



## **PEMODELAN MATEMATIKA PADA PENYEBARAN PENYAKIT DIFTERI DENGAN PENGARUH KARANTINA DAN VAKSINASI**

**Gina Puspita<sup>✉</sup>, Muhammad Kharis , Supriyono**

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Indonesia  
Gedung D7 Lt. 1, Kampus Sekaran Gunungpati, Semarang 50229

---

### **Info Artikel**

Sejarah Artikel:

Diterima Mei 2016

Disetujui Agustus 2016

Dipublikasikan Mei 2017

---

*Keywords:*

*Diphtheria;*

*Mathematic model;*

*Quarantined;*

*Vaccination.*

---

### **Abstrak**

Penyakit menular di Indonesia merupakan penyakit yang penularannya sangat cepat salah satunya penyakit menular difteri. Agar tidak meluasnya penyebaran penyakit menular program vaksinasi dan karantina diintensifkan. Tujuan penelitian adalah menurunkan, menganalisis, dan menginterpretasikan simulasi model matematika penyebaran penyakit difteri dengan pengaruh karantina dan vaksinasi. Dalam pembangunan model diperoleh model matematika. Dari model tersebut diperoleh bilangan reproduksi ( $R_0$ ), titik kesetimbangan endemik berbeda yang stabil untuk  $R_0 > 1$  dan memiliki titik kesetimbangan tak endemik sama yang stabil untuk  $R_0 < 1$  dan tak stabil untuk  $R_0 > 1$ . Agar penyebaran penyakit dapat dicegah dengan sukses maka tingkat vaksinasi harus lebih dari 0,884 dan tingkat  $\alpha$  harus lebih dari 0,049 sehingga penyakit secara berangsur-angsur akan menghilang dari populasi.

---

### **Abstract**

*Infectious disease in Indonesia is a disease that is transmitted very quickly one infectious disease diphtheria. To avoid the spread of infectious diseases and quarantine pressed vaccination programs to prevent the spread of diseases research objective is to reduce, analyze, and interpret mathematical models simulating the spread of diphtheria with the influence of quarantine and vaccination. In the construction of the model is obtained mathematical models. The models derived from reproduction number ( $R_0$ ), different endemic equilibrium point stable for  $R_0 > 1$  and have the same endemic equilibrium point is not stable for  $R_0 < 1$  and unstable for  $R_0 > 1$ . In order for the spread of disease can be prevented with a vaccination rate to be successful it is more than 0.884 and  $\alpha$  levels should be more than 0,049 so that the disease will gradually disappear from the population.*

---

### **How to Cite**

Puspita G., Kharis M., & Supriyono. (2017). Pemodelan Matematika pada Penyebaran Penyakit Difteri dengan Pengaruh Karantina dan Vaksinasi. *Unnes Journal of Mathematics*, 6(1), 25-35.

## PENDAHULUAN

Pada negara berkembang khususnya Indonesia, kesehatan masih menjadi beban ganda dikarenakan penyakit menular yang kini penyeberannya sangat cepat. Salah satunya adalah penyakit menular difteri. Penyakit difteri merupakan salah satu penyakit yang sangat menular (*contagious disease*) yang menyerang pada saluran pernafasan bagian atas. Penyakit ini akibat terjangkit bakteri yang bersumber dari *Corynebacterium Diphtheriae*.

Di negara berkembang menurut *World Health Organization (WHO)* tahun 2013 terbanyak di dunia dan Indonesia merupakan negara tertinggi kedua setelah India dan selalu mengalami peningkatan tiap tahunnya. Berdasarkan data dari WHO, penyebaran penyakit difteri dapat ditekan dengan program vaksinasi. Sampai saat ini, program vaksinasi masih dipercaya sebagai cara yang paling efektif dalam menekan penyebaran penyakit difteri.

Salah satu cabang dari ilmu matematika modern yang penting dan mempunyai cakupan wilayah penelitian yang luas adalah persamaan diferensial. Persamaan diferensial merupakan cabang dari matematika yang cukup strategis karena berkaitan dengan bagian-bagian sentral dalam Aljabar, Analisis, Geometris, dan lainnya yang akan sangat berperan dalam pengenalan konsep maupun pemecahan masalah yang berkaitan dengan dunia nyata (Waluya, 2006).

Konsep persamaan diferensial juga seringkali digunakan untuk memodelkan masalah-masalah yang berkaitan dengan ilmu kesehatan. Salah satu masalah yang dapat dimodelkan dengan persamaan diferensial sebagai cabang ilmu matematika modern yakni penyebaran penyakit menular. Hal itu dijelaskan dalam Lekone & Finkestt (2006) yang mengatakan bahwa model matematika muncul sebagai alat yang berharga untuk memperoleh pengetahuan dari dinamika penyebaran penyakit menular.

Salah satu model matematika epidemik untuk menganalisis penyebaran penyakit di antaranya adalah *SIR*. Model epidemi *SIR* dikenalkan oleh Kermack dan McKendrik pada tahun 1929. Hethcote (2000) menyebutkan bahwa pada model *SIR* populasi dibagi menjadi tiga kelompok yakni kelompok individu yang rentan penyakit (*susceptible*), kelompok individu yang terinfeksi (*infected*), dan kelompok individu yang telah sembuh dan kebal dari penyakit (*recovered*).

Penelitian tentang model matematika terhadap penyebaran penyakit difteri juga dilakukan oleh Wulandari (2013), dalam kajiannya model yang dibentuk adalah model

*MSEIR* dengan kompartemen *M* adalah pengaruh imun pasif yang telah dimiliki pada saat baru lahir dan kompartemen *E* adalah periode laten atau masa inkubasi yang terjadi selama 5 hari yang relatif singkat sehingga untuk dua kelas tersebut tidak berpengaruh. Model yang akan diteliti dalam penelitian ini yaitu *SIQR* yang merupakan pengembangan model *SIR* dengan upaya karantina untuk mengendalikan penyebaran penyakit difteri. Penelitian tentang pengaruh karantina juga pernah dilakukan oleh peneliti-peneliti sebelumnya yaitu Jumpen & Tiantian. Pengaruh karantina untuk penyakit menular anak-anak juga pernah dilakukan oleh peneliti terdahulu (Gerberry, 2009).

Penelitian-penelitian terkait model penyebaran penyakit dengan tindakan vaksinasi dapat dilihat pada Kholisoh *et al* (2012), Anggoro *et al* (2013), Nashrullah *et al* (2013), dan Aulia (2016). Tujuan dari penelitian ini menurunkan model, menganalisis dan menginterpretasikan simulasi model matematika pada penyebaran penyakit difteri dengan pengaruh karantina dan vaksinasi.

## METODE

Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah studi literatur atau kajian pustaka dengan tahap-tahap : (1) penentuan masalah, (2) perumusan masalah, (3) studi pustaka, (4) analisis dan pemecahan masalah, (5) penarikan kesimpulan. Pemilihan dan perumusan masalah diperlukan untuk membatasi permasalahan sehingga diperoleh bahan kajian yang jelas. Sehingga akan lebih mudah untuk menentukan langkah dalam memecahkan masalah tersebut. Tahap studi pustaka dilakukan dengan mengkaji sumber-sumber pustaka sehingga diperoleh gambaran umum penyakit difteri, model matematika, model epidemik *SIR*, sistem persamaan diferensial, titik ekuilibrium, nilai eigen dan vektor eigen, analisis kestabilan titik ekuilibrium dan simulasi model dengan *software Maple*. Dalam pembahasan masalah dilakukan beberapa langkah pokok yaitu sebagai berikut. (1) Menurunkan model matematika pada penyebaran penyakit difteri dengan pengaruh karantina dan vaksinasi (2) Mencari titik kesetimbangan dari model matematika, (3) Menentukan bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ), (4) Menganalisis kestabilan titik kesetimbangan, (5) Menginterpretasikan solusi model matematika.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada penyebaran penyakit difteri, populasi manusia dapat diklasifikasikan menjadi empat klas yang terdiri dari klas *susceptible* meliputi individu yang rentan dinotasikan dengan *S*, klas

*infected* meliputi individu yang terinfeksi dinotasikan dengan  $I$ , klas *quarantined* meliputi individu yang dikarantina dinotasikan dengan  $Q$ , dan klas *recovered* meliputi individu yang telah sembuh dinotasikan dengan  $R$ .

Pada model matematika penyebaran penyakit difteri ini diberikan batasan atau asumsi: (1) Jumlah populasi diasumsikan cukup besar. (2) Laju kelahiran dan laju kematian diasumsikan sama, sehingga total populasi diasumsikan konstan.(3) Populasi diasumsikan tertutup (tidak ada proses emigrasi dan imigrasi).(4) Setiap individu yang baru lahir diasumsikan dalam keadaan sehat tetapi masih dapat terinfeksi penyakit karena belum kebal terhadap penyakit. (5) Penyakit difteri menular melalui kontak langsung dengan penderita. (6) Diasumsikan hanya terdapat satu penyakit yang menyebar dalam populasi. (7) Individu yang terinfeksi dapat sembuh dari penyakit dan dapat meninggal akibat penyakit. (8) Setiap anak yang lahir rentan dari imun pasif (*maternal antibodies*) karena tidak bekerja efektif disebabkan waktu yang relatif singkat. (9) Setiap individu yang sembuh dari infeksi pasti melalui proses karantina.

Untuk vaksinasinya diberikan asumsi : (1) Vaksin hanya diberikan pada individu yang baru lahir. (2) Keampuhan vaksinasi adalah 100%. Hal tersebut berarti setiap individu yang telah mendapatkan vaksin akan kebal dari penyakit. (3) Kekebalan yang terjadi karena vaksin bersifat pemanen. Hal tersebut berarti individu yang mendapat vaksin tidak dapat terinfeksi oleh penyakit yang sama sampai waktu yang tidak terbatas. Dari kedua model diperoleh daftar variabel-variabel yang disajikan dalam Tabel 1.

Tabel 1. Daftar Variabel-variabel

Variabel	Keterangan	Syarat
$N(t)$	Banyak populasi pada waktu $t$	$N(t) \geq 0$
$S(t)$	Banyak individu yang rentan terinfeksi penyakit pada waktu $t$	$S(t) \geq 0$
$I(t)$	Banyak individu yang terinfeksi penyakit pada waktu $t$	$I(t) \geq 0$
$Q(t)$	Banyak individu yang di karantina pada waktu $t$	$Q(t) \geq 0$

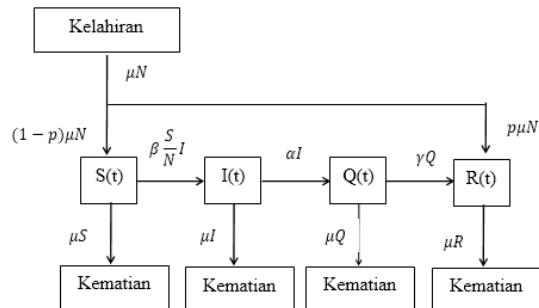
Dari model diperoleh daftar parameter-parameter yang disajikan dalam Tabel 2.

Tabel 2. Daftar Parameter-parameter

Parameter	Keterangan	Syarat
$M$	Laju kelahiran dan laju kematian	$\mu > 0$

P	Proporsi individu yang divaksinasi	$0 \leq p \leq 1$
B	Peluang antara individu yang rentan dengan individu yang terinfeksi	$\beta > 0$
A	Laju individu yang dikarantina tiap satuan waktu	$\alpha > 0$
$\Gamma$	Laju kesembuhan	$\gamma > 0$
M	Laju kelahiran dan laju kematian	$\mu > 0$

Diagram transfer penyebaran penyakit difteri dengan pengaruh karantina dan vaksinasi disajikan dalam Gambar 1.



Gambar 1. Diagram Transfer Penyebaran Penyakit Difteri dengan Pengaruh Karantina dan Vaksinasi

Model epidemi SIQR diberikan pada sistem 1

$$\frac{dS}{dt} = (1-p)\mu N - \beta \frac{S}{N} I,$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta S \frac{I}{N} - \mu I - \alpha I,$$

$$\frac{dQ}{dt} = \alpha I - \mu Q - \gamma Q,$$

$$\frac{dR}{dt} = p\mu N + \gamma Q - \mu R,$$

$$N = S + I + Q + R.$$

Karena  $N(t)$  konstan, sistem diatas dapat disederhanakan dengan menghitung proporsi untuk masing-masing kelas. Proporsi banyak individu pada masing-masing kelompok dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$s = \frac{S}{N}, i = \frac{I}{N}, q = \frac{Q}{N}, r = \frac{R}{N}.$$

Diperoleh

$$s + i + q + r = \frac{S}{N} + \frac{I}{N} + \frac{Q}{N} + \frac{R}{N} = \frac{N}{N} = 1.$$

Sehingga dapat dituliskan sebagai Sistem (2)

$$\frac{ds}{dt} = (1-p)\mu - \mu s - \beta s i,$$

$$\frac{di}{dt} = \beta s i - \mu i - \alpha i,$$

$$\frac{dq}{dt} = \alpha i - \mu q - \gamma q,$$

$$\frac{dr}{dt} = p\mu + \gamma q - \mu r.$$

$$s + i + q + r = 1.$$

Selanjutnya dilakukan analisis terhadap model matematika pada Sistem (2) untuk menentukan titik ekuilibriumnya. Untuk menentukan titik ekuilibriumnya, masing-masing persamaan pada Sistem (2) dibuat menjadi nol.

Dari persamaan kedua Sistem (2) diperoleh

$$\begin{aligned} \beta s i - \mu i - \alpha i &= 0 \\ \Leftrightarrow (\beta s - \mu - \alpha)i &= 0 \\ \Leftrightarrow i &= 0 \vee s = \frac{\mu + \alpha}{\beta} \end{aligned} \quad (3)$$

Dari persamaan pertama Sistem (2)

$$\begin{aligned} \text{Untuk kasus } i = 0 : \\ (1-p)\mu - \mu s - \beta s i &= 0 \\ \Leftrightarrow (1-p)\mu - \mu s - \beta s \cdot 0 &= 0 \\ \Leftrightarrow (1-p)\mu - \mu s &= 0 \\ \Leftrightarrow ((1-p) - s)\mu &= 0 \\ \Leftrightarrow (1-p) - s &= 0 \\ \Leftrightarrow s &= 1 - p \end{aligned} \quad (4)$$

Dari persamaan ketiga Sistem (2) diperoleh

$$\begin{aligned} \alpha i - \mu q - \gamma q &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha i - (\mu + \gamma)q &= 0 \\ \Leftrightarrow q &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Substitusikan persamaan (5) ke dalam persamaan keempat dari Sistem (2) diperoleh

$$\begin{aligned} p\mu + \gamma q - \mu r &= 0 \\ \Leftrightarrow p\mu + \gamma \cdot 0 - \mu r &= 0 \\ \Leftrightarrow p\mu - \mu r &= 0 \\ \Leftrightarrow (p - r)\mu &= 0 \\ \Leftrightarrow p - r &= 0 \\ \Leftrightarrow r &= p \end{aligned} \quad (6)$$

Dengan demikian diperoleh titik keseimbangan bebas penyakit yaitu

$$E_0 = (s, i, q, r) = (1 - p, 0, 0, p)$$

Selanjutnya untuk menentukan titik keseimbangan endemik, diasumsikan  $i \neq 0$ . Misalkan  $E_1 = (s^*, i^*, q^*, r^*)$  merupakan titik keseimbangan endemik, sehingga Sistem (2) menjadi Sistem (7)

$$(1-p)\mu - \mu s^* - \beta s^* i^* = 0,$$

$$\beta s^* i^* - \mu i^* - \alpha i^* = 0,$$

$$\alpha i^* - \mu q^* - \gamma q^* = 0,$$

$$p\mu + \gamma q^* - \mu r^* = 0.$$

Untuk kasus  $i^* \neq 0$ :

$$\text{Dari persamaan (3) jelas } s^* = \frac{\mu + \alpha}{\beta} \quad (8)$$

Persamaan pertama dari Sistem (7) dapat menjadi  $i^* = \frac{(1-p)\mu - \mu s^*}{\beta s^*}$  diperoleh (9)

$$\begin{aligned} i^* &= \frac{(1-p)\mu - \mu \left( \frac{\mu + \alpha}{\beta} \right)}{\beta \left( \frac{\mu + \alpha}{\beta} \right)} \\ &= \frac{\mu \left[ \frac{\beta(1-p)}{\mu + \alpha} - 1 \right]}{\beta} \end{aligned}$$

Persamaan ketiga dari Sistem (7) dapat menjadi

$$q^* = \frac{\alpha i^*}{\mu + \gamma} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} q^* &= \frac{\alpha \left( \frac{\mu \left[ \frac{\beta(1-p)}{\mu + \alpha} - 1 \right]}{\beta} \right)}{\mu + \gamma} \\ &= \frac{\alpha \mu \left[ \frac{\beta(1-p)}{\mu + \alpha} - 1 \right]}{\beta(\mu + \gamma)} \end{aligned}$$

Persamaan keempat dari Sistem (7) dapat menjadi  $r^* = \frac{p\mu + \gamma q^*}{\mu}$  diperoleh

$$\begin{aligned} r^* &= \frac{p\mu + \gamma \frac{\alpha \mu \left[ \frac{\beta(1-p)}{\mu + \alpha} - 1 \right]}{\beta(\mu + \gamma)}}{\mu} \\ &= \frac{p + \left( \gamma \alpha \left( \frac{\beta(1-p)}{\mu + \alpha} - 1 \right) \right)}{\beta(\mu + \gamma)} \end{aligned}$$

Jadi diperoleh titik keseimbangan endemik  $E_1 = (s^*, i^*, q^*, r^*)$  dengan

$$s^* = \frac{\mu + \alpha}{\beta}, i^* = \frac{\mu \left[ \frac{\beta(1-p)}{\mu + \alpha} - 1 \right]}{\beta},$$

$$q^* = \frac{\alpha \mu \left[ \frac{\beta(1-p)}{\mu + \alpha} - 1 \right]}{\beta(\mu + \gamma)},$$

$$r^* = \frac{p + \left( \gamma \alpha \left( \frac{\beta(1-p)}{\mu+\alpha} - 1 \right) \right)}{\beta(\mu+\gamma)},$$

Untuk menganalisis  $E_1$  diperlukan bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) untuk mengetahui apakah penyakit difteri akan menyebar atau tidak. Pada sistem (7) diperoleh

$R_0 = \frac{\beta(1-p)}{\mu+\alpha}$  Berdasarkan  $R_0$  dari sistem (7) diperoleh titik kesetimbangan  $E_1 = (s^*, i^*, q^*, r^*)$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\mu+\alpha}{\beta}, & \frac{\mu}{\beta}(R_0-1), \\ \frac{\alpha\mu}{\beta(\mu+\gamma)}(R_0-1), & \frac{p+\gamma\alpha}{\beta(\mu+\gamma)}(R_0-1) \end{pmatrix}$$

Analisis eksistensi titik kesetimbangan dilakukan untuk memperoleh batas  $R_0$  dimana terdapat titik kesetimbangan  $E_0$  atau  $E_1$ . Dari hasil analisis eksistensi titik kesetimbangan sistem (7) diperoleh Teorema 1.

### Teorema 1

Dipunyai  $R_0 = \frac{\beta(1-p)}{\mu+\alpha}$ .

Dari sistem (7), berdasarkan nilai  $R_0$  tersebut diperoleh

(1) Jika  $R_0 \leq 1$ , maka sistem (7) hanya mempunyai 1 titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0 = (1-p, 0, 0, p)$

(2) Jika  $R_0 > 1$ , maka sistem (7) hanya mempunyai 2 titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0 = (1-p, 0, 0, p)$  dan titik kesetimbangan endemik  $E_1 = (s^*, i^*, q^*, r^*)$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\mu+\alpha}{\beta}, & \frac{\mu}{\beta}(R_0-1), \\ \frac{\alpha\mu}{\beta(\mu+\gamma)}(R_0-1), & \frac{p+\gamma\alpha}{\beta(\mu+\gamma)}(R_0-1) \end{pmatrix}$$

Kestabilan kedua titik kesetimbangan yang diperoleh dari masing-masing sistem dianalisis dengan menggunakan nilai eigen dari matriks jacobian sistem (2). Berikut ini merupakan analisis kestabilan titik kesetimbangan sistem (2). Pada mulanya dibentuk matriks jacobian dari sistem (2) sehingga diperoleh

$$J^*(E) = \begin{pmatrix} -\mu - \beta i & -\beta s & 0 & 0 \\ \beta i & -\mu - \alpha + \beta s & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\mu - \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{pmatrix}$$

Kemudian berdasarkan matriks jacobian, dianalisis pada kedua titik ekuilibrium. Sehingga diperoleh matriks jacobian pada titik non-endemik  $E_0$  sebagai berikut.

$$J^*(E_0) = \begin{pmatrix} -\mu & -\beta(1-p) & 0 & 0 \\ 0 & -\mu - \alpha + \beta(1-p) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\mu - \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{pmatrix}$$

Dari jacobian titik ekuilibrium  $P_0$  diperoleh nilai eigen sebagai berikut.

$$\lambda_1 = -\mu$$

$$\lambda_2 = -\mu$$

$$\lambda_3 = -(\mu + \gamma)$$

Kemudian dianalisis untuk  $\lambda_4$ .

$$(\lambda + \mu + \alpha - \beta(1-p)) = 0$$

Jadi nilai eigennya

$$\lambda_4 = \beta(1-p) - (\mu + \alpha)$$

$$= (\mu + \alpha)(R_0 - 1)$$

Jelas  $\lambda_4 = 0$  apabila  $R_0 = 1$  yang berakibat titik  $E_0$  tidak hiperbolik. Berdasarkan definisi titik hiperbolik, berakibat dinamika sistem linier dari sistem (2) tidak dapat menggambarkan dinamika sistem (2) tersebut. Berdasarkan uraian di atas diperoleh Teorema 5.

### Teorema 5

Diberikan  $R_0 = \frac{\beta(1-p)}{\mu+\alpha}$  dan titik ekuilibrium  $E_0 = (s, i, q, r) = (1-p, 0, 0, p)$ .

- 1) Jika  $R_0 < 1$  maka titik kesetimbangan  $E_0$  stabil asimtotik lokal,
- 2) Jika  $R_0 > 1$  maka titik kesetimbangan  $E_0$  tidak stabil.

Selanjutnya dianalisis matriks jacobian untuk mengetahui kestabilan titik ekuilibrium endemik  $E_1$ .

$$J^*(E_1) = \begin{pmatrix} -\mu - \beta i^* & -\beta s^* & 0 & 0 \\ \beta i^* & -\mu - \alpha + \beta s^* & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\mu - \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{pmatrix}$$

Persamaan karakteristik untuk matriks jacobian di atas

$$(\lambda + \mu)(\lambda + \mu + \gamma) \{ \lambda^2 + (\mu + \beta i^* + \mu + \alpha - \beta s^*)\lambda + (\mu^2 + \mu\alpha - \beta\mu s^* + \mu\beta i^* + \alpha\beta i^*) \} = 0$$

Diperoleh jelas  $\lambda_1 = -\mu$  dan  $\lambda_2 = -(\mu + \gamma)$

Akan dianalisis bagian real nilai eigen persamaan

$$\lambda^2 + (\mu + \beta i^* + \mu + \alpha - \beta s^*)\lambda + (\mu^2 + \mu\alpha - \beta\mu s^* + \mu\beta i^* + \alpha\beta i^*) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + (\mu R_0)\lambda + (\mu + \alpha)\mu(R_0 - 1) = 0$$

Didefinisikan  $a = 1, b = \mu R_0$ ,

$$c = (\mu + \alpha)\mu(R_0 - 1)$$

Jelas akar-akar persamaannya adalah

$$\lambda_{3,4} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \text{ dengan}$$

$$D = \mu^2 R_0^2 - 4\mu(\mu + \alpha)R_0 + 4\mu(\mu + \alpha)$$

$$\text{Diasumsikan } (\mu R_0 - 2(\mu + \alpha))^2 > 4\alpha(\mu + \alpha)$$

Ditunjukkan  $D > 0$

$$\text{Jelas } (\mu R_0 - 2(\mu + \alpha))^2 > 4\alpha(\mu + \alpha)$$

$$\Leftrightarrow \mu^2 R_0^2 - 4\mu(\mu + \alpha)R_0 + 4\mu(\mu + \alpha) > 0$$

$$\Leftrightarrow D > 0$$

Akan ditunjukkan  $\lambda_{3,4} < 0$

$$\text{Jelas } \lambda_3 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} < 0$$

$$\text{Jelas } b^2 > D > 0 \Leftrightarrow b > \sqrt{D}$$

$$\Leftrightarrow -b + \sqrt{D} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} < 0$$

Jadi  $\lambda_4 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} < 0$  dengan syarat

$$(\mu R_0 - 2(\mu + \alpha))^2 > 4\alpha(\mu + \alpha)$$

Diperoleh  $\lambda_3 < 0$  dan  $\lambda_4 < 0$  apabila

$$(\mu R_0 - 2(\mu + \alpha))^2 > 4\alpha(\mu + \alpha)$$

Berdasarkan analisa di atas diperoleh semua nilai eigen matriks jacobian  $J^*(E_1)$  bernilai negatif dengan syarat

$(\mu R_0 - 2(\mu + \alpha))^2 > 4\alpha(\mu + \alpha)$ . Diperoleh Teorema 3 sebagai berikut.

Teorema 3

Diberikan  $R_0 = \frac{\beta(1-p)}{\mu+\alpha}$  dan titik ekilibrium

$$E_1 = (s^*, i^*, q^*, r^*)$$

$$= \left( \frac{\mu+\alpha}{\beta}, \frac{\mu}{\beta}(R_0 - 1), \frac{\mu\alpha}{\beta(\mu+\gamma)} \cdot (R_0 - 1), \frac{p+\gamma\alpha}{\beta(\mu+\gamma)}(R_0 - 1) \right).$$

Jika  $R_0 > 1$  dan  $(\mu R_0 - 2(\mu + \alpha))^2 > 4\alpha(\mu + \alpha)$  maka titik kesetimbangan  $E_1$  stabil asimtotik lokal

Selanjutnya dilakukan interpretasi model ke dalam bentuk simulasi berbantuan *software* Maple. Simulasi diawali dengan memberikan nilai awal pada parameter-parameter dan mengubah-ubah nilai untuk parameter tertentu pada model matematika. Untuk model matematika pada penyebaran penyakit difteri dengan pengaruh karantina dan vaksinasi dimasukkan nilai parameter-parameter sebagai berikut.

$$\mu = 0,00138$$

$$\beta = 0,57$$

$$\alpha = 0,05$$

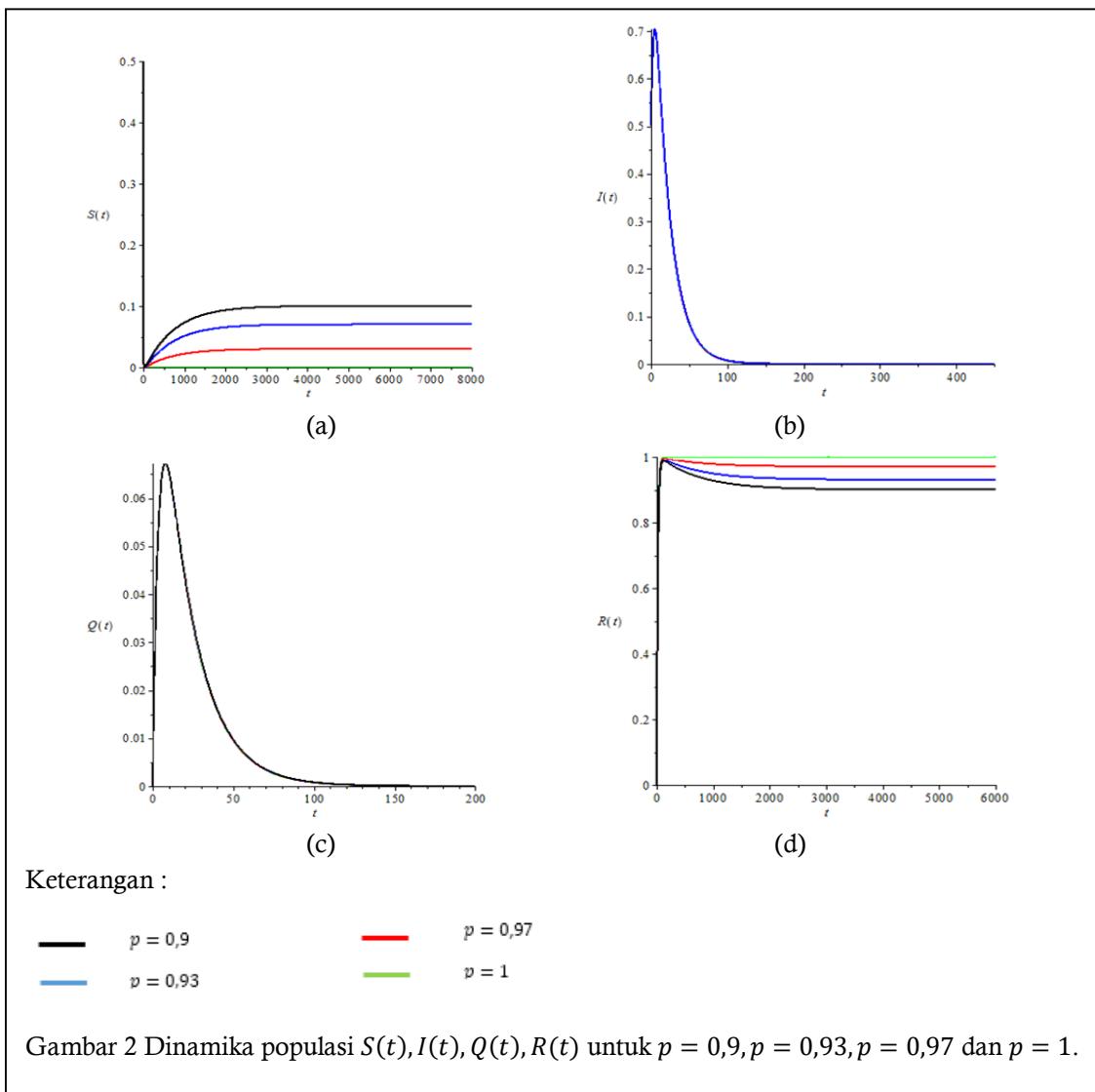
$$\gamma = 0,5$$

Dari nilai parameter di atas didapat nilai  $p$  minimum  $p = 0,878$ . Untuk pengaruh vaksinasi akan dianalisis rasio reproduksi dasar untuk tingkat vaksinasi lebih besar dari  $p = 0,878$  diberikan pada Tabel 3.

Tabel 3. Pengaruh nilai  $p$  dengan  $p > 88\%$  terhadap Rasio Reproduksi Dasar ( $R_0$ ) dengan  $\alpha = 0,05$

$p$	Rasio Reproduksi Dasar ( $R_0$ )
0,9	0,8174
0,93	0,5722
0,97	0,2452
1	0

Gambar 2 menunjukkan proporsi individu yang terinfeksi untuk tingkat vaksinasi yang bervariasi yang lebih besar dari tingkat vaksinasi minimum.

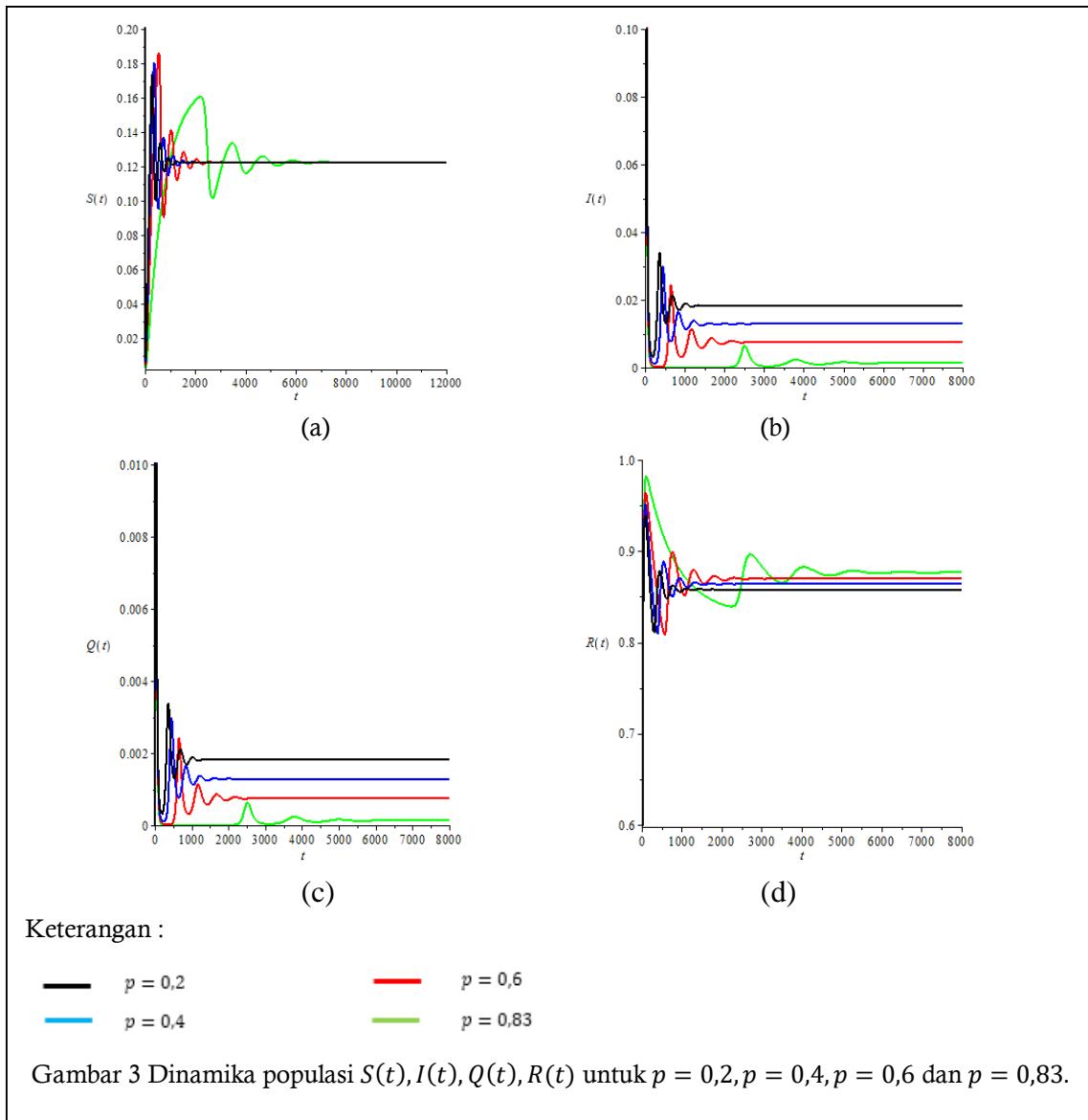


Selanjunya akan dianalisis rasio reproduksi dasar untuk tingkat vaksinasi lebih kecil dari  $p = 0,878$  diberikan pada Tabel 4.

Tabel 4 Pengaruh nilai  $p$  dengan  $p < 88\%$  terhadap Rasio Reproduksi Dasar ( $R_0$ ) dengan  $\alpha = 0,05$

$p$	Rasio Reproduksi Dasar ( $R_0$ )
0,2	6,5395
0,4	4,9046
0,6	3,2697
0,83	1,3896

Gambar 3 menunjukkan proporsi individu yang terinfeksi untuk tingkat vaksinasi yang bervariasi yang lebih kecil dari tingkat vaksinasi

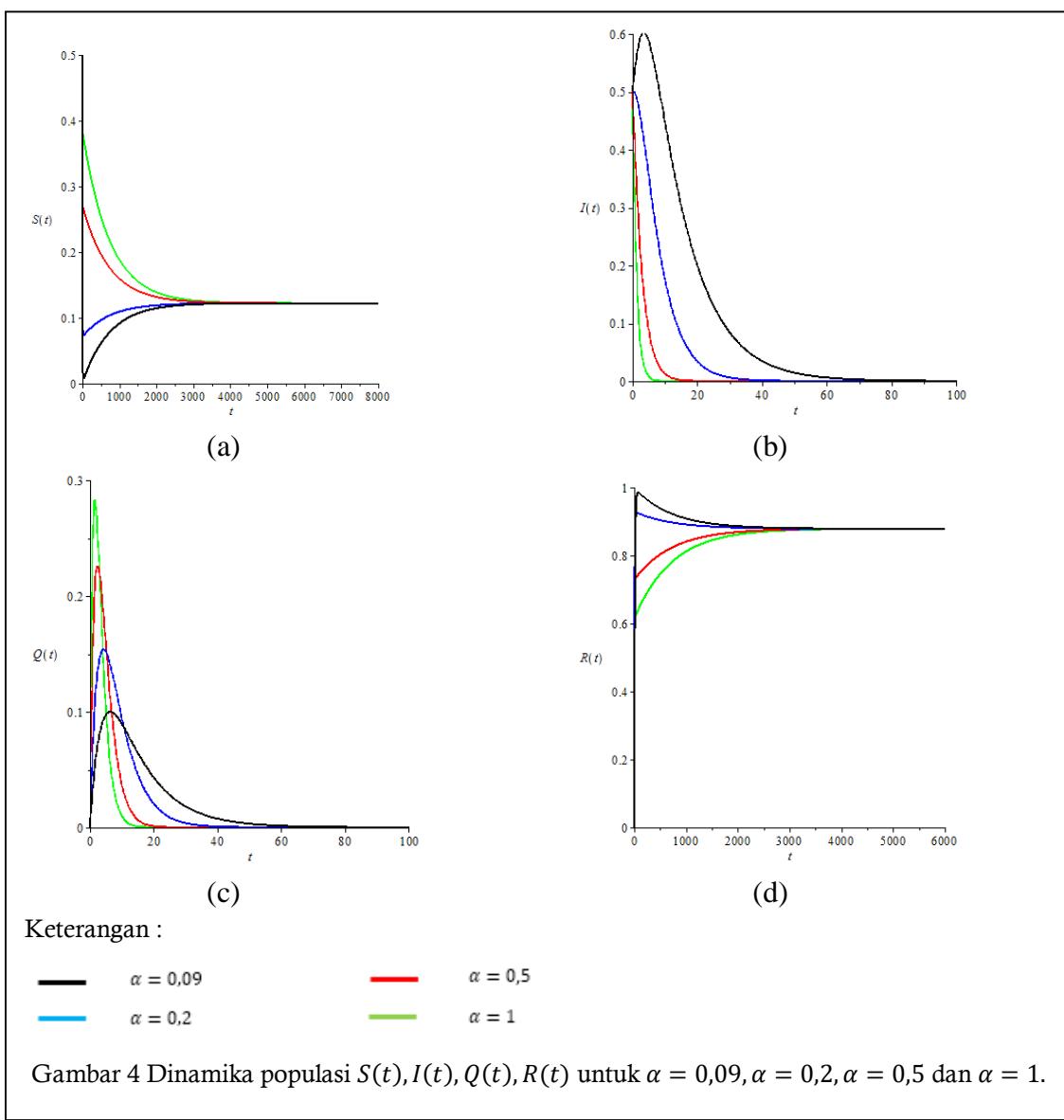


Dari nilai parameter di atas didapat nilai  $\alpha$  minimum  $\alpha = 0,049$ . Untuk pengaruh karantina akan dianalisis rasio reproduksi dasar untuk tingkat  $\alpha > 0,049$  diberikan pada Tabel 5

Tabel 5 Pengaruh nilai  $\alpha$  dengan  $\alpha > 4,9\%$  terhadap Rasio Reproduksi Dasar ( $R_0$ ) dengan  $p = 0,88$

$\alpha$	Rasio Reproduksi Dasar ( $R_0$ )
0,09	0,5607
0,2	0,2544
0,5	0,1021
1	0,0511

Gambar 4 menunjukkan proporsi individu yang terinfeksi untuk tingkat  $\alpha$  yang bervariasi yang lebih besar dari tingkat  $\alpha$  minimum.

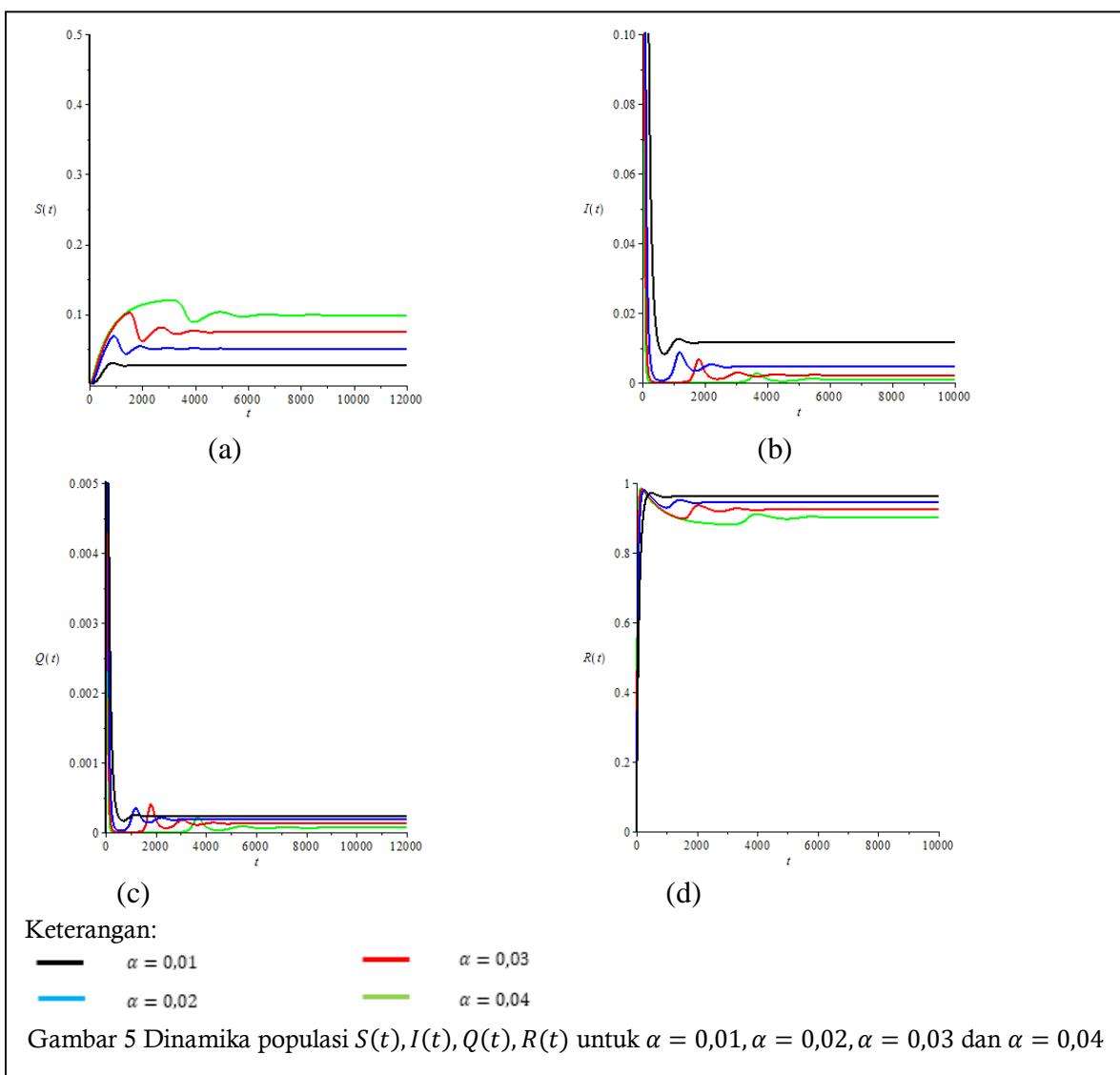


Selanjutnya untuk pengaruh karantina akan dianalisis rasio reproduksi dasar untuk tingkat  $\alpha < 0,049$  diberikan pada Tabel 6

Tabel 6 Pengaruh nilai  $\alpha$  dengan  $\alpha < 4,9\%$  terhadap Rasio Reproduksi Dasar ( $R_0$ ) dengan  $p = 0,88$

$\alpha$	Rasio Reproduksi Dasar ( $R_0$ )
0,01	4,5026
0,02	2,3966
0,03	1,6328
0,04	1,2382

Gambar 5 menunjukkan proporsi individu yang terinfeksi untuk tingkat  $\alpha$  yang bervariasi yang lebih kecil dari tingkat  $\alpha$  minimum.



## SIMPULAN

Dari penelitian diperoleh model matematika pada penyebaran penyakit difteri dengan pengaruh karantina dan vaksinasi. Analisis kedua model menghasilkan Teorema 1, Teorema 2, Teorema 3 mengenai  $R_0$ , titik kesetimbangan endemik dan nonendemik dan analisis kestabilan titik kesetimbangan endemik dan nonendemik.

Jika semakin tinggi tingkat vaksinasi dan semakin besar nilai  $\alpha$  maka rasio reproduksi dasar  $R_0$  akan semakin menurun. Namun, untuk  $p < 0,884$  dan  $\alpha < 0,049$  vaksinasi yang dilakukan belum berhasil membuat penyakit menghilang dari populasi karena nilai  $R_0 > 1$ . agar penyebaran penyakit dapat dicegah dengan sukses, maka  $p > 0,884$  dan  $\alpha > 0,049$  karena nilai  $R_0 < 1$  sehingga penyakit secara berangsur-

angsur akan menghilang dari populasi. Semakin besar tingkat vaksinasi dan individu yang dikarantina maka akan semakin cepat penyakit menghilang dari populasi atau individu akan cepat sembuh dari penyakit.

## DAFTAR PUSTAKA

- Anggoro, A.D., Kharis, M., dan Supriyono. 2013. Pemodelan SIRPS untuk Penyakit Influenza dengan Vaksinasi pada Populasi Konstan. *Unnes Journal of Mathematics*, 2(1): 55-63

- Aulia, N., Kharis, M., dan Supriyono. 2016. Pemodelan Matematika Epidemi Influenza dengan Memperhatikan Peluang Keberhasilan Vaksinasi dan

- Kekebalan Tetap. *Unnes Journal of Mathematics*, 5(2): 190-200
- Gerberry, D. J. 2009. An *SEIQR* model for childhood diseases. *Journal Mathematical Biology*. 59: 535-561
- Hethcote, H.W. 2000. *The Mathematic of Infectious Diseases*. SIAM Review, 42. No.4 5599-653.
- Jumpen, W. 2009. A *SEIQR* Model For Pandemic Its Parameter Identification. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. Volume 52 No. 2: 247-265.
- Kermack, W. O. dan McKendrick, A. G. 1927. *A contribution to the mathematical theory of epidemics*, Proceedings of the Royal Society of London, Part A 115(772): 700-721
- Kholisoh, S., Waluya, S.B., dan Kharis, M. 2012. Model Epidemi SEIR pada Penyebaran Penyakit Campak dengan Pengaruh Vaksinasi. *Unnes Journal of Mathematics*, 1(2): 110-117
- Lekone, P.E., dan B. F. Finkenstädt. 2006. *Statistical Inference in a Stochastic Epidemic SEIR Model with Control Intervention: Ebola as a Case as Study*. *Biometrics*, 62 : 1170-1177
- Li, Tiantian. 2013. Global Stability Analysis of a Delayed *SEIQR* Epidemic Model with Quarantine and Latent. *Applied Mathematics Scientific Research*. 4:109-117.
- Nashrullah, A., Supriyono, dan Kharis, M. 2013. Pemodelan SIRS untuk Penyakit Influenza dengan Vaksinasi pada Populasi Manusia dengan Laju Recruitment And Death. *Unnes Journal of Mathematics*, 2(1): 46-54
- Waluya, S.B. 2006. Persamaan Diferensial. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- WHO. 2013. *Diphtheria Diseases*. <http://www.who.int/classification/icd/en/> [diakses 07-02-2016]
- Wulandari, U. N. 2013. *Analisis Model Epidemik MSEIR pada Penyebaran Penyakit Difteri*. Skripsi FMIPA Universitas Jember.