UJM 1 (1) (2012)
UNNES Journal of Mathematics
http://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/ujm

PENERAPAN DIAGONALISASI MATRIKS DAN MATRIKS LESLIE DALAM MEMPROYEKSIKAN JUMLAH POPULASI PEREMPUAN

Selvia Yuliani✉, Rahayu B.V., Mashuri.

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Indonesia
Gedung D7 lantai 1 Kampus Sekaran, Gunungpati, Semarang, 50229

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima Januari 2012
Disetujui Februari 2012
Dipublikasikan Mei 2012

Keywords :
Matrix Diagonalization
Leslie Matrix
Eigenvalues
Eigenvector

Abstrak

Untuk mendapatkan bibit ungggul pada tanaman dan hewan ternak, perlu dilakukan seleksi genetik. Sifat-sifat yang diinginkan pada varietas unggul diseleksi dari beberapa generasi. Tulisan ini bertujuan untuk menyajikan penerapan beberapa konsep dalam aljabar linier, khususnya nilai dan vektor eigen serta diagonalisasi matriks dalam genetika dan penerapan matriks Leslie untuk memproyeksikan jumlah populasi perempuan di suatu daerah.

Abstract

To obtain seeds of plants and animals, it needs to be done through a genetic selection. Characteristic which is wanted on variety of excellence is selected from some generation. This paper aims to present the application of some concepts in linear algebra, particularly the values and eigenvectors and matrix diagonalization in genetics and the application of the Leslie matrix in projecting the number of female population in an area.

✉ Alamat korespondensi:
E-mail: ch3viacute@yahoo.co.id

ISSN NO 2252-6943

Pendahuluan

Matematika sebagai bahasa simbol yang bersifat universal, hubungannya sangat erat dengan kehidupan nyata. Kenyataan membuktikan bahwa untuk menyelesaikan masalah-masalah dalam kehidupan sehari-hari, matematika mempunyai peranan yang sangat penting. Metode-metode matematika dibutuhkan untuk mempermudah penyelesaian masalah tersebut. Di dalam dunia nyata terkadang terdapat masalah-masalah yang sulit untuk diselesaikan dalam sistemnya. Matematika mempunyai metode yang disusun mirip sistem aslinya yang dinamakan dengan pemodelan matematika. Model matematika dapat berupa persamaan, pertidaksamaan, dan sebagainya.

Konsep-konsep dalam aljabar linier bersifat abstrak sehingga tidak jelas manfaatnya. Aplikasi aljabar linier banyak digunakan untuk memecahkan persoalan dibidang matematika maupun di luar bidang matematika. Sebagai contoh penggunaan matriks memudahkan dalam membuat analisis masalah-masalah ekonomi (model ekonomi liontif), fisika (keseimbangan benda getar), biologi (pemanenan populasi hewan, genetika terapan), demografi (penggunaan matriks Leslie untuk memproyeksikan jumlah populasi perempuan). Selain itu, aljabar linier khususnya matriks cukup membantu dalam menyelesaikan persoalan transformasi linier, pencocokan kuadrat suatu data, dan sebagainya.

Penelitian ini bertujuan untuk menyajikan penerapan beberapa konsep dalam aljabar linier khususnya yang berhubungan dengan nilai eigen, vektor eigen, aplikasi diagonalisasi matriks dalam genetika dan aplikasi matriks Leslie pada pertumbuhan populasi suatu daerah. Hal ini bertujuan untuk menunjukkan bahwa konsep-konsep dalam aljabar linier bermanfaat untuk menyelesaikan masalah di dunia nyata. Dengan demikian akan mengurangi kesan abstrak konsep itu sendiri. Berdasarkan uraian di atas, maka penulis tertarik untuk mengkajinya lebih lanjut dengan mengangkat judul "Penerapan Diagonalisasi Matriks dan Matriks Leslie dalam Memproyeksikan Jumlah Populasi Perempuan".

Berdasarkan latar belakang di atas, maka permasalahan yang timbul adalah sebagai berikut: (a) bagaimana penerapan diagonalisasi matriks pada genetika suatu individu; (b) bagaimana menentukan genotip pada generasi ke-n dengan menggunakan diagonalisasi matriks; (c) bagaimana penerapan matriks Leslie dalam memproyeksikan jumlah populasi perempuan dalam masing-masing kelompok umur.

Sesuai dengan masalah yang telah dirumuskan, tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut: (a) mengetahui penerapan diagonalisasi matriks pada genetika suatu individu; (b) mengetahui genotip pada generasi ke-n dengan menggunakan diagonalisasi matriks; (c) mengetahui penerapan Matriks Leslie dalam memproyeksikan jumlah populasi perempuan dalam masing-masing kelompok umur.

Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan adalah (a) identifikasi masalah; (b) studi pustaka; (c) pengumpulan data sekunder dengan metode dokumentasi yang diperoleh dari Kelurahan Margadana Kota Tegal dan Puskesmas Kecamatan Margadana berupa data jumlah penduduk perempuan Kelurahan Marganadana tahun 2011, data kelahiran penduduk perempuan Kelurahan Margadana Tahun 2011, dan data kematian penduduk perempuan Kelurahan Margadana Tahun 2011.

Hasil dan Pembahasan

A. Penerapan Diagonalisasi matriks pada Pewarisan Autosomal

Dalam warisan autosomal suatu individu akan mewarisi satu genotip dari setiap pasangan genotip dari induknya untuk membentuk pasangan genotip individu itu sendiri. Di antara kedua genotip induk tersebut yang akan diteruskan kepada keturunannya terjadi secara kebetulan.

Dari Tabel 4.1 dapat dilihat bahwa keturunan pertama (F1) memiliki peluang munculnya genotip AAAA sebesar 1/9, AAAa sebesar 2/9, AAaa sebesar 2/9, AaAa sebesar 1/9, Aaaa sebesar 2/9, dan aaaa sebesar 1/9.

Tabel 4.1 Daftar Persilangan Dua Tanaman Kacang Polong

Genotip	AA	Aa	Aa
AA	AAAA	AAAa	AAaa
Aa	AAAa	AaAa	Aaaa
aa	AAaa	Aaaa	Aaaa

Contoh 1

Misalkan seorang petani mempunyai populasi tumbuhan yang luas, yang terdiri dari ketiga macam genotip yaitu AA, Aa, aa. Dia ingin melaksanakan program pengembangbiakan pada setiap tumbuhan dalam populasi tersebut. Setiap tumbuhan itu selalu disuburi dengan tumbuhan yang genotipnya AA. Bagaimana persamaan untuk bagian tumbuhan dari ketiga genotip dalam generasi ke-n yang dinyatakan dalam bagian-bagian genotip permulaan.

Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut misalkan a_0 ,b_0 , dan c_0 menyatakan distribusi permulaan dari ketiga genotip tersebut, dengan $a_n + b_n + c_n=1$ untuk n = 1,2,3,…

Dengan

a_n: Banyaknya bagian tumbuhan yang bergenotip AA dalam generasi ke-n.

b_n: Banyaknya bagian tumbuhan yang genotipnya Aa dalam generasi ke-n.

c_n : Banyaknya bagian tumbuhan yang genotipnya aa dalam generasi ke-n.

Tabel 4.2 Daftar Peluang Pemunculan Genotip yang Dimiliki oleh Semua Turunan

Induk / Turunan	AA-AA	Aa-AA	aa-AA
AA	1	$\frac{1}{2}$	0
Aa	0	$\frac{1}{2}$	1
aa	0	0	0

Berarti untuk n = 0, 1,2,… berlaku sistem persamaan berikut:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + \frac{1}{2} b_{n-1} \\ b_n &= \frac{1}{2} b_{n-1} + c_{n-1} \\ c_n &= 0 \end{aligned}\right\} \text{untuk } n = 1,2,3,\ldots \quad \ldots(4.1\text{-}1)$$

Tulis $\boldsymbol{X}^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}$; $M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Karena persamaan (4.1-1) berlaku untuk bilangan asli, maka

$X^{(n)} = MX^{(n-1)} = M^2 X^{(n-2)} = \ldots = M^n X^{(0)}$

Nilai eigen dari matriks M adalah

$\lambda_1=1$; $\lambda_2 = 1/2$; $\lambda_3 = 0$

vektor eigen yang bersesuaian dengan

$\lambda_1 = 1$ adalah $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

vektor eigen yang bersesuaian dengan

$\lambda_2 = 1/2$ adalah $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

vektor eigen yang bersesuain dengan

$\lambda = 0$ adalah $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Dibentuk matriks pendiagonal dari matriks M adalah matriks

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dari hasil perhitungan diperoleh matriks

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jadi $D = P^{-1} MP=$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

diperoleh $D^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

sehingga $M^n = PD^n P^{-1}$.

Oleh karena

$X^n = M^n X^{(0)}$

$X^n = PD^n P^{-1} X^{(0)}$

maka

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) b_0 + \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) c_0 \\ 0 + \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + b_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 + c_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + b_0 + c_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Persamaan tersebut merupakan persamaan distribusi dari genotip kedua induk yang mungkin dalam populasi tersebut pada generasi ke-n. Jika n mendekati tak hingga maka

$(1/2)^n$ menuju ke nol, sehingga persamaan di atas menjadi

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ini berarti semua tumbuhan pada generasi ke-n dihasilkan tanaman yang bergenotip AA yang merupakan tanaman berjenis unggul. Berdasarkan contoh 1 maka penerapan diagonalisasi matriks untuk menyelesaikan masalah genetika dapat menggunakan nilai eigen dan vektor eigen, diagonalisasi matriks serta limit untuk mengetahui sifat yang muncul pada individu di dalam suatu generasi.

Contoh 2

Misalkan dalam suatu anggota keluarga terdiri atas ayah, ibu, dan tiga orang anak. Satu diantara anak tersebut memiliki kelainan berupa telinga bergelambir. Kemudian setiap anak dikawinkan dengan masing–masing pasangan yang semuanya memiliki telinga bergelambir. Pada generasi selanjutnya keturunan manakah yang akan menghasilkan anak dengan sifat telinga bergelambir.

Dari permasalahan diatas misalkan a_0 , b_0 , dan c_0 menyatakan distribusi permulaan dari ketiga genotip tersebut dan $a_n + b_n + c_n = 1$ untuk n = 1,2,3,…

dengan

a_n : Banyaknya keturunan yang bergenotip TT (genotip normal *homozygot*) dalam generasi ke-n.

b_n : Banyaknya keturunan yang genotipnya Tt (genotip normal *heterozygot*) dalam generasi ke-n.

c_n : Banyaknya keturunan yang genotipnya tt (genotip telinga bergelambir) dalam generasi ke-n.

Tabel 4.3 Peluang dari Persilangan Dua Individu Bagi Pewarisan Autosomal

Induk / Turunan	TT – tt	Tt - tt	tt – tt
TT	0	0	0
Tt	1	$\frac{1}{2}$	0
Tt	0	$\frac{1}{2}$	1

Berarti untuk n = 0, 1, 2,… berlaku sistem persamaan berikut:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= 0 \\ b_n &= a_{n-1} + \tfrac{1}{2} b_{n-1} \\ c_n &= \tfrac{1}{2} b_{n-1} + c_{n-1} \end{aligned}\right\} \text{untuk n = 1,2,3,…}$$

Tulis $X^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}$; $M = . \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

Karena persamaan (4.1-1) berlaku untuk bilangan asli, maka $X^{(n)} = MX^{(n-1)} = M^2 X^{(n-2)} = \ldots = M^n X^{(0)}$

Nilai – nilai eigen dari matriks M adalah $\lambda_1 = 0; \lambda_2 = 1/2; \lambda_3 = 1$

vektor eigen yang bersesuaian dengan

$\lambda_1 = 0$ adalah $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$,

vektor eigen yang bersesuaian dengan

$\lambda_2 = 1/2$ adalah $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$,

vektor eigen yang bersesuain dengan

$\lambda = 1$ adalah $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Dibentuk matriks pendiagonal dari matriks M adalah matriks $P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Dari hasil perhitungan diperoleh

matriks $P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Jadi

$$D = P^{-1}MP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

diperoleh $D^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

sehingga $M^n = PD^n P^{-1}$.

Oleh karena

$X^n = M^n X^{(0)}$

$X^n = PD^n P^{-1} X^{(0)}$

maka

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & \left(\frac{1}{2}\right)^{n} & 0 \\ 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} a_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n} b_0 \\ a_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} a_0 + b_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n} b_0 + c_0 \end{bmatrix}$$

Persamaan tersebut merupakan persamaan distribusi dari genotip induk yang mungkin dalam populasi tersebut pada generasi ke-n. Jika n mendekati tak hingga maka $(1/2)^n$ dan $(1/2)^{n+1}$ menuju ke nol, sehingga persamaan di atas menjadi

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hasil perkawinan tersebut akan menghasilkan keturunan yang pada akhirnya bergenotip tt yang merupakan genotip dari anak dengan telinga bergelambir yang berasal dari perkawinan induk dengan genotip tt-tt

Contoh 3

Seorang laki –laki bergolongan darah B menikah dengan seorang perempuan bergolongan darah B pula, maka diperoleh keturunan yang kemungkinan bergolongan darah I^B I^B, I^B i, dan ii. Jika anak yang bergolongan darah I^B I^B menikah dengan pasangannya yang bergolongan darah I^B I^B dan 2 anak yang lain menikah dengan golongan darah ii. Bagaimanakah golongan darah keturunan pada generasi ke–n?

Dari permasalahan di atas, maka penyelesaiannya adalah sebagai berikut.

Kombinasi genotip I^B I^B atau I^B i mempunyai tipe golongan darah B.

Kombinasi genotip ii mempunyai tipe golongan darah O.

Tabel 4.3 Peluang dari Persilangan Dua Individu Bagi Pewarisan Autosomal

Induk / Turunan	$I^B I^B$ - $I^B I^B$	I^Bi – ii	ii-ii
$I^B I^B$	1	0	0
I^B i	0	$\frac{1}{2}$	0
ii	0	$\frac{1}{2}$	1

Berarti untuk n = 0, 1,2,… berlaku sistem persamaan berikut:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} \\ b_n &= \tfrac{1}{2} b_{n-1} \\ c_n &= \tfrac{1}{2} b_{n-1} + c_{n-1} \end{aligned}\right\} \quad \text{untuk n} = 1,2,3,\ldots$$

Tulis $X^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}$; $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$.

Karena persamaan (4.1-1) berlaku untuk bilangan asli, maka $X^{(n)} = MX^{(n-1)} = M^2 X^{(n-2)}$

$= \ldots = M^n X^{(0)}$

Nilai – nilai eigen dari matriks M adalah $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 1; \lambda_3 = 1/2$

vektor eigen yang bersesuaian dengan

$\lambda_1 = 1$ adalah $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

vektor eigen yang bersesuaian dengan

$\lambda_2 = 1/2$ adalah $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Dibentuk matriks pendiagonal dari *M* adalah matriks matriks

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dari hasil perhitungan diperoleh matriks

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jadi $D = P^{-1} MP$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

diperoleh $D^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix}$

sehingga $M^n = PD^n P^{-1}$.

Oleh karena

$X^n = M^n X^{(0)}$

$X^n = PD^n P^{-1} X^{(0)}$

maka

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 \\ \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) b_0 + c_0 \end{bmatrix}$$

Persamaan tersebut merupakan persamaan distribusi dari genotip kedua induk yang mungkin dalam populasi tersebut pada generasi ke-n. Jika n mendekati tak hingga maka $(1/2)^n$ menuju ke nol, sehingga persamaan di atas menjadi

$a_n = a_0$

$b_n = 0$

$c_n = b_0 + c_0$

Persamaan pertama menyatakan bahwa pada generasi ke-n akan dihasilkan semua keturunan dengan kombinasi gen I^B I^B yaitu keturunan dengan golongan darah B yang diperoleh dari orang tua yang memiliki kombinasi gen I^B I^B. Persamaan kedua menyatakan tidak dihasilkan keturunan dengan kombinasi gen I^B i. Persamaan ketiga menyatakan bahwa semua keturunan pada akhirnya memiliki kombinasi gen ii atau keturunan yang bergolongan darah O yang diperoleh dari orang tua yang memiliki kombinasi gen I^B i dan ii.

B. Penerapan Matriks Leslie dalam Memproyeksikan Jumlah Populasi Perempuan

Laju pertumbuhan populasi perempuan dapat diproyeksikan menggunakan matriks Leslie. Dalam hal ini diasumsikan, bahwa laju pertumbuhan populasi hanya disebabkan oleh adanya proses kelahiran dan proses kematian saja dan dianggap tidak ada migrasi masuk atau keluar pada populasi yang diteliti. Suatu populasi didistribusikan ke dalam kelompok berdasarkan usia. Misalkan M adalah usia maksimum yang dapat dicapai oleh perempuan pada suatu populasi. Populasi perempuan itu dibagi ke dalam n kelompok berdasarkan usia dengan perbedaan usia yang sama tiap kelompok dan perbedaan maksimal usia tiap dua individu perempuan pada tiap kelompok tidak melebihi rentang waktu pengamatan, maka perbedaan usia masing-masing kelompok adalah M/n. Dengan demikian kelompok 1 adalah mereka yang berusia [0,M/n), kelompok 2 adalah mereka yang berusia [M/n,2M/n),..., kelompok n adalah mereka yang berusia [(n-1)M/n,M). Akan ditinjau laju pertumbuhan populasi yang dibagi atas beberapa kelompok umur dalam kurun waktu yang sama. Rentang waktu dua pengamatan yang berurutan adalah sama dengan rentang waktu dua interval tiap kelompok umur. Tiap individu yang berada pada kelompok umur i pada pengamatan t_k berada pada kelompok umur i+1 pada pengamatan t_{k+1}.

Misalkan $x_i^{(k)}$ adalah jumlah individu perempuan pada kelompok i pada pengamatan waktu k untuk i=1,2,…,n. Secara notasi matriks, maka dari kelompok umur ke–1 sampai kelompok umur ke –n dapat dibentuk matriks kolom yang berukuran (nx1)

$$X^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

Misalkan b_i adalah rata-rata jumlah kelahiran perempuan dari tiap kelompok umur, maka

$b_i = B_i / x_i$ ......(4.1-2)

dengan B_i adalah jumlah kelahiran perempuan pada kelompok umur ke-i, i = 1,2,…,n. Untuk setiap kelompok umur ke-*i* berlaku $b_i \geq 0$. Dari persamaan (4.1-2) kita peroleh $B_i = b_i x_i$

Untuk pengamatan waktu ke k-1 diperoleh $B_i^{(k-1)} = b_i^{(k-1)} x_i^{(k-1)}$ .....(4.1-3)

Jumlah individu perempuan pada kelompok umur ke-1 pada pengamatan waktu k adalah total dari jumlah kelahiran individu dari masing-masing kelompok umur populasi perempuan pada pengamatan waktu k-1. Menurut pengertian tersebut maka dapat ditulis,

$x_1^{(k)} = B_1^{(k-1)} + B_2^{(k-1)} + \ldots + B_n^{(k-1)}$

atau,

$x_1^{(k)} = b_1^{(k-1)} x_1^{(k-1)} + b_2^{(k-1)} x_2^{(k-1)} + \ldots + b_n^{(k-1)} x_n^{(k-1)}$ .....(4.1-4)

Analog dengan persamaan (4.1-4), maka dapat ditentukan jumlah individu perempuan pada kelompok umur ke-(i+1) pada pengamatan waktu k, yaitu total jumlah individu perempuan pada kelompok umur ke-i pada pengamatan waktu k-1, yang masih hidup sampai pengamatan waktu k untuk k = 1,2,3…

Misalkan c_i adalah rata-rata jumlah kematian dari tiap kelompok umur, maka

$c_i = D_i / x_i$ ......(4.1-5)

dengan D_i adalah jumlah kematian perempuan pada kelompok umur ke-i, i = 1,2,…,n.

Dari persamaan (4.1-5) kita peroleh

$D_i = c_i \cdot x_i$ ......(4.1-6)

Jadi $x_{i+1}^{(k)}$ adalah jumlah individu perempuan pada kelompok umur ke-i dengan i=1,2,…n pada pengamatan waktu k-1 dikurangi jumlah kematian perempuan pada kelompok umur ke-i pada pengamatan waktu k-1.

$$x_{i+1}^{(k)} = x_i^{(k-1)} - D_i^{(k-1)} \qquad ......(4.1\text{-}7)$$

Berdasarkan (4.1-6) untuk pengamatan waktu ke k-1 diperoleh

$$D_i^{(k-1)} = c_i^{(k-1)} x_i^{(k-1)} \qquad ....(4.1\text{-}8)$$

Persamaan (4.1-7) dapat ditulis sebagai

$$x_{i+1}^{(k)} = x_i^{(k-1)} - c_i^{(k-1)} x_i^{(k-1)}$$

atau,

$$x_{i+1}^{(k)} = \left(1 - c_i^{(k-1)}\right) x_i^{(k-1)} \qquad ....(4.1\text{-}9)$$

dimana (1 - $c_i^{(k-1)}$) merupakan peluang jumlah perempuan pada kelompok umur ke-i pada pengamatan waktu k-1 yang mampu bertahan hidup sampai ke kelompok umur ke-(i+1) sampai pengamatan waktu k untuk k=1,2,…

Jika dimisalkan $d_i^{(k-1)} = (1 - c_i^{(k-1)})$ dengan $0 < d_i \leq 1$, i =1,2,…,n

maka persamaan (4.1-9) dapat ditulis menjadi

$$x_{i+1}^{(k)} = d_i^{(k-1)} x_i^{(k-1)}, \ i=1,2,\ldots,n$$

…(4.1-10)

Selanjutnya berdasarkan persamaan (4.1-4) dan (4.1-10) dapat disusun suatu sistem persamaan sebagai berikut.

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(k)} &= b_1^{(k-1)} x_1^{(k-1)} + b_2^{(k-1)} x_2^{(k-1)} + \cdots + b_n^{(k-1)} x_n^{(k-1)} \\ x_{i+1}^{(k)} &= d_i^{(k-1)} x_i^{(k-1)}, \qquad i = 1,2,\ldots,n \end{aligned}\right\}$$

atau,

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(k)} &= b_1^{(k-1)} x_1^{(k-1)} + b_2^{(k-1)} x_2^{(k-1)} + \cdots + b_n^{(k-1)} x_n^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} &= d_1^{(k-1)} x_1^{(k-1)} \\ x_3^{(k)} &= d_2^{(k-1)} x_2^{(k-1)} \\ &. \\ &. \\ &. \\ x_n^{(k)} &= d_{n-1}^{(k-1)} x_{n-1}^{(k-1)} \end{aligned}\right\}$$

Berdasarkan dari pembahasan di atas dengan menggunakan notasi matriks maka sistem persamaan linear tersebut dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ . \\ . \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(k-1)}x_1^{(k-1)} & + & b_2^{(k-1)}x_2^{(k-1)} & + \ldots + & b_{n-1}^{(k-1)}x_{n-1}^{(k-1)} & + & b_n^{(k-1)}x_n^{(k-1)} \\ d_1^{(k-1)}x_1^{(k-1)} & + & 0 & + \ldots + & 0 & + & 0 \\ 0 & + & d_2^{(k-1)}x_2^{(k-1)} & + \ldots + & 0 & + & 0 \\ . & & . & \ldots & . & & . \\ . & & . & & . & & . \\ 0 & + & 0 & + \ldots + & d_{n-1}^{(k-1)}x_{n-1}^{(k-1)} & + & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ . \\ . \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(k-1)} & b_2^{(k-1)} & b_3^{(k-1)} & \ldots & b_{n-1}^{(k-1)} & b_n^{(k-1)} \\ d_1^{(k-1)} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & d_2^{(k-1)} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & & . & . \\ . & . & . & & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & d_{n-1}^{(k-1)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k-1)} \\ . \\ . \\ x_n^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

Secara ringkas dapat ditulis,

$$X^{(k)} = L^{(k-1)} X^{(k-1)} \qquad .... (4.1\text{-}11)$$

Simpulan

Penerapan diagonalisasi matriks untuk menyelesaikan masalah genetika dapat menggunakan nilai eigen dan vektor eigen, diagonalisasi matriks, serta limit untuk mengetahui sifat yang muncul pada individu di dalam suatu generasi. Untuk diagonalisasi matriks, rumus yang digunakan adalah D=PMP^{-1}, D merupakan matriks diagonal. Sedangkan M adalah matriks yang diperoleh dari distribusi genotip dari suatu perkawinan dan matriks P adalah matriks yang kolom-kolomnya adalah vektor eigen dari matriks M.

Aplikasi diagonalisasi matriks untuk menyelidiki pewarisan genotip pada generasi ke-n adalah sebagai berikut: (1) membentuk sistem persamaan linear yang menjelaskan peluang dari masing-masing genotip sedemikian sehingga didapatkan persamaan dalam notasi matriks; (2) membentuk matriks M di mana yang entri-entri nya merupakan matriks koefisien dari sistem persamaan linear a_n,b_n,dan c_n dengan a_n adalah banyaknya bagian dari keturunan yang bergenotip AA dalam generasi ke-n, b_n adalah banyaknya bagian dari keturunan yang bergenotip Aa dalam generasi ke-n dan c_n adalah banyaknya bagian dari keturunan yang bergenotip aa dalam generasi ke-n. Dicari nilai-nilai eigen dari matriks M sehingga diperoleh pula vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen tersebut; (3) membentuk matriks P yang merupakan matriks pendiagonal dari matriks M yang vektor-vekor kolomnya merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen tersebut; (4) substitusikan matriks M dengan matriks D yang sudah terlebih dahulu didiagonalisasi oleh matriks P; (5) menyelesaikan persamaan distribusi genotip dalam generasi ke-n; (6) Membentuk sebuah persamaan eksplisit; (7) menyelesaikan persamaan distribusi genotip dalam generasi ke-n, membentuk sebuah persamaan eksplisit, dicari limit dari masing-masing persamaan untuk n menuju tak hingga.

Jumlah populasi perempuan pada

pengamatan waktu k ($\boldsymbol{X}^{(k)}$) dapat diproyeksikan dalam masing-masing kelompok umur ke-i sampai kelompok umur ke-n ($x_i^k, i=1,2,\ldots,n$) dengan menggunakan matriks Leslie jika diketahui (1) rata-rata kelahiran individu perempuan dari populasi perempuan dalam kelompok umur ke-i pada pengamatan waktu k-1 ($b_i^{(k-1)}$); (2) peluang banyak individu perempuan dari populasi perempuan dalam kelompok umur ke-i yang mampu bertahan hidup sampai memasuki umur i+1 pada pengamatan waktu k-1 ($d_i^{(k-1)}$); (3) jumlah individu perempuan pada kelompok umur ke-i sampai kelompok umur ke-n pada pengamatan waktu k-1 ($\boldsymbol{X}^{(k-1)}$). Vektor jumlah individu perempuan pada kelompok 1,2,..n yaitu $\boldsymbol{X}^{(k)}$ memenuhi hubungan $\boldsymbol{X}^{(k)} = \boldsymbol{L}^{(k)}\,\boldsymbol{X}^{(k-1)}$.

dengan $\boldsymbol{X}^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ . \\ . \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}$ dan

$$\boldsymbol{L}^{(k-1)} = \begin{bmatrix} b_1^{(k-1)} & b_2^{(k-1)} & b_3^{(k-1)} & \ldots & b_{n-1}^{(k-1)} & b_n^{(k-1)} \\ d_1^{(k-1)} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & d_2^{(k-1)} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & & . & . \\ . & . & . & & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & d_{n-1}^{(k-1)} & 0 \end{bmatrix}$$

Ucapan Terimakasih

Penulis mengucapkan terimakasih kepada semua pihak maupun instansi yang sudah membantu dalam penulisan skripsi ini. Penulis menyadari bahwa dengan keterbatasan pengetahuan dan kemampuan yang penulis miliki. Untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran pembaca. Akhirnya penulis mengharapkan semoga penelitian ini dapat berguna dan bermanfaat bagi kita semua.

Daftar Pustaka

Anton, H dan C. Rosses. 2004. *Aljabar Linear Elementer, Versi Aplikasi, Edisi Kedelapan Jilid I*. Alih bahasa Refina Indriasari dan Irzam Harmein. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Anton, Howard.1988. *Aljabar linear elementer edisi ketiga*. Jakarta: Erlangga.

Ayres, F.2005. *Matriks (versi SI/Metrik)*.Jakarta:Erlangga.

Ayres. Frank. 1974. *Schaum's Outline Series Theory and Problems of Matrices*. Singapore: McGraw-Hill International Book Company.

Ayres, Frank. 1984. Seri Buku Schaum Teori dam Soal-soal Matriks. Alih bahasa Hans J. Wospakrik. Jakarta:Erlangga.

Budhi, Wono S. 1995. *Aljabar Linear*. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama.

Cullen, Charles. 1993. *Aljabar Linear dengan penerapannya*. Jakarta: Gramedia Pustaka Utama.

Hadley. G. 1992. Aljabar Linear Edisi Revisi. Jakarta: Erlangga.

Lipschutz,Seymour & Marc L. 2006. *Teori dan Soal Aljabar Linear edisi ketiga*. Jakarta:Erlangga.

Leon, J. Steven. 2001. Aljabar Linier dan Aplikasinya Edisi Kelima. Jakarta: Erlangga.

Pratono, Soegeng dan Retno Sri Iswari, SU. 1994. *Biologi Umum TPB II*. Semarang: FMIPA IKIP.

Purwanto, Heri, dkk. 2005. *Aljabar Linier*. Jakarta: Ercontara Rajawali.

Rondonuwu, Suleman. 1989. *Dasar-Dasar Genetika*. Jakarta: Depdikbud.

Kristina Wijayanti. 1997. "Penerapan Diagonalisasi Matriks dalam Genetika Terapan". *Cakrawala Pendidikan*. XVI. Yogyakarta: Pusat pengabdian pada masyarakat.

Simanihuruk, Mudin., Hartanto. 2005. Karakteristik matriks leslie ordo tiga. J. *Gradien*. 2(1): 134-138.