



## MODEL EPIDEMI SEIV PENYEBARAN PENYAKIT POLIO PADA POPULASI TAK KONSTAN

Yanuar Chaerul Umam<sup>✉</sup>, Muhammad Kharis, Supriyono

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Indonesia  
Gedung D7 lantai 1 Kampus Sekaran, Gunungpati, Semarang, 50229

### Info Artikel

Sejarah Artikel:  
Diterima Desember 2013  
Disetujui Januari 2014  
Dipublikasikan Nopember 2016

Keywords :  
polio;  
model SEIV;  
titik kesetimbangan;  
vaksinasi.

### Abstrak

Polio (*Poliomyelitis*) adalah penyakit yang sangat menular yang disebabkan oleh virus polio yang berasal dari genus *Enterovirus* dan family *Picornia viridae*. Penyakit polio dinilai berbahaya karena dapat menyebabkan komplikasi, kerusakan otak yang menyebabkan kelumpuhan pada organ dalam, kelumpuhan pada kaki, otot-otot dan bahkan kematian. Dalam tulisan ini akan dikaji model matematika untuk penyebaran penyakit polio yang tidak mematikan pada populasi tak konstan. Model matematika yang digunakan berupa model epidemi SEIV dengan laju rekrutmen tidak sama dengan laju kematian pada populasi. Analisa yang dilakukan meliputi penentuan titik kesetimbangan dan analisisnya terkait kestabilan titik kesetimbangan tersebut. Simulasi diberikan sebagai bentuk pendekatan model terhadap nilai-nilai parameter yang diberikan sebagai bentuk pengecekan terhadap hasil analisis yang dilakukan. Vaksinasi yang dilakukan dapat mempengaruhi penyebaran penyakit polio dalam populasi.

### Abstract

Polio (*Poliomyelitis*) is a highly contagious disease caused by the polio virus from the genus *Enterovirus* and family *Picornia Viridae*. Polio considered dangerous because it can lead to complications, brain damage that causes paralysis of the internal organs, paralysis in the legs, muscles and even death. In this paper, it will be studied mathematical models for the spread of polio that does not cause the death. The mathematical model that is used in this paper is SEIV epidemics models with the recruitment - death. The analysis includes the determination of the equilibrium point and the associated stability analysis of the equilibrium point. Simulation models are given as a form of approach are the values of the parameters are given as a check on the results of analyzes performed. Vaccination is done can affect the spread of measles in the population.

## PENDAHULUAN

Polio adalah penyakit yang sangat menular yang disebabkan oleh virus polio yang berasal dari genus Enterovirus dan family Picorna viridae (Miller, 2004). Penyakit ini ditandai dengan gejala nyeri tenggorokan, rasa tidak enak diperut disertai demam ringan, nyeri kepala ringan, dan kelumpuhan akut, kaki biasanya lemas tanpa gangguan saraf perasa. Wilson (2001) menyatakan bahwa penyakit polio (*Poliomyelitis*) tersebut dinilai berbahaya karena dapat menyebabkan komplikasi, kerusakan otak yang menyebabkan kelumpuhan pada organ dalam, kelumpuhan pada kaki, otot-otot dan bahkan kematian (polio bulbar).

Menurut Wilson (2001) disebutkan bahwa individu yang terjangkit polio jenis paralisis spinal tidak akan sembuh disebabkan vaksinasi hanya dapat dilakukan sebelum tertular. Strain poliovirus jenis ini menyerang saraf tulang belakang yang dapat menyebabkan kelumpuhan pada kaki secara permanen. Akan tetapi polio jenis ini tidak mematikan karena tidak menyerang organ vital.

Perkembangan ilmu pengetahuan di bidang matematika juga turut memberikan peranan penting dalam mencegah meluasnya penyebaran penyakit polio (*Poliomyelitis*). Salah satu cabang dari ilmu matematika modern yang penting dan mempunyai cakupan wilayah penelitian yang luas adalah persamaan diferensial (Waluya, 2006). Persamaan diferensial merupakan salah satu persamaan yang dapat digunakan dalam menyelesaikan pemodelan matematika pada penyakit polio. Penyebaran penyakit polio dapat dibentuk menjadi sebuah model epidemi SEIV. Pada model epidemic SEIV, populasi dibagi menjadi 4 kompartemen yakni sub populasi rentan (*susceptibles*), populasi sub laten (*exposed*), sub populasi terinfeksi (*infectious*), dan sub populasi vaksin penyakit (*Vaccination*).

Berdasarkan data dari WHO (2008), penyebaran penyakit polio dapat ditekan dengan program vaksinasi. Sampai saat ini, program vaksinasi masih dipercaya sebagai cara yang paling efektif dalam menekan penyebaran penyakit polio. Oleh karena itu, vaksinasi perlu diperhatikan dalam model sebagai upaya untuk mencegah meluasnya penyakit.

Dari latar belakang tersebut, maka penulis merumuskan beberapa permasalahan yaitu bagaimana membentuk model epidemi

SEIV pada penyebaran penyakit polio pada populasi tak konstan, bagaimana menentukan titik kesetimbangan dan analisis kestabilan model matematika penyebaran penyakit polio pada populasi tak konstan, dan bagaimana simulasi model matematika penyebaran penyakit polio pada populasi tak konstan menggunakan program *Maple*.

## METODE

Metode yang digunakan adalah telaah pustaka, studi matematika meliputi pembentukan model, analisa eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan. Selanjutnya dilakukan studi komputasi untuk membuat simulasi model yang telah di analisis menggunakan bantuan software *Maple*. Simulasi digunakan untuk mendukung hasil analisis.

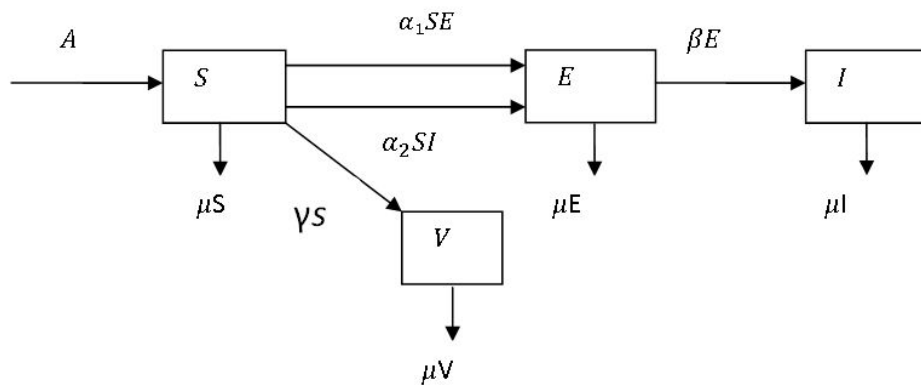
## HASIL DAN PEMBAHASAN

Model yang akan dibahas adalah model SEIV (*Susceptibles, Exposed, Infectious, Vaccination*) penyebaran polio pada populasi tak konstan dengan memperhatikan beberapa asumsi. Populasi yang akan dikaji dalam tulisan ini adalah populasi tertutup, yang selanjutnya disebut sistem tertutup. Sifat tertutupnya dikarenakan populasi ini difokuskan pada populasi kelompok umur tertentu. Misalnya, populasi untuk kelompok umur 60 tahun. Jika sejumlah orang telah melewati usia tersebut, maka kita anggap orang tersebut telah keluar dari sistem.

Beberapa asumsi yang dipergunakan untuk mengkonstruksi model adalah sebagai berikut. (1) Jumlah populasi diasumsikan cukup besar. (2) Laju kematian tidak sama dengan laju rekrutmen (tak konstan). (3) Dapat ditularkan dari orang yang sakit ke yang rentan. (4) Penyakit polio memiliki masa inkubasi. (5) Individu yang terinfeksi tidak dapat sembuh dan tidak mematikan.

Selanjutnya, asumsi yang digunakan terhadap vaksinasi dalam model ini adalah sebagai berikut. (1) Vaksin hanya diberikan pada individu yang baru lahir. (2) Keampuhan vaksinasi adalah 100%. (3) Kekebalan yang terjadi karena vaksin bersifat permanen. Hal tersebut berarti individu yang mendapat vaksin tidak dapat terinfeksi oleh penyakit yang sama sampai waktu yang tidak terbatas. (4) Biaya vaksin tidak diperhatikan dalam model.

Secara skematis model penyebaran penyebaran penyakit polio diberikan dalam gambar 1 di bawah ini.



**Gambar 1.** Diagram skematik penyebaran penyakit polio

Model matematika dari diagram transfer pada Gambar 1 dapat diekspresikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= A - S(\mu + \gamma) - \alpha_1 SE - \alpha_2 SI \\ \frac{dE}{dt} &= \alpha_1 SE + \alpha_2 SI - E(\mu + \beta) \\ \frac{dI}{dt} &= \beta E - \mu I \\ \frac{dV}{dt} &= \mu S - \mu V\end{aligned}$$

Dengan  $S(t)$ ,  $E(t)$ ,  $I(t)$  dan  $V(t)$  masing-masing menyatakan jumlah individu yang rentan, laten, infeksi dan vaksin saat  $t$ . Dengan parameter-parameter yang digunakan sebagai berikut. Parameter  $A$  menyatakan laju pertumbuhan populasi,  $\mu$  menyatakan laju kematian alami pada populasi,  $\alpha_1$  probabilitas penularan penyakit akibat kontak dengan individu laten,  $\alpha_2$  menyatakan probabilitas penularan penyakit akibat kontak dengan individu infeksi,  $\gamma$  menyatakan laju transfer individu dari kelas rentan ke kelas vaksin dan  $\beta$  menyatakan laju perpindahan individu kelas laten ke kelas infeksi. Semua parameter tersebut bernilai positif.

#### Analisa Model

Titik ekuilibrium dengan membuat pada Sistem (1) menjadi nol. Diperoleh 2 titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bukan endemik dan titik endemik. Saat  $I = 0$  diperoleh titik kesetimbangan bukan endemik yaitu

$$P_0 = \{S, E, I, V\} = \left\{ \frac{A}{\mu + \gamma}, 0, 0, \frac{\mu A}{\mu(\mu + \gamma)} \right\}.$$

Titik ini memperlihatkan bahwa untuk jangka waktu yang lama lingkungan atau komunitas tertentu akan bebas dari penyakit

polio ( $I \rightarrow I^* = 0$ ).

Saat  $I \neq 0$  diperoleh titik kesetimbangan endemik yaitu  $P_I = (S^*, E^*, I^*, V^*)$  dengan

$$\begin{aligned}S^* &= \frac{\mu(\mu + \beta)}{\alpha_1 \mu + \alpha_2 \beta}, \quad E^* = \frac{A(\alpha_1 \mu + \alpha_2 \beta) - \mu(\mu + \beta)(\mu + \gamma)}{(\mu + \beta)(\alpha_1 \mu + \alpha_2 \beta)}, \\ I^* &= \frac{\beta(A(\alpha_1 \mu + \alpha_2 \beta) - \mu(\mu + \beta)(\mu + \gamma))}{\mu(\mu + \beta)(\alpha_1 \mu + \alpha_2 \beta)}, \\ \text{dan } V^* &= \frac{\gamma(\mu + \beta)}{\mu \alpha_1 + \beta \alpha_2}.\end{aligned}$$

Titik kesetimbangan  $P_I$  ada jika dan hanya jika  $R_0 > 1$ . Titik  $P_I$  dinamakan titik kesetimbangan endemik. Titik ini memperlihatkan bahwa untuk jangka waktu yang lama dalam lingkungan atau komunitas tertentu akan selalu ada penyakit polio ( $I > 0$ ). Eksistensi titik equilibrium sistem persamaan (1) diberikan pada Teorema 1 berikut.

**Teorema 1.**

$$\text{Dipunyai } R_0 = \frac{A(\alpha_1 \mu + \alpha_2 \beta)}{\mu(\mu + \beta)(\mu + \gamma)}.$$

Dari sistem persamaan (1) di atas, berdasarkan nilai  $R_0$  tersebut diperoleh

1. Jika  $R_0 < 1$  maka sistem persamaan (1) hanya mempunyai 1 titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit polio

$$P_0 = \{S, E, I, V\} = \left\{ \frac{A}{\mu + \gamma}, 0, 0, \frac{\mu A}{\mu(\mu + \gamma)} \right\}.$$

2. Jika  $R_0 > 1$  maka sistem persamaan (1) mempunyai 2 titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik

dan titik kesetimbangan endemik dengan

$$P_1 = \{S^*, E^*, I^*, V^*\}$$

$$S^* = \frac{\mu(\mu+\beta)}{\alpha_1\mu+\alpha_2\beta}, E^* = \frac{A(\alpha_1\mu+\alpha_2\beta)-\mu(\mu+\beta)(\mu+\gamma)}{(\mu+\beta)(\alpha_1\mu+\alpha_2\beta)},$$

$$I^* = \frac{\beta(A(\alpha_1\mu+\alpha_2\beta)-\mu(\mu+\beta)(\mu+\gamma))}{\mu(\mu+\beta)(\alpha_1\mu+\alpha_2\beta)} \text{ dan } V^* = \frac{\gamma(\mu+\beta)}{\mu\alpha_1+\beta\alpha_2}.$$

Bukti:

Titik kesetimbangan dicari dengan membuat nol

$$\frac{dS}{dt}, \frac{dE}{dt}, \frac{dI}{dt} \text{ dan } \frac{dV}{dt}$$

diperoleh sistem (2) sebagai berikut.

$$A - S(\mu + \gamma) - \alpha_1 SE - \alpha_2 SI = 0$$

$$\alpha_1 SE + \alpha_2 SI - E(\mu + \beta) = 0$$

$$\beta E - \mu I = 0$$

$$\gamma S - \mu V = 0$$

Penentuan eksistensi titik kesetimbangan bebas penyakit tidak tergantung dari syarat  $R_0$  sehingga dapat langsung ditentukan dari sistem (2) yaitu dengan membuat  $I = 0$  yang disubstitusikan pada persamaan

$$\frac{dS}{dt}, \frac{dE}{dt}, \frac{dI}{dt} \text{ dan } \frac{dV}{dt}$$

$$\text{diperoleh } = \frac{A}{\mu + \gamma}, E = 0, I = 0$$

$$\text{dan } V = \frac{\mu A}{\mu(\mu + \gamma)}.$$

Sehingga saat  $I = 0$  diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit

$$P_0 = \{S, E, I, V\} = \left\{ \frac{A}{\mu + \gamma}, 0, 0, \frac{\mu A}{\mu(\mu + \gamma)} \right\}.$$

Sehingga Sistem (1) pasti mempunyai titik kesetimbangan bebas penyakit untuk segala kondisi  $R_0$ .

Penentuan titik kesetimbangan endemik dilakukan dengan mencari nilai  $I \neq 0$  dan mensyaratkan  $I > 0$ .

Dari persamaan kedua pada sistem (2) diperoleh  $E = 0$  atau

$$S \left( \alpha_1 + \alpha_2 \frac{\beta}{\mu} \right) = \mu + \beta \Leftrightarrow S^* = \frac{\mu(\mu + \beta)}{\alpha_1\mu + \alpha_2\beta}$$

Substitusikan ke persamaan kedua pada sistem (2) diperoleh

$$E^* = \frac{A(\alpha_1\mu + \alpha_2\beta) - \mu(\mu + \beta)(\mu + \gamma)}{(\mu + \beta)(\alpha_1\mu + \alpha_2\beta)}$$

Substitusikan ke persamaan ketiga pada Sistem (2) diperoleh

$$I^* = \frac{\beta(A(\alpha_1\mu + \alpha_2\beta) - \mu(\mu + \beta)(\mu + \gamma))}{\mu(\mu + \beta)(\alpha_1\mu + \alpha_2\beta)} \\ = \frac{\beta}{\mu} (R_0 - 1)$$

Dipunyai  $R_0 > 1$

Jadi nilai  $I^* > 1$

Sehingga saat  $I^* > 0$  diperoleh titik kesetimbangan tidak bebas penyakit atau endemik  $P_1 = (S^*, E^*, I^*, V^*)$  dengan

$$S^* = \frac{\mu(\mu+\beta)}{\alpha_1\mu+\alpha_2\beta}, E^* = \frac{A(\alpha_1\mu+\alpha_2\beta)-\mu(\mu+\beta)(\mu+\gamma)}{(\mu+\beta)(\alpha_1\mu+\alpha_2\beta)}, \\ I^* = \frac{\beta(A(\alpha_1\mu+\alpha_2\beta)-\mu(\mu+\beta)(\mu+\gamma))}{\mu(\mu+\beta)(\alpha_1\mu+\alpha_2\beta)}, \text{ dan } V^* = \frac{\gamma(\mu+\beta)}{\mu\alpha_1+\beta\alpha_2}.$$

Karena penentuan titik kesetimbangan bebas penyakit tidak tergantung dari syarat  $R_0$  dan penentuan titik kesetimbangan endemik tergantung dari syarat  $R_0 > 1$ .

Jadi untuk  $R_0 > 1$  diperoleh 2 titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit  $P_0 = (S, E, I, V)$  dan titik kesetimbangan endemik  $P_1 = (S^*, E^*, I^*, V^*)$ . Kestabilan titik equilibrium sistem persamaan (1) diberikan pada Teorema 2 berikut.

Teorema 2

(1) Jika  $R_0 < 1$  maka titik ekuilibrium  $P_0$  stabil asimtotik lokal.

(2) Jika  $R_0 > 1$  maka titik ekuilibrium  $P_0$  tidak stabil.

(3) Jika  $R_0 > 1$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$  dan  $\beta > \mu$  maka titik ekuilibrium  $P_1$  stabil asimtotik lokal.

Bukti :

Matriks jacobian model penyebaran penyakit polio pada populasi tak konstan adalah

$$J^*P = \begin{pmatrix} -(\mu + \gamma) - \alpha_1 E - \alpha_2 I & \alpha_1 S & -\alpha_2 S & 0 \\ \alpha_1 E + \alpha_2 I & \alpha_1 S - (\mu + \beta) & \alpha_2 S & 0 \\ 0 & \beta & -\mu & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

Untuk

$$P_0 = \{S, E, I, V\} = \left\{ \frac{A}{\mu + \gamma}, 0, 0, \frac{\mu A}{\mu(\mu + \gamma)} \right\}.$$

dan  $P_1 = (S^*, E^*, I^*, V^*)$  dengan

$$S^* = \frac{\mu(\mu+\beta)}{\alpha_1\mu+\alpha_2\beta},$$

$$E^* = \frac{A(\alpha_1\mu+\alpha_2\beta)-\mu(\mu+\beta)(\mu+\gamma)}{(\mu+\beta)(\alpha_1\mu+\alpha_2\beta)},$$

$$I^* = \frac{\beta(A(\alpha_1\mu+\alpha_2\beta)-\mu(\mu+\beta)(\mu+\gamma))}{\mu(\mu+\beta)(\alpha_1\mu+\alpha_2\beta)},$$

, dan  $V^* = \frac{\gamma(\mu+\beta)}{\mu\alpha_1+\beta\alpha_2}.$

Untuk kasus  $P_0$ , diperoleh semua nilai eigen negatif apabila  $R_0 < 1$  dan ada satu nilai eigen yang positif apabila  $R_0 > 1$ . Dengan kata lain jika  $R_0 < 1$  maka titik kesetimbangan  $P_0$  stabil asimtotik lokal dan jika  $R_0 > 1$  maka titik kesetimbangan  $P_0$  tidak stabil. Untuk kasus  $P_1$  diperoleh persamaan karakteristiknya

$$(\lambda + \mu)(c_0\lambda^3 + c_1\lambda^2 + c_2\lambda + c_3) = 0$$

Diasumsikan  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$  dan  $\beta > \alpha$ . Diperoleh nilai eigen  $\lambda = -\mu$

$$c_0 = 1,$$

$$c_1 = \alpha_1(\mu - \alpha_1 S^*) + \alpha_1 E^* + 2\mu + \alpha_2 I^* + \gamma + \beta$$

$$c_2 = 2\alpha_2 I^*(\mu - \alpha_1 S^*) + 2\mu(\mu - \alpha_1 S^*) + \beta(2\mu - \alpha_2 S^*) + \gamma(2\mu - \alpha_1 S^*) + 2\alpha_1 E^*(\mu - \alpha_1 S^*) + \gamma\beta + \alpha_2 I^*\beta + \mu^2 + \alpha_1 E^*\beta$$

dan

$$c_3 = \mu(\alpha_1 E^*(\mu + \alpha_2 I^*)(\mu + \beta - 2\alpha_1 S^*) + (\mu + \gamma)(\mu(\mu - \alpha_1 S^*) + \beta(\mu - \alpha_2 S^*)))$$

Jadi nilai  $c_0$  positif dan,  $c_1, c_2, c_3, c_1c_2 - c_0c_3$  positif saat  $R_0 > 1$ . Dengan menggunakan kriteria Ruth Hurwitz untuk polinom pangkat 3 diperoleh simpulan bahwa

$$c_0\lambda^3 + c_1\lambda^2 + c_2\lambda + c_3 = 0$$

mempunyai akar-akar dengan bagian real negatif. Maka titik kesetimbangan endemik  $P_1$  stabil asimtotik lokal.

### Simulasi Model

Simulasi dilakukan dengan memberikan nilai-nilai untuk masing-masing parameter sesuai dengan kondisi  $R_0$  dengan teorema yang telah diberikan di atas. Simulasi ini diberikan untuk memberikan gambaran geometris dari

teorema eksistensi dan kestabilan dari titik-titik kesetimbangan model ini.

Berdasarkan penjelasan makna nilai-nilai parameter, nilai  $\mu$  laju manusia yang lahir dan mati tiap satuan waktu,  $\alpha_1$  menyatakan probabilitas penularan penyakit akibat kontak dengan individu laten,  $\alpha_2$  menyatakan probabilitas penularan penyakit akibat kontak dengan individu terinfeksi,  $\gamma$  menyatakan rata-rata proporsi jumlah dari kelas rentan menjadi kelas vaksinasi,  $\beta$  menyatakan rata-rata proporsi jumlah pada masa laten menjadi masa terinfeksi,  $A$  menyatakan laju pertambahan populasi.

Simulasi untuk  $R_0 < 1$ , jika diasumsikan nilai  $\mu = 0,0000457$  artinya yang diinterpretasikan sebagai waktu rata-rata seseorang berada dalam sistem yang diamati yaitu selama 60 tahun, nilai  $\beta = 0,9$  diperoleh dari jurnal Agarawal & Bhaduria (2011), nilai  $A = 100$  artinya penambahan populasi sejumlah 100 orang tiap harinya.

**Tabel 1.** Nilai Parameter tetap untuk Simulasi

Model	
Parameter	Nilai
$\mu$	0,0000457
$\beta$	0,9
A	100

Selanjutnya, peluang seseorang tertular penyakit polio jika seseorang yang rentan mempunyai kontak dengan sebagian populasi laten  $\alpha_1$  atau seseorang dari populasi terinfeksi  $\alpha_2$ . Nilai-nilai  $\alpha_1, \alpha_2$  dan  $\gamma$  diberikan pada tabel 4.4. Selanjutnya, program vaksinasi dilakukan untuk mencegah meluasnya penyakit. Vaksinasi dianggap berhasil jika pada waktu tertentu penyakit akan menghilang dari populasi. Rasio reproduksi dasar dapat digunakan untuk menentukan apakah penyakit tersebut akan menghilang dari populasi. Penyakit akan menghilang dari populasi pada waktu tertentu jika  $R_0 < 1$ .

Berikut ini akan dianalisis untuk empat kondisi  $R_0 < 1$  dengan mengubah nilai  $\alpha_1, \alpha_2$  dan  $\gamma$  di titik ekuilibrium bebas penyakit

$$P_0 = \{S, E, I, V\} = \left\{ \frac{A}{\mu + \gamma}, 0, 0, \frac{\mu A}{\mu(\mu + \gamma)} \right\}.$$

$$\text{dan } R_0 = \frac{A(\alpha_1\mu + \alpha_2\beta)}{\mu(\mu + \beta)(\mu + \gamma)}, \text{ disajikan pada tabel 2.}$$

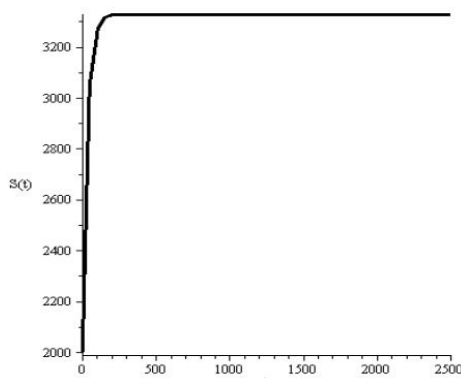
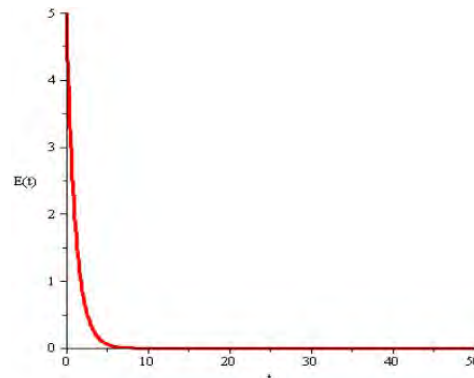
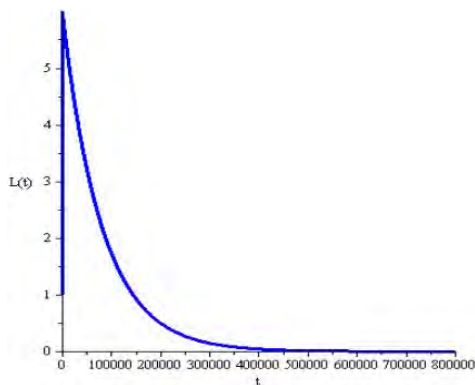
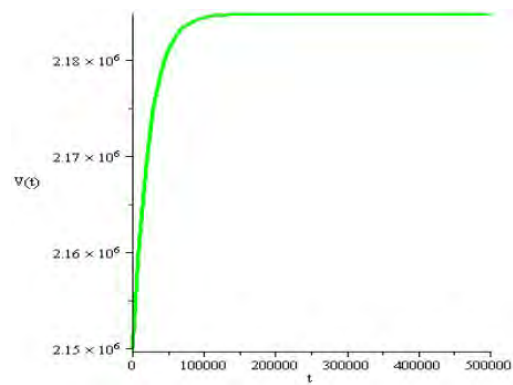


**Tabel 2.** Titik kesetimbangan ( $P_0$ ), rasio reproduksi dasar ( $R_0$ ).

Titik Kestimbangan ( $P_0$ )	$R_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\gamma$
(3328.3,0,0,2184855.544)	0.72832216	0.00000002	0.00000001	0.03
(2497.14701,0,0,2185686.66)	0.54644941	0.00000002	0.00000001	0.04
(1998.173669,0,0,2186185.634)	0.874452053	0.00000001	0.00000002	0.05
(1665.398188,0,0,2186518.409)	0.729542602	0.00000004	0.00000002	0.06

Sebagai contoh kondisi pada saat  $R_0 = 0.72832216$  diperoleh dengan mengubah nilai  $\alpha_1 = 0.00000002$ ,  $\alpha_2 = 0.00000001$ , dan  $\gamma = 0.03$  sehingga diperoleh nilai  $R_0 = (3328.3, 0, 0, 2184855.544)$ .

Berdasarkan hasil simulasi pada Gambar 2 untuk  $R_0 = 0.7283221 < 1$ . Artinya jumlah individu pada sub populasi  $S(t)$  akan bertambah seiring pertambahan populasi *susceptibles* yang tidak terinfeksi oleh penyakit

a. Grafik  $S(t)$  terhadap  $t$ b. Grafik  $E(t)$  terhadap  $t$ c. Grafik  $I(t)$  terhadap  $t$ d. Grafik  $V(t)$  terhadap  $t$ **Gambar 2.** Dinamika populasi  $S(t)$ ,  $E(t)$ ,  $I(t)$  dan  $V(t)$  terhadap waktu  $t$  pada saat

$\alpha_1 = 0.00000002$ ,  $\alpha_2 = 0.00000001$ , dan  $\gamma = 0.03$ .

polio. Jumlah pada sub populasi  $E(t)$  akan menuju ke titik kesetimbangan 0 artinya jumlah populasi Exposed yang tertular oleh kelompok *Exposed* atau *infective* berkurang, disebabkan karena kelompok manusia *Exposed* menjadi kelompok manusia *infective*. Pada sub populasi  $I(t)$  kelompok manusia *infective* semakin lama hilang, ini dapat terjadi ketika tidak ada individu pada kelas *Exposed* maka semakin lama individu yang menderita sakit berkurang dan hilang karena meninggal karena usia. Pada sub

populasi  $V(t)$  akan semakin bertambah dikarenakan banyak populasi *susceptibles* yang divaksinasi. Ini berarti untuk jangka waktu tertentu penyakit polio akan menghilang dalam populasi dikarenakan semua individu akan tervaksinasi. Hal ini berarti tidak terjadi epidemi pada populasi.

Pada saat nilai  $R_0 > 1$  akan dianalisis untuk empat kondisi dengan memberikan nilai parameter seperti diatas tetapi dengan asumsi  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$  dan  $\beta > \alpha$  akan

memperlihatkan bahwa untuk jangka waktu yang lama dalam lingkungan atau komunitas tertentu akan selalu ada individu yang terkena penyakit polio.

Berikut ini akan dianalisis untuk empat kondisi, dengan mengubah nilai  $\alpha$  dan  $\gamma$  di titik kesetimbangan endemik  $P_1 = (S^*, E^*, I^*, V^*)$  dengan

$$\left\{ \frac{\mu}{\alpha}, \frac{A\alpha - \mu(\mu + \gamma)}{\alpha(\mu + \beta)}, \frac{\beta(A\alpha - \mu(\mu + \gamma))}{\mu\alpha(\mu + \beta)}, \frac{\gamma}{\alpha} \right\} \text{ dan } R_0 = \frac{A\alpha}{\mu(\mu + \gamma)}$$

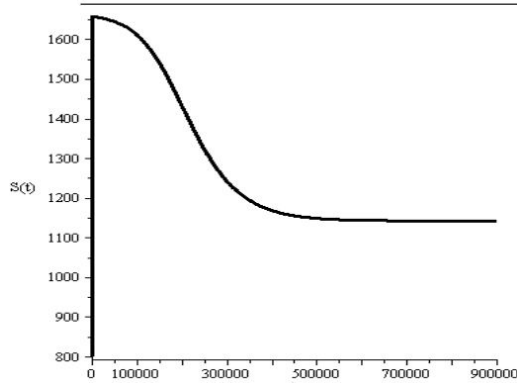
disajikan pada table 3.

Sebagai contoh kondisi pada saat pada saat  $R_0 = 1.45767894$  diperoleh dengan mengubah nilai  $\alpha = 0.00000004$  dan  $\gamma = 0.06$  sehingga diperoleh nilai (1142.5, 34.9, 687006.4, 1500000).

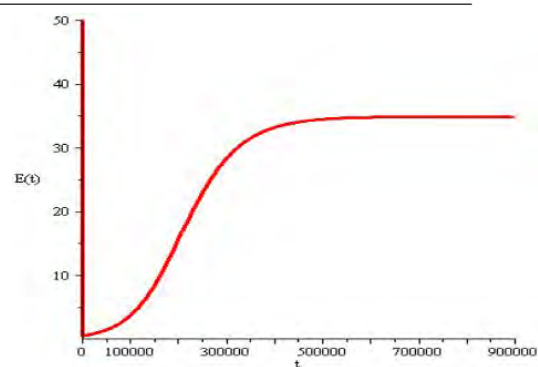
Berdasarkan hasil simulasi pada Gambar 4.3 untuk  $R_0 = 1.45767894 > 1$ . Artinya jumlah individu pada sub populasi  $S^*(t)$  mengalami penurunan, ini disebabkan karena

**Tabel 3.** Titik kesetimbangan ( $P_1$ ), rasio reproduksi dasar ( $R_0$ ).

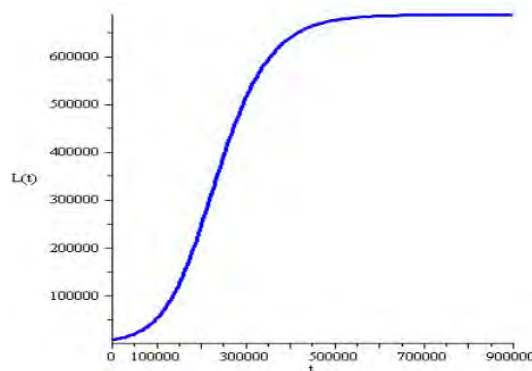
Titik Kestimbangan ( $P_1$ )	$R_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\gamma$
(3328.3, 0, 0, 2184855.544)	0.72832216	0.00000002	0.00000001	0.03
(2497.14701, 0, 0, 2185686.66)	0.54644941	0.00000002	0.00000001	0.04
(1998.173669, 0, 0, 2186185.634)	0.874452053	0.00000001	0.00000002	0.05
(1665.398188, 0, 0, 2186518.409)	0.729542602	0.00000004	0.00000002	0.06



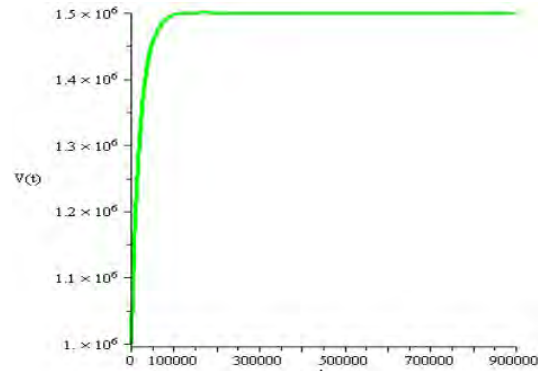
a. Grafik  $S^*(t)$  terhadap  $t$



b. Grafik  $E^*(t)$  terhadap  $t$



c. Grafik  $I^*(t)$  terhadap  $t$



d. Grafik  $V^*(t)$  terhadap  $t$

**Gambar 3.** Dinamika populasi  $S^*(t)$ ,  $E^*(t)$ ,  $I^*(t)$  dan  $V^*(t)$  terhadap waktu  $t$  pada saat  $\alpha = 0.00000004$  dan  $\gamma = 0.06$ .

kelompok manusia *susceptibles* terinfeksi dan menjadi kelompok manusia *Exposed*. Pada sub populasi  $E^*(t)$  mengalami kenaikan, ini disebabkan karena kelompok manusia *susceptibles* terinfeksi oleh kelompok *Exposed*

atau *infective*. Pada sub populasi  $I^*(t)$  jumlah populasi *infective* semakin bertambah tetapi akan selalu tetap dan akan selalu ada dikarenakan masih ada individu pada kelas *Exposed* dan individu *infective* yang tidak bisa sembuh sampai

suatu individu meninggal karena umur. Pada sub populasi  $V^*(t)$  mengalami kenaikan hingga titik kesetimbangan namun tidak semua individu yang tervaksinasi dikarenakan masih adanya populasi *infective* dan *Exposed*. Dapat dilihat bahwa penyakit tidak akan hilang saat , sehingga perlu adanya tindakan yang dapat menghilangkan wabah atau epidemi tersebut.

#### SIMPULAN

Berdasarkan ,  $R_0 = \frac{A(\alpha_1\mu + \alpha_2\beta)}{\mu(\mu + \beta)(\mu + \gamma)}$ .

Jika  $\alpha_1 = 0.00000002$ ,  $\alpha_2 = 0.00000001$  dan  $\gamma = 0.03$ , maka  $R_0 < 1$  artinya untuk jangka waktu yang lama populasi penyakit polio akan hilang dikarenakan semua individu tervaksinasi dan populasi laten dan terinfeksi hilang ( $I=0$ ). Sedangkan jika  $\alpha = 0.00000004$  dan  $\gamma = 0.06$ , maka  $R_0 > 1$  artinya untuk jangka waktu yang lama populasi

penyakit polio akan tetap ada namun jumlahnya lebih kecil daripada populasi yang tervaksinasi ( $I^* < V^*$ ).

#### DAFTAR PUSTAKA

- Agarawal, M & Bhaduria, A.S. 2011. *Modeling Spread of Polio with the Role of Vaccination*. AAM: Intern. J. Vol.6 ,issue 2:552-571.
- Miller, N.Z. 2004. *The polio vaccine: a critical assessment of its arcane history, efficacy, and long-term health-related consequences*. USA: Thinktwice Global Vaccine Institute.
- Waluya, S.B. 2006. *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- WHO-SEARO. 2008. *Vaccine Preventable Disease Surveillance bulletin*. Report for Week 38,2008.
- Wilson, W.R. 2001. *Current Diagnosis and Treatment in Infectious Disease*. USA : McGraw - Hill Companies, Inc.