interaksi antar spesies yang terjadi dalam suatu ekosistem menyebabkan keadaan spesies dari suatu populasi dapat berubah. Interaksi tersebut dapat memberikan dampak positif, negatif atau bahkan tidak berpengaruh terhadap spesies-spesies yang berinteraksi (Sidik *et al.*, 2017). Salah satu interaksi dalam ekosistem adalah interaksi antara pemangsa dan mangsa atau disebut juga dengan interaksi *predator-prey*. Interaksi antar spesies pada *predator-prey* merupakan salah satu model yang sangat penting, menarik dan menantang (Pusawidjayanti *et al.*, 2015). Interaksi antara *predator* dan *prey* dapat dimodelkan secara matematis menjadi model *predator-prey* (Taufiq & Agustito, 2018).

Model *predator-prey* pertama kali dikenalkan oleh Lotka pada 1925 dan Volterra pada 1927, model ini disebut juga dengan model Lotka-Volterra (Boyce & DiPrima, 2012). Model ini sangat populer sehingga banyak peneliti yang kemudian mempelajari, mengembangkan dan memodifikasi model dengan tujuan agar bersesuaian dengan kondisi sebenarnya di alam. Model ini membahas

tentang dua spesies yang saling berinteraksi, dimana salah satu darinya memangsa yang lainnya dengan tujuan untuk bertahan hidup (Panigoro, 2014). Pada model Lotka-Volterra, waktu yang diperlukan mangsa untuk mencari makanan dan menangani makanannya tidak diperhatikan. Kenyataan di ekosistem, interaksi antara mangsa dan pemangsa sering rumit ketika terjadi serangan mangsa oleh pemangsa, sehingga secara realistik pemangsa memerlukan waktu untuk mencari dan menerima makanannya (Mortoja *et al.*, 2018). Oleh karena itu, model Lotka-Volterra dimodifikasi dengan diberikan asumsi tambahan berupa fungsi respon Holling yang mempertimbangkan waktu pemangsa dalam mencari dan menangani mangsanya (Ningrumet *al.*, 2019).

Fungsi respon diperkenalkan oleh Holling pada tahun 1959 sehingga umum disebut sebagai fungsi respon Holling (Hunsicker *et al.*, 2011). Fungsi respon menggambarkan hubungan antara tingkat konsumsi individu dan kepadatan makanan. Dalam dinamika populasi, Holling mengusulkan bahwa terdapat tiga jenis fungsi respon, yaitu Holling tipe I, Holling tipe II, dan Holling tipe III (Mortoja *et al.*, 2018). Fungsi respon Holling I terjadi pada model matematika dengan *predator* yang bersifat pasif seperti laba-laba. Fungsi respon Holling II terjadi pada model matematika dengan *predator* yang bersifat aktif dan *predator* membutuhkan waktu dalam mencerna *prey* (Ulya *et al.*, 2019). Fungsi respon Holling III menggambarkan ketika kepadatan *prey* rendah, *predator* cenderung akan mencari alternatif mangsa selain spesies mangsa tersebut (Didiharyono, 2016).

Model Lotka-Volterra telah dikembangkan oleh banyak ilmuwan dalam penelitiannya. Dalam jurnal yang ditulis oleh Xiao & Ruan (2001), Liu & Chen (2003), serta Tian & Xu (2011) diberikan penambahan fungsi respon Holling tipe II pada interaksi antara *prey* dan *predator*. Agarwal & Pathak (2013) membahas pengaruh panen terhadap dinamika model *predator-prey* dengan fungsi respon Holling tipe III. Kemudian Yue (2016) membahas model *predator-prey* Leslie-Gower yang dimodifikasi dengan skema Holling tipe II dan tempat perlindungan mangsa. Penelitian lain yang ditulis oleh Chakraborty & Bairagi (2019) mengkaji tentang dinamika interaksi difusif *prey-predator* dengan perlindungan *prey* dan fungsi respon tipe III. Disebutkan bahwa dalam ekosistem alami, *prey* cenderung mencoba menjauhi *predator* sehingga kecepatan

prey dalam melarikan diri dapat dianggap sama dengan kecepatan penyebaran *predator*. Sama halnya dengan *predator* yang cenderung untuk mendekati *prey*, kecepatan *predator* dalam mengejar *prey* dapat dianggap sebanding dengan kecepatan penyebaran *prey*.

Berdasarkan latar belakang di atas, dalam penelitian ini, penulis membangun model *predator-prey* dengan perlindungan *prey* menggunakan fungsi respon Holling tipe III kemudian menganalisis kestabilan dari model tersebut. Penulis mengasumsikan model tersebut terjadi pada populasi rusa dan serigala. Seperti yang kita ketahui, rusa merupakan salah satu hewan yang populasinya saat ini semakin menurun. Manfaat yang dimiliki rusa menyebabkan perburuan tidak terkendali, sehingga populasi rusa di alam mengalami penurunan. Selain itu, rusaknya habitat di alam baik akibat kegiatan perburuan maupun rusak secara alami, menjadi faktor penting yang mengancam keberlangsungan hidup rusa untuk menjaga populasi di alam tetap terjaga maka dilakukan upaya penangkaran (Suharto *et al.*, 2019). Dipilihnya interaksi antara rusa dan serigala ini karena perilaku serigala yang cenderung akan mencari mangsa lain ketika populasi rusa mulai punah. Hal tersebut sesuai dengan fungsi respon Holling tipe III.

Perbedaan yang mendasar antara penelitian ini dengan penelitian sebelumnya adalah asumsi pada pertumbuhan *prey*. Pada penelitian ini diasumsikan pertumbuhan *prey* mengikuti pola pertumbuhan rekrutmen sedangkan pada penelitian-penelitian sebelumnya menggunakan asumsi pertumbuhan logistik. Asumsi menggunakan pola pertumbuhan rekrutmen ini sesuai dengan populasi rusa yang berada di kawasan penangkaran yang kemudian di lepas ke alam bebas.

METODE

Penelitian ini dilakukan untuk menyusun kembali model *predator-prey* dan menganalisis titik kesetimbangan model. Metode yang digunakan adalah kajian pustaka, yaitu dengan mencari bahan pustaka yang berkaitan dengan topik yang akan dikaji. Tahapan yang dilakukan dalam penelitian yaitu: (1) menentukan masalah, (2) merumuskan masalah, (3) melakukan studi pustaka, (4) melakukan analisis dan pemecahan masalah, (5) penarikan kesimpulan.

Dalam analisis dan pemecahan masalah, langkah pencariannya adalah sebagai berikut: (1) menurunkan model matematika *predator-prey* dengan dinamika populasi rekrutmen-*death*, perlindungan *prey* dan fungsi respon Holling tipe III, (2) menentukan titik ekuilibrium, (3) menurunkan persamaan karakteristik dan nilai eigen dari matriks Jacobian sistem yang dihitung pada setiap titik ekuilibrium, (4) menganalisis kestabilan dari titik ekuilibrium yang diperoleh, (5) melakukan simulasi numerik menggunakan bantuan *software* Maple.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Model matematika *predator-prey* terdiri dari populasi mangsa (*prey*) dan populasi pemangsa (*predator*). Adapun beberapa asumsi yang digunakan dalam membentuk model matematika *predator-prey* dengan dinamika populasi rekrutmen-*death*, perlindungan *prey*, dan fungsi respon Holling tipe III adalah sebagai berikut. (1) Tanpa adanya interaksi antara *predator* dan *prey*, penambahan atau pengurangan *prey* (*U*) terjadi karena rekrutmen dan kematian, (2) *predator* (*V*) mengikuti fungsi respon Holling tipe III, (3) *predator* memiliki tingkat kematian secara alami, (4) terdapat perlindungan *prey* dari predasi oleh *predator*, yang diwakili oleh tingkat perlindungan *prey* yang konstan.

Model matematika *predator-prey* dengan dinamika populasi rekrutmen-*death*, perlindungan *prey*, dan fungsi respon Holling tipe III dapat dinyatakan dalam sistem persamaan diferensial dengan parameter-parameter yang dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Daftar Parameter-parameter dalam Model

Parameter	Keterangan	Syarat
<i>U</i>	Populasi prey pada saat <i>t</i>	<i>U</i> > 0
<i>V</i>	Populasi predator pada saat <i>t</i>	<i>V</i> > 0
<i>A</i>	Laju rekrutmen populasi prey	<i>A</i> > 0
<i>μ</i>	Laju kematian alami populasi prey	<i>μ</i> > 0
<i>c</i>	Tingkat kematian predator	<i>c</i> > 0
<i>e</i>	Faktor konversi yang menunjukkan jumlah predator yang baru lahir untuk setiap prey yang ditangkap	<i>e</i> > 0

$\frac{\alpha U^2}{\beta^2 + U^2}$	Fungsi respon Holling tipe III	$\alpha, \beta > 0$
m	Tingkat perlindungan prey yang menyebabkan $(1-m)U$ dari prey tersedia untuk predator	$0 \leq m < 1$

Dari parameter-parameter pada Tabel 1, model matematika predator-prey dapat dinyatakan ke dalam bentuk persamaan diferensial sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= A - \mu U - \frac{\alpha(1-m)^2 U^2 V}{\beta^2 + (1-m)^2 U^2} \\ \frac{dV}{dt} &= -cV + \frac{\alpha(1-m)^2 U^2 V}{\beta^2 + (1-m)^2 U^2} \end{aligned} \quad (1)$$

Titik ekuilibrium diperoleh dengan membuat ruas kiri pada sistem persamaan (1) bernilai nol, sehingga diperoleh sistem persamaan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} A - \mu U - \frac{\alpha(1-m)^2 U^2 V}{\beta^2 + (1-m)^2 U^2} &= 0 \\ -cV + \frac{\alpha(1-m)^2 U^2 V}{\beta^2 + (1-m)^2 U^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Dari sistem persamaan (2) diperoleh dua titik ekuilibrium, yaitu $E_1\left(\frac{A}{\mu}, 0\right)$ dan $E_2\left(\frac{\beta}{(1-m)}\sqrt{\frac{c}{e\alpha-c}}, \frac{e\left[A(1-m)-\mu\beta\sqrt{\frac{c}{e\alpha-c}}\right]}{(1-m)c}\right)$. Titik E_1 ada jika $e\alpha > c$, sedangkan titik E_2 ada jika $e\alpha > c$ dan $A(1-m) > \mu\beta\sqrt{\frac{c}{e\alpha-c}}$.

Analisa kestabilan titik ekuilibrium dilakukan pada sistem linear hasil linearisasi sistem (1). Pelinearan sistem (1) dilakukan dengan menggunakan matriks Jacobian berordo 2×2 , sehingga diperoleh matriks Jacobian sebagai berikut.

$$J = \begin{bmatrix} -\mu - \frac{2\alpha\beta^2(1-m)^2 UV}{(\beta^2+(1-m)^2 U^2)^2} & -\frac{\alpha(1-m)^2 U^2}{\beta^2+(1-m)^2 U^2} \\ \frac{2e\alpha\beta^2(1-m)^2 UV}{(\beta^2+(1-m)^2 U^2)^2} & -c + \frac{\alpha(1-m)^2 U^2}{\beta^2+(1-m)^2 U^2} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Kestabilan titik ekuilibrium E_1 diperoleh dengan mensubstitusikan $E_1\left(\frac{A}{\mu}, 0\right)$ ke suku-suku matriks (3) dan diperoleh matriks Jacobian $J(E_1)$ sebagai berikut.

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -\mu & -\frac{\alpha(1-m)^2\left(\frac{A^2}{\mu^2}\right)}{\beta^2+(1-m)^2\left(\frac{A^2}{\mu^2}\right)} \\ 0 & -c + \frac{\alpha(1-m)^2\left(\frac{A^2}{\mu^2}\right)}{\beta^2+(1-m)^2\left(\frac{A^2}{\mu^2}\right)} \end{bmatrix}$$

Diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = -\mu < 0$ dan $\lambda_2 = \frac{e\alpha(1-m)^2 A^2}{\beta^2 \mu^2 + (1-m)^2 A^2} - c$. Jelas $\lambda_1 < 0$ sedangkan $\lambda_2 > 0$ apabila $(1-m) > \mu\beta\sqrt{\frac{c}{e\alpha-c}}$ dan $\lambda_2 < 0$ apabila $(1-m) < \mu\beta\sqrt{\frac{c}{e\alpha-c}}$.

Teorema 1.

Misalkan $E_1(U, V) = \left(\frac{A}{\mu}, 0\right)$ merupakan titik ekuilibrium sistem (1) maka

1. Titik E_1 tidak stabil (*saddle point*) apabila $(1-m) > \mu\beta\sqrt{\frac{c}{e\alpha-c}}$.
2. Titik E_1 stabil asimtotik lokal (*stable node point*) apabila $(1-m) < \mu\beta\sqrt{\frac{c}{e\alpha-c}}$.

Selanjutnya dicari kestabilan untuk titik E_2 . Titik ekuilibrium E_2 ada jika $e\alpha > c$ dan $A(1-m) < \mu\beta\sqrt{\frac{c}{e\alpha-c}}$. Untuk menganalisis kestabilan titik ekuilibrium E_2 , substitusikan $E_2 = \left(\frac{\beta}{(1-m)}\sqrt{\frac{c}{e\alpha-c}}, \frac{e\left[A(1-m)-\mu\beta\sqrt{\frac{c}{e\alpha-c}}\right]}{(1-m)c}\right)$ ke suku-suku matriks (3) sehingga diperoleh matriks Jacobian $J(E_2)$ sebagai berikut.

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} -\mu - \frac{2\sqrt{\frac{c}{e\alpha-c}}\left[A(1-m)-\mu\beta\sqrt{\frac{c}{e\alpha-c}}\right](e\alpha-c)^2}{\beta c e \alpha} & -\frac{c}{e} \\ \frac{2\left(A(1-m)-\mu\beta\sqrt{\frac{c}{e\alpha-c}}\right)(e\alpha-c)^2\sqrt{\frac{c}{e\alpha-c}}}{e\alpha\beta} & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, dicari persamaan karakteristik dengan mencari $\det(\lambda I - J(E_2)) = 0$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\mu - \frac{2\sqrt{\frac{c}{e\alpha-c}}\left[A(1-m)-\mu\beta\sqrt{\frac{c}{e\alpha-c}}\right](e\alpha-c)^2}{\beta c e \alpha} & -\frac{c}{e} \\ \frac{2\left(A(1-m)-\mu\beta\sqrt{\frac{c}{e\alpha-c}}\right)(e\alpha-c)^2\sqrt{\frac{c}{e\alpha-c}}}{e\alpha\beta} & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 + \left(\mu + \frac{2\sqrt{\frac{c}{e\alpha-c}}\left[A(1-m)-\mu\beta\sqrt{\frac{c}{e\alpha-c}}\right](e\alpha-c)^2}{\beta c e \alpha}\right)\lambda + \frac{2\left(A(1-m)-\mu\beta\sqrt{\frac{c}{e\alpha-c}}\right)(e\alpha-c)^2\sqrt{\frac{c}{e\alpha-c}}}{e\alpha\beta} = 0 \end{aligned}$$

Diperoleh persamaan karakteristik

$$\lambda^2 + P\lambda + Q = 0$$

dengan

$$P = \mu + \frac{2\sqrt{\frac{c}{e\alpha - c}} \left[A(1 - m) - \mu\beta\sqrt{\frac{c}{e\alpha - c}} \right] (e\alpha - c)^2}{\beta c e \alpha}$$

$$= \mu + \frac{Q}{c}$$

$$Q = \frac{2 \left(A(1 - m) - \mu\beta\sqrt{\frac{c}{e\alpha - c}} \right) (e\alpha - c)^2 \sqrt{\frac{c}{e\alpha - c}}}{e\alpha\beta}$$

Akar-akar persamaan karakteristik tersebut adalah sebagai berikut.

$$\lambda_1 = \frac{-P + \sqrt{P^2 - 4Q}}{2} \text{ dan } \lambda_2 = \frac{-P - \sqrt{P^2 - 4Q}}{2}$$

Untuk mengetahui nilai eigen dari akar-akar persamaan karakteristik yang diperoleh, maka terlebih dahulu diperiksa nilai dari P , Q dan D . Telah diasumsikan $e\alpha > c$ sehingga diperoleh $(e\alpha - c)^2 > 0$ dan $\sqrt{\frac{c}{e\alpha - c}} > 0$. Telah diasumsikan juga $A(1 - m) > \mu\beta\sqrt{\frac{c}{e\alpha - c}}$ sehingga $A(1 - m) - \mu\beta\sqrt{\frac{c}{e\alpha - c}} > 0$.

Jadi diperoleh

$$2 \left(A(1 - m) - \mu\beta\sqrt{\frac{c}{e\alpha - c}} \right) (e\alpha - c)^2 \sqrt{\frac{c}{e\alpha - c}} > 0$$

Jelas $e\alpha\beta > 0$

Jadi diperoleh $Q > 0$ berakibat $P = \mu + \frac{Q}{c} > 0$.

Tulis $D = P^2 - 4Q$

$$= \left(\mu + \frac{Q}{c} \right)^2 - 4Q$$

$$= \mu^2 + \frac{Q^2}{c^2} - 2 \left(2 - \frac{\mu}{c} \right) Q$$

$$= \frac{1}{c^2} \left[c^2\mu^2 + Q^2 - 2 \left(2 - \frac{\mu}{c} \right) c^2 Q \right]$$

$$= \frac{1}{c^2} \left[\left(Q - \left(2 - \frac{\mu}{c} \right) c^2 \right)^2 + c^2\mu^2 - \left(2 - \frac{\mu}{c} \right)^2 c^4 \right]$$

$$= \frac{(Q - (2 - \frac{\mu}{c})c^2)^2}{c^2} + \mu^2 - \left(2 - \frac{\mu}{c} \right)^2 c^2$$

$$= \frac{(Q - (2 - \frac{\mu}{c})c^2)^2}{c^2} + \left[\mu - \left(2 - \frac{\mu}{c} \right) c \right] \left[\mu + \left(2 - \frac{\mu}{c} \right) c \right]$$

$$= \frac{(Q - (2 - \frac{\mu}{c})c^2)^2}{c^2} + [\mu - (2c - \mu)][\mu + (2c - \mu)]$$

$$= \frac{(Q - (2 - \frac{\mu}{c})c^2)^2}{c^2} + 4c(\mu - c)$$

Jelas $D > 0$ apabila $\mu \geq c$

Jelas $P^2 - 4Q < P^2$

$$\Rightarrow 0 < \sqrt{D} < P$$

$$\Leftrightarrow -P + V < 0$$

$$\text{Jadi } \lambda_1 = \frac{-P + \sqrt{D}}{2} < 0 \text{ dan } \lambda_2 = \frac{-P - \sqrt{D}}{2} < 0$$

Jadi λ_1 dan λ_2 bernilai negatif, sehingga jika $D > 0$, $e\alpha > c$, $A(1 - m) > \mu\beta\sqrt{\frac{c}{e\alpha - c}}$, dan $\mu \geq c$ dapat disimpulkan bahwa E_2 merupakan titik ekuilibrium yang bersifat stabil asimtotik

lokal (*stable node point*). Untuk kasus $\mu < c$ belum diketahui tanda dari D . Apabila $D < 0$, $e\alpha > c$, $A(1 - m) > \mu\beta\sqrt{\frac{c}{e\alpha - c}}$, dan $\mu < c$ maka λ_1 dan λ_2 mempunyai bagian real negatif, sehingga dapat disimpulkan bahwa E_2 merupakan titik equilibrium yang bersifat stabil asimtotik lokal (*stable spiral point*).

Untuk mengetahui perilaku kestabilan dari titik ekuilibrium, dilakukan simulasi numerik menggunakan *software* Maple yang disajikan dalam empat kasus yang berbeda. Simulasi numerik tanpa parameter perlindungan ($m = 0$) juga ditampilkan.

Kasus yang pertama adalah simulasi titik E_1 dengan kondisi awal $e\alpha > c$ dan $A(1 - m) > \mu\beta\sqrt{\frac{c}{e\alpha - c}}$. Kondisi ini dipenuhi dengan nilai-nilai parameter pada Tabel 2.

Tabel 2. Nilai-nilai Parameter pada Kasus 1

Parameter	Nilai	Keterangan
A	1.2	Asumsi
μ	0.1	Chakraborty & Bairagi (2019)
c	0.07	Chakraborty & Bairagi (2019)
e	0.48	Zhang, Rong, & Zhang (2019)
α	0.3	A. Das & Samanta (2020)
β	0.5	Chakraborty & Bairagi (2019)
m	0.9408	Chakraborty & Bairagi (2019)

Dari nilai parameter tersebut diperoleh sistem persamaan sebagai berikut.

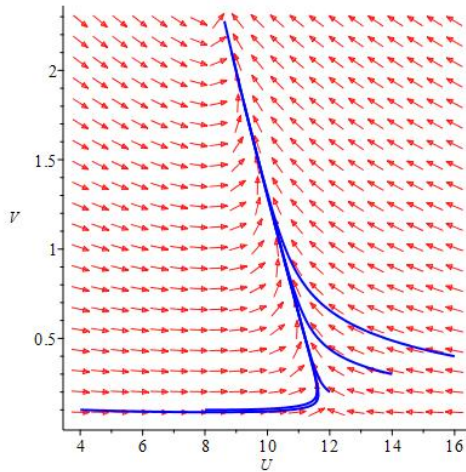
$$\frac{dU}{dt} = 1.2 - 0.1U - \frac{0.00105139U^2V}{0.25 + 0.00350464U^2}$$

$$\frac{dV}{dt} = -0.07V + \frac{0.00050466816U^2V}{0.25 + 0.00350464U^2}$$

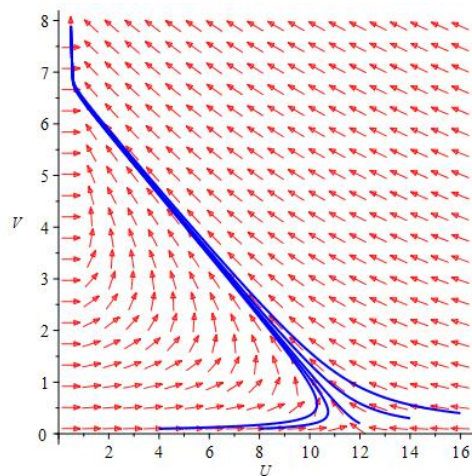
Dengan nilai parameter di atas, maka diperoleh titik ekuilibrium $E_1(12, 0)$ merupakan *saddle point*. Hal ini terjadi karena semua trayektori terlihat menjauhi titik ekuilibrium sehingga E_1 bersifat tidak stabil. Jadi pada kondisi ini tidak terjadi kestabilan populasi. Sedangkan pada Gambar 2 memperlihatkan simulasi numerik untuk titik

ekuilibrium E_1 tanpa parameter perlindungan ($m = 0$) dan diperoleh hasil bahwa titik ekuilibrium bersifat tidak stabil. Dari kedua gambar tersebut dapat disimpulkan bahwa ada atau tidaknya parameter perlindungan, tanpa adanya *predator* maka tidak akan terjadi kestabilan populasi.

Hasil simulasi untuk kasus 1 dapat dilihat pada Gambar 1 dan Gambar 2 sebagai berikut.



Gambar 1. Trayektori E_1 pada Kasus 1



Gambar 2. Trayektori E_1 pada Kasus 1 ($m = 0$)

Pada kasus kedua menunjukkan simulasi titik E_1 dengan kondisi awal $e\alpha > c$ dan $A(1 - m) < \mu\beta \sqrt{\frac{c}{e\alpha - c}}$. Kondisi ini dipenuhi dengan nilai-nilai parameter pada Tabel 3.

Tabel 3. Nilai-nilai Parameter pada Kasus 2

Parameter	Nilai	Keterangan
A	0.8	Asumsi
μ	0.1	Chakraborty &

c	0.07	Bairagi (2019)
e	0.04	Chakraborty & Bairagi (2019)
α	0.2	Manarul Haque & Sarwardi (2018)
β	0.9	Kumar, Reddy, & Srinivas (2018)
m	0.9408	Chakraborty & Bairagi (2019)

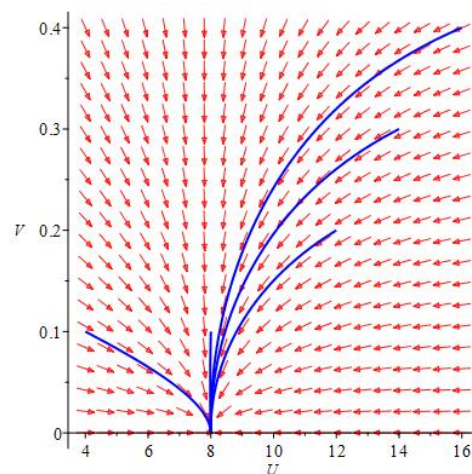
Dari nilai parameter diperoleh sistem persamaan sebagai berikut.

$$\frac{dU}{dt} = 0.08 - 0.1U - \frac{0.000700928U^2V}{0.81 + 0.00350464U^2}$$

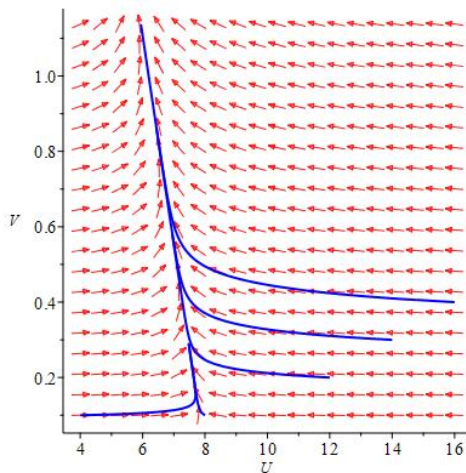
$$\frac{dV}{dt} = -0.07V + \frac{0.00028037126U^2V}{0.25 + 0.00350464U^2}$$

Dengan nilai parameter di atas, diperoleh titik ekuilibrium $E_1(8, 0)$ merupakan *stable node point*. Hal ini terjadi karena semua trayektori terlihat menuju titik ekuilibrium sehingga E_1 bersifat stabil. Jadi pada kondisi ini terjadi kestabilan populasi *prey* dan *predator*. Sedangkan pada Gambar 4 memperlihatkan simulasi numerik untuk titik ekuilibrium E_1 tanpa parameter perlindungan ($m = 0$) dan diperoleh hasil bahwa titik ekuilibrium bersifat tidak stabil. Dari kedua gambar tersebut dapat disimpulkan bahwa parameter perlindungan memberikan pengaruh terhadap kestabilan titik ekuilibrium.

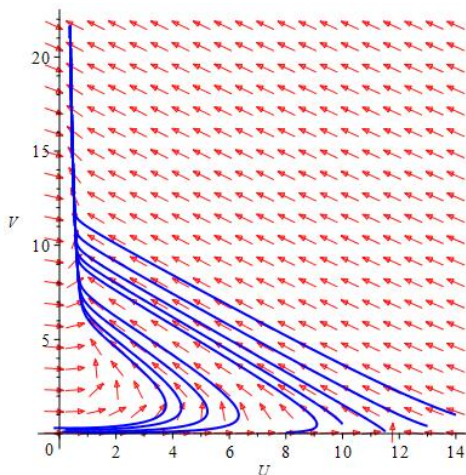
Hasil simulasi untuk kasus 2 dapat dilihat pada Gambar 3 dan Gambar 4



Gambar 3. Trayektori E_1 pada Kasus 2



Gambar 4. Trayektori E_1 pada Kasus 2 ($m = 0$)



Gambar 5 menunjukkan simulasi titik E_2 dengan kondisi awal $e\alpha > c, A(1 - m) > \mu\beta \sqrt{\frac{c}{e\alpha - c}}, D > 0$ dan $\mu \geq c$. Parameter yang digunakan tercantum dalam Tabel 4.

Tabel 4. Nilai-nilai Parameter pada Kasus 3

Parameter	Nilai	Keterangan
A	1.2	Asumsi
μ	0.1	Chakraborty & Bairagi (2019)
c	0.04	Chakraborty & Bairagi (2019)
e	0.75	Triharyuni & Aisyah (2018)
α	0.6	S. Chakraborty et al. (2017)
β	0.5	Chakraborty & Bairagi (2019)
m	0.5859	Chakraborty & Bairagi (2019)

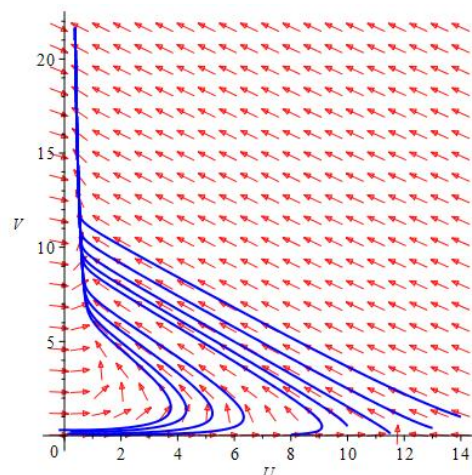
Dari nilai parameter tersebut diperoleh sistem persamaan sebagai berikut.

$$\frac{dU}{dt} = 1.2 - 0.1U - \frac{0.102887286U^2V}{0.25 + 0.17147881U^2}$$

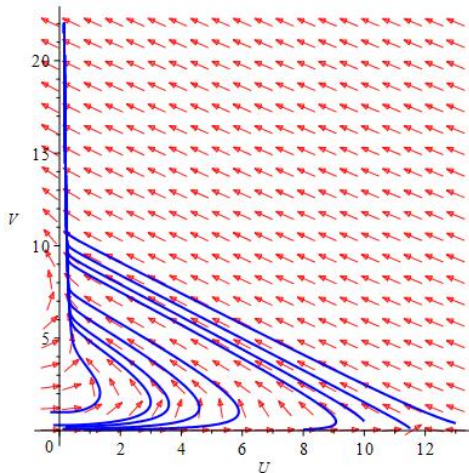
$$\frac{dV}{dt} = -0.04V + \frac{0.07716546450U^2V}{0.25 + 0.17147881U^2}$$

Dengan nilai parameter di atas, diperoleh titik ekuilibrium $E_2(0.38, 21.79)$ merupakan *stable node point*. Hal ini terjadi karena semua trayektori terlihat mendekati titik ekuilibrium dari berbagai arah. Gambar 6 juga memenuhi trayektori untuk titik E_1 dengan syarat $e\alpha > c$ dan $A(1 - m) > \mu\beta \sqrt{\frac{c}{e\alpha - c}}$ yang menunjukkan bahwa semua trayektori menjauhi titik ekuilibrium sehingga dapat dikatakan bahwa E_1 tidak stabil atau *saddle point*. Sedangkan pada Gambar 6 memperlihatkan simulasi numerik untuk titik E_2 tanpa parameter perlindungan ($m = 0$) dan diperoleh hasil bahwa titik ekuilibrium bersifat tidak stabil. Dari kedua gambar tersebut dapat disimpulkan bahwa ketika kematian alami *prey* lebih dari atau sama dengan kematian alami *predator*, maka tidak terjadi kestabilan, oleh karena itu parameter perlindungan memberikan pengaruh terhadap kestabilan titik ekuilibrium.

Hasil simulasi untuk kasus 3 dapat dilihat pada Gambar 5 dan Gambar 6 berikut.



Gambar 5. Trayektori E_1 pada Kasus 3



Gambar 6. Trayektori E_1 pada Kasus 3 ($m = 0$)

Gambar 7 menunjukkan simulasi titik E_2 dengan kondisi awal $e\alpha > c, A(1 - m) > \mu\beta\sqrt{\frac{c}{e\alpha - c}}, D < 0$ dan $\mu < c$. Parameter yang digunakan tercantum pada Tabel 5.

Tabel 5. Nilai-nilai Parameter pada Kasus 4

Parameter	Nilai	Keterangan
A	1.2	Asumsi
μ	0.1	Chakraborty & Bairagi (2019)
c	0.45	Das & Samanta (2020)
e	0.75	Triharyuni & Aisyah (2018)
α	1	Mukherjee & Maji (2020)
β	0.5	Kumar, Reddy, & Srinivas (2018)
m	0.5859	Chakraborty & Bairagi (2019)

Dari nilai parameter tersebut diperoleh sistem persamaan sebagai berikut.

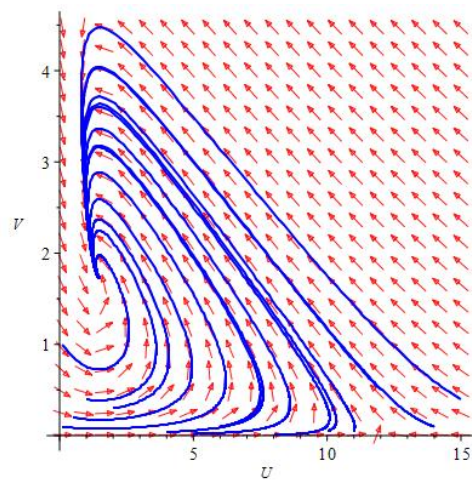
$$\frac{dU}{dt} = 1.2 - 0.1U - \frac{0.17147881U^2V}{0.25 + 0.17147881U^2}$$

$$\frac{dV}{dt} = -0.45 + \frac{0.1286091075U^2V}{0.25 + 0.17147881U^2}$$

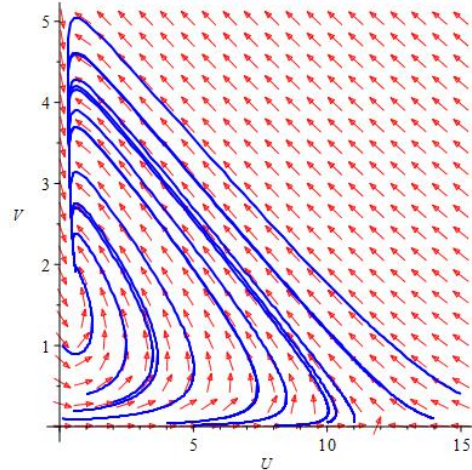
Dengan nilai parameter di atas, diperoleh titik ekuilibrium $E_2(1.48, 1.75)$ merupakan *spiral point*. Hal ini terjadi karena semua trayektori terlihat bergerak menuju titik ekuilibrium E_2 secara spiral yang berarti bahwa E_2 stabil. Gambar 7 juga memenuhi trayektori

untuk E_1 dengan syarat $e\alpha > c$ dan $A(1 - m) > \mu\beta\sqrt{\frac{c}{e\alpha - c}}$ yang menunjukkan bahwa titik E_1 merupakan *saddle point*. Sedangkan pada Gambar 8 simulasi untuk titik E_2 tanpa parameter perlindungan ($m = 0$) diperoleh hasil bahwa titik ekuilibrium juga bersifat stabil. Dari kedua gambar tersebut dapat disimpulkan bahwa ketika kematian alami *prey* lebih rendah dari kematian alami *predator*, maka tanpa adanya perlindungan, kedua populasi dapat mencapai kestabilan.

Hasil simulasi dapat dilihat pada Gambar 7 dan Gambar 8 sebagai berikut.



Gambar 7. Trayektori E_2 pada Kasus 4



Gambar 8. Trayektori E_2 pada Kasus 4 ($m = 0$)

PENUTUP

Dari model matematika *predator-prey* dengan dinamika populasi rekrutmen-*death*, perlindungan *prey* dan fungsi respon Holling tipe III diperoleh dua titik ekuilibrium. Dalam

penelitian ini parameter rekrutmen yang digunakan masih berdasarkan asumsi, untuk itu perlu ditambahkan parameter yang sesuai dengan kondisi di lapangan. Kestabilan global dan interpretasi secara mendalam dari grafik solusi yang dihasilkan juga perlu dilakukan.

DAFTAR PUSTAKA

- Agarwal, M., & Pathak, R. (2013). Persistence and optimal harvesting of prey-predator model with Holling Type III functional response. *International Journal of Engineering, Science and Technology*, 4(3).
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2012). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. USA: John Wiley & Sons, Inc.
- Chakraborty, B., & Bairagi, N. (2019). Complexity in a prey-predator model with prey refuge and diffusion. *Ecological Complexity*, 37(April 2018), 11–23.
- Chakraborty, S., Tiwari, P. K., Sasmal, S. K., Biswas, S., Bhattacharya, S., & Chattopadhyay, J. (2017). Interactive effects of prey refuge and additional food for predator in a diffusive predator-prey system. *Applied Mathematical Modelling*, 47, 128–140.
- Das, A., & Samanta, G. P. (2020). A prey-predator model with refuge for prey and additional food for predator in a fluctuating environment. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 538, 1–37.
- Didiharyono. (2016). *Analisis Kestabilan dan Keuntungan Maksimum Model Predator-Prey Fungsi Respon Tipe Holling III dengan Usaha Pemanenan*. 11(2), 314–326.
- Effendi, R., Salsabila, H., & Malik, A. (2018). Pemahaman Tentang Lingkungan Berkelanjutan. *Modul*, 18(2), 75–82.
- Febrianto, A. (2016). *Antropologi Ekologi*. Jakarta: Kencana.
- Hunsicker, M. E., Ciannelli, L., Bailey, K. M., Buckel, J. A., Wilson White, J., Link, J. S., ... Zador, S. (2011). Functional responses and scaling in predator-prey interactions of marine fishes: Contemporary issues and emerging concepts. *Ecology Letters*, 14(12), 1288–1299.
- Jayanti, U. N. A. D. (2020). *Ekosistem: Modul Inkuiri Berbasis Potensi dan Kearifan Lokal*. Malang: CV. Multimedia Edukasi.
- Kumar, C. V. P., Reddy, K. S., & Srinivas, M. A. S. (2018). Dynamics of prey predator with Holling interactions and stochastic influences. *Alexandria Engineering Journal*, 57(2), 1079–1086.
- Liu, X., & Chen, L. (2003). Complex dynamics of Holling type II Lotka-Volterra predator-prey system with impulsive perturbations on the predator. *Chaos, Solitons and Fractals*, 16(2), 311–320.
- Manarul Haque, M., & Sarwardi, S. (2018). Dynamics of a harvested prey-predator model with prey refuge dependent on both species. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 28(12).
- Mortoja, S. G., Panja, P., & Mondal, S. K. (2018). Dynamics of a predator-prey model with stage-structure on both species and anti-predator behavior. *Informatics in Medicine Unlocked*, 10(October 2017), 50–57.
- Mukherjee, D., & Maji, C. (2020). Bifurcation analysis of a Holling type II predator-prey model with refuge. *Chinese Journal of Physics*, 65, 153–162.
- Ningrum, R. E., Abadi, & Astuti, Y. P. (2019). *Model Matematika Mangsa Pemangsa Dua Spesies dengan Fungsi Respon Holling Tipe II dan Perilaku Anti-Pemangsa*. 7(2), 10–14.
- Panigoro, H. S. (2014). Analisis Dinamik Sistem Predator-Prey Model Leslie-Gower dengan Pemanenan Secara Konstan terhadap Predator. *Euler*, 2(1), 1–12.
- Pusawidjayanti, K., Suryanto, A., & Wibowo, R. B. E. (2015). Dynamics of a predator-prey model incorporating prey refuge,

- predator infection and harvesting. *Applied Mathematical Sciences*, 9(73–76), 3751–3760.
- Roziaty, E., Kusumadani, A. I., & Aryani, I. (2017). *Biologi Lingkungan*. Surakarta: Muhammadiyah University Press.
- Sembel, D. T. (2015). *Toksikologi Lingkungan*. Yogyakarta: ANDI.
- Sidik, A. M. A., Toaha, S., & Kasbawati. (2017). *Kestabilan Model Mangsa Pemangsa dengan Fungsi Respon Holling Tipe III dan Penyakit pada Pemangsa Super*. 16–23.
- Suharto, A., Asriany, A., & Ismartoyo. (2019). Pengaruh Pengunjung Terhadap Tingkah Laku dan Konsumsi Makan Rusa Totol (Axis-axis) Pada Penangkaran Rusa Totol di Fakultas Peternakan Unhas. *Buletin Nutrisi Dan Makanan Ternak*, 13(1), 38–47.
- Taufiq, I., & Agustito, D. (2018). Model Predator-Prey dengan Dua Predator dan Satu Prey Terinfeksi. *Indonesian Journal of Mathematics Education*, 1(1), 8.
- Tian, X., & Xu, R. (2011). Global dynamics of a predator-prey system with Holling type II functional response. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 16(2), 242–253.
- Triharyuni, S., & Aisyah. (2018). Predator-prey model of exploited fish population Arowana (*Scleropages spp.*). *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 176(1).
- Ulya, F. H., Toaha, S., & Kasbawati. (2019). Analisis Kestabilan Dan Kontrol Optimal Model Leslie-Gower Fungsi Respon Holling Iii Dengan Pemanenan Pada Populasi Predator Dan Prey. *Jurnal Matematika, Statistika Dan Komputasi*, 16(1), 74–84.
- Windiani. (2010). Strategi Pemberdayaan Masyarakat Di Kawasan Hutan Sebagai Langkah Antisipatif Dalam Penanganan Bencana Banjir Dan Tanah Longsor Di Kabupaten Trenggalek. *Jurnal Sosial Humaniora*, 3(1), 148–161.
- Xiao, D., & Ruan, S. (2001). Global Analysis in a Predator-Prey System with Nonmonotonic Functional Response. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 61(4), 1445–1472.
- Yue, Q. (2016). Dynamics of a modified Leslie–Gower predator–prey model with Holling-type II schemes and a prey refuge. *SpringerPlus*, 5(461), 1–12.
- Zhang, Y., Rong, X., & Zhang, J. (2019). A diffusive predator-prey system with prey refuge and predator cannibalism. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 16(3), 1445–1470.