



## **PEMODELAN MATEMATIKA EPIDEMI INFLUENZA DENGAN MEMPERHATIKAN PELUANG KEBERHASILAN VAKSINASI DAN KEKEBALAN TETAP.**

**Nisa Aulia<sup>✉</sup>, Muhammad Kharis, Supriyono**

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Indonesia  
Gedung D7 Lt.1, Kampus Sekaran Gunungpati, Semarang 50299

---

### **Info Artikel**

#### *Sejarah Artikel:*

Diterima Februari 2016

Disetujui April 2016

Dipublikasikan Juli 2016

#### *Keywords:*

*Influenza Epidemic Models,*

*Vaccination,*

*Analysis of Stability,*

*Equilibrium Point.*

---

### **Abstrak**

Penelitian ini mengkaji tentang model matematika untuk epidemi influenza. Model matematika yang digunakan berupa model epidemi SIR. Model ini memperhatikan faktor vaksinasi sebagai upaya pencegahan penyebaran penyakit influenza dan kekebalan tetap tiap individu yang telah sembuh dari penyakit. Dalam penelitian ini dilakukan kajian mengenai model matematika epidemi influenza dengan memperhatikan peluang keberhasilan vaksinasi dan kekebalan tetap, analisis titik kesetimbangan dan kestabilan model serta simulasi model dan interpretasi perilaku model. Metode yang digunakan adalah tinjauan pustaka, studi laboratorium dan analisis. Langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah menentukan masalah, merumuskan masalah, studi pustaka, analisis dan pemecahan masalah serta penarikan kesimpulan. Sebagai hasil diperoleh model dengan empat variabel dan sembilan parameter. Dari model tersebut diperoleh satu titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit yang bersifat stabil asimtotis untuk  $R_0 < 1$  dan tidak stabil untuk  $R_0 > 1$ . Selanjutnya, disimpulkan tidak ada kemungkinan wabah meluas dan diberikan diberikan gambaran geometris berupa simulasi dengan program *Maple 12*.

---

### **Abstract**

*This study reviews about a mathematical model for influenza epidemic. The mathematical model used is in the form of SIR epidemic models. This model considers the factors of vaccination as a prevention of influenza diseases spread and immunity remains of each person who has recovered from the disease. In this research, it is conducted the study concerning the mathematical model of influenza epidemics by considering the chances of vaccination success and immunity remains, analysis of equilibrium and stability of the model, as well as model simulation and interpretation of model behavior. The method used is literature review, laboratory studies and analysis. The first step in this research is to determine the problem, formulate the problem, literature review, analysis and problem solving as well as the conclusion. As the results, it is obtained a model with four variable and nine parameters. From the model obtained an equilibrium point that is disease free equilibrium point which is stable asymptotically on  $R_0 < 1$  and unstable on  $R_0 > 1$ . Furthermore, It is concluded that there is no possibility of widespread outbreaks and a geometric overview is given in the form of simulation with Maple 12 program.*

## PENDAHULUAN

Virus influenza beredar sangat luas di seluruh dunia dan mengakibatkan terjadinya epidemi penyakit saluran napas pada manusia setiap tahun. Sejak pertengahan abad ke-18, pada interval waktu 10-40 tahun terjadi beberapa kali wabah influenza di antaranya pada tahun 1918 disebut *Spanish influenza*, Asian flu pada tahun 1957, Hong Kong flu pada tahun 1968 dan wabah global yang disebabkan oleh H1N1 pada tahun 2009 (WHO, 2012). Tumpey *et al.* (2005) menyebutkan bahwa pandemi virus influenza pada tahun 1918-1919 menyebabkan 20-50 juta kematian penduduk dunia. Virus H1N1 menginfeksi 23 ribu orang di Meksiko (Fraser *et al.*, 2009). Kasus influenza lainnya adalah H5N1 atau *Avian Influenza* yang menyebar ke populasi unggas di lebih dari 30 negara dan menginfeksi hampir 400 orang dengan tingkat kematian 50% (Miller *et al.*, 2009). Hingga kini, diperkirakan tingkat serangan tahunan influenza berkisar antara 5% - 10% pada orang dewasa dan 20% -30% pada anak-anak (WHO, 2012).

Pencegahan epidemi menjadi isu serius yang diantisipasi berbagai pihak untuk mencegah dampak negatif yang ditimbulkan. Salah satu langkah pencegahan epidemi influenza adalah vaksinasi. Sekitar 50 negara sudah mempersiapkan dana untuk melakukan program imunisasi dan vaksin influenza, vaksin juga kini sudah tersedia di beberapa negara. Sekitar 234 juta orang dari 6 miliar penduduk dunia sudah mendapat imunisasi influenza pada tahun 2000 (Nicholson *et al.*, 2003). Sejak diperkenalkan, keberhasilan vaksinasi virus influenza bervariasi. Dalam beberapa tahun terakhir vaksin mampu memberi perlindungan terhadap influenza sebesar 70%-100% pada orang dewasa yang sehat dan 30%-60% pada anak-anak dan lanjut usia (Couch, 2000).

Dalam menentukan langkah pencegahan yang akan diambil, beberapa faktor perlu diperhatikan. Ketika menerapkan upaya pencegahan, pemerintah sebagai pembuat keputusan harus mempertimbangkan faktor eksternal, seperti penerimaan sosial terkait bagaimana masyarakat menerima suatu kebijakan, dampak ekonomi, keterbatasan sumber daya, dan lain-lain (Yang & Hsu, 2012). Tidak mudah untuk mengetahui hasil akhir suatu kebijakan yang akan diterapkan untuk menangani epidemi influenza, oleh karena itu model simulasi yang sesuai akan menjadi hal yang bermanfaat dalam langkah penentuan kebijakan. Model suatu sistem menjadi bagian yang tak terpisahkan dari kehidupan di masa

kini. Sebagai ilmu pengetahuan, matematika merupakan ilmu yang berkaitan dengan ilmu pengetahuan lainnya, maka matematika adalah ilmu pengetahuan yang dikembangkan sebagai salah satu usaha untuk menjelaskan berbagai fenomena yang terjadi di alam hingga manusia dapat mengetahui dan mendapatkan informasi yang lebih mendekati dengan fenomena yang terjadi sebenarnya khususnya lewat pemodelan matematika.

Model simulasi yang digunakan untuk memodelkan wabah influenza adalah model matematika epidemi. Model dasar dalam epidemi dikenal dengan model SIR. Model SIR pertama kali dikenalkan oleh W. O. Kermack dan Mc. Kendrick. Dalam model SIR populasi terbagi menjadi tiga sub populasi, yakni sub populasi *susceptibles* (rentan terinfeksi), sub populasi *infectives* (terinfeksi) dan sub populasi *removed* (kebal atau mati atau dikarantina). Salah satu penelitian yang berkaitan dengan model epidemi SIR dilakukan Komsiyah (2013) yaitu mengkonstruksi model epidemi dengan dan tanpa strategi vaksinasi untuk memberikan gambaran suatu penyakit menular, yaitu measles. Selain itu, Side & Noorani (2013) menggunakan model SIR dalam memodelkan penyebaran penyakit Demam Berdarah. Penelitian ini mengembangkan pemodelan matematika epidemi influenza berbasis SIR dengan memperhatikan peluang keberhasilan vaksinasi dan kekebalan tetap.

Permasalahan dalam penelitian ini adalah bagaimana model matematika epidemi influenza dengan memperhatikan peluang keberhasilan vaksinasi dan kekebalan tetap, bagaimana titik kesetimbangan dan analisis kestabilan epidemi influenza dengan memperhatikan peluang keberhasilan vaksinasi dan kekebalan tetap, apakah ada kemungkinan wabah tersebut meluas walaupun sudah dilakukan tindakan pencegahan berupa vaksinasi dan kekebalan tetap dan jika ada, kapan wabah tersebut meluas dan bagaimana simulasi model dan interpretasi perilaku model epidemi influenza dengan memperhatikan peluang keberhasilan vaksinasi dan kekebalan tetap.

Sejalan dengan rumusan masalah, tujuan penulisan ini adalah mengetahui model matematika epidemi influenza dengan memperhatikan peluang keberhasilan vaksinasi dan kekebalan tetap, mengetahui titik kesetimbangan dan analisis kestabilan epidemi influenza dengan memperhatikan peluang keberhasilan vaksinasi dan kekebalan tetap, mengetahui apakah ada kemungkinan wabah

tersebut meluas walaupun sudah dilakukan tindakan pencegahan berupa vaksinasi dan kekebalan tetap dan jika ada, kapan wabah tersebut meluas dan mengetahui simulasi model dan interpretasi perilaku model epidemi influenza dengan memperhatikan peluang keberhasilan vaksinasi dan kekebalan tetap.

## METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini yaitu tinjauan pustaka, studi laboratorium dan analisis. Tinjauan pustaka dilakukan penulis dengan menelusuri, mempelajari dan melengkapi pustaka yang berkaitan dengan bahasan yang diteliti. Studi laboratorium yaitu melakukan analisis matriks Jacobian terkait penentuan karakteristik dan nilai eigen serta melakukan simulasi untuk beberapa nilai parameter yang diberikan dengan bantuan *software Maple 12*. Analisis dilakukan dengan menyusun suatu penyelesaian dengan algoritma yang tepat dengan memanfaatkan landasan teori yang mendukung dan dengan memperhatikan hasil dari studi laboratorium. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini meliputi menentukan masalah dimana penulis menelusuri, membaca dan menelaah beberapa sumber pustaka yang digunakan untuk mengumpulkan informasi yang diperlukan dalam penelitian sehingga penulis dapat menentukan bahasan masalah yang diteliti, perumusan masalah yang dilakukan untuk mempermudah proses penelitian sehingga proses-proses penelitian yang dilakukan terarah dan sesuai dengan permasalahan yang telah dirumuskan, studi pustaka dimana penulis melakukan kajian sumber-sumber pustaka untuk mengumpulkan data dan informasi berupa fakta-fakta terkait influenza dan keberhasilan vaksinasi serta kekebalan tetap sehingga dapat melakukan penyusunan asumsi-temsil sebagai pendukung dan pelengkap dalam penyusunan model matematika, analisis dan pemecahan masalah berupa analisis model dan simulasi yang hasilnya digunakan dalam pemecahan masalah, serta penarikan kesimpulan yang diperoleh dari hasil analisis dan pemecahan masalah.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

### Hasil Penelitian

Virus influenza termasuk dalam famili *Orthomyxoviridae*. Virus influenza diklasifikasikan menjadi tiga tipe, yaitu tipe A, B dan C (WHO, 2012). Tipe A menyebabkan 95% kasus influenza, dan sebagian besar kasus

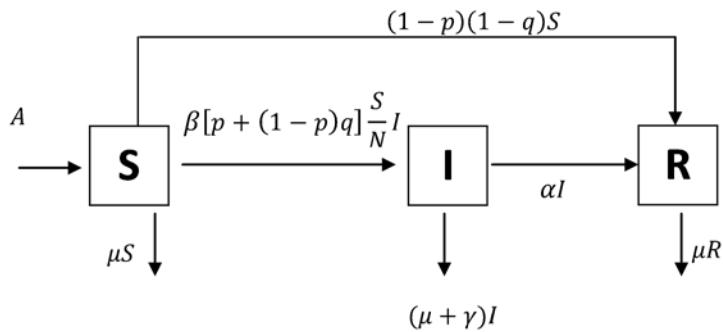
influenza lain disebabkan oleh tipe B, sedangkan infeksi virus influenza tipe C jarang terjadi (Pringle, 2016).

Biasanya, influenza ditularkan melalui udara lewat batuk atau bersin, yang akan menimbulkan *aerosol* yang mengandung virus. Influenza juga dapat ditularkan melalui kontak langsung dengan tinja burung atau *mucus*, atau melalui kontak dengan permukaan yang telah terkontaminasi. *Aerosol* yang terbawa oleh udara (*airborne aerosols*) diduga menimbulkan sebagian besar infeksi (Brankston *et al.*, 2007).

Pada bayi dan anak-anak penularan terjadi sebelum timbul gejala sampai pekan ke dua terjadinya penyakit setelah terlihat gejala klinis, sedangkan pada orang dewasa penularan virus biasanya hanya berlangsung beberapa hari saja. Masa inkubasi influenza berkisar dari 1-4 hari dengan rata-rata 2 hari (WHO, 2012). Pemulihan influenza berlangsung selama 1-2 minggu atau lebih lama untuk usia lanjut usia (Kamps, 2006). Selama 1976-2007 tingkat tahunan kematian akibat influenza di Amerika Serikat berkisar 1,4-16,7 kematian per 100.000 orang (CDC, 2010). Hingga kini, diperkirakan tingkat serangan tahunan influenza berkisar antara 5% -10% pada orang dewasa dan 20% -30% pada anak-anak (WHO, 2012).

Sampai saat ini imunisasi masih menjadi cara yang cukup efektif untuk mengurangi komplikasi akibat penyakit influenza. Palache *et al.* (2014) menjelaskan bahwa saat ini vaksinasi adalah cara yang paling efektif untuk mencegah infeksi influenza. Dalam beberapa tahun terakhir vaksin mampu memberi perlindungan terhadap influenza sebesar 70%-100% pada orang dewasa yang sehat dan 30%-60% pada anak-anak dan lanjut usia (Couch, 2000).

Fakta-fakta terkait penyebaran influenza yang diperoleh dari kegiatan studi pustaka antara lain (1) diperkirakan tingkat serangan tahunan influenza berkisar antara 5% -10% pada orang dewasa dan 20% -30% pada anak-anak (WHO, 2012), (2) masa inkubasi influenza berkisar dari 1-4 hari dengan rata-rata 2 hari (WHO, 2012), (3) pemulihan influenza berlangsung selama 1-2 minggu atau lebih lama untuk usia lanjut usia (Kamps, 2006), (4) selama 1976-2007 tingkat tahunan kematian akibat influenza di Amerika Serikat berkisar 1,4-16,7 kematian per 100.000 orang (CDC, 2010), dan (5) vaksin mampu memberi perlindungan terhadap influenza sebesar 70%-100% pada orang dewasa yang sehat dan 30%-60% pada anak-anak dan lanjut usia (Couch, 2000).



Gambar 1. Diagram Skematik Penyebaran Populasi Epidemi Influenza

Beberapa batasan atau asumsi yang digunakan untuk mengkonstruksi model adalah (1) rekrutmen masuk ke kelas rentan dengan laju konstan, (2) semua individu yang masuk ke populasi merupakan individu rentan, (3) setiap individu yang rentan mempunyai kemungkinan yang sama untuk terinfeksi, (4) terjadi kematian murni pada masing-masing kelas dalam suatu populasi dengan laju yang sama dan terjadi kematian karena epidemi (penyakit), (5) ada proses vaksinasi yang diberikan kepada setiap individu pada kelas rentan tanpa membedakan usia, (6) proses vaksinasi belum tentu berhasil (mempunyai peluang tidak berhasil), (7) individu yang telah sembuh tidak mungkin terinfeksi lagi pada masa wabah yang sama.

Berdasarkan fakta dan asumsi dapat dibentuk diagram skematis yang dapat dilihat pada Gambar 1. Model matematika dari diagram dapat diekspresikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= A - \beta[p + (1-p)q]\frac{S}{N}I - (1-p)(1-q)S - \mu S \\ \frac{dI}{dt} &= \beta[p + (1-p)q]\frac{S}{N}I - (\mu + \gamma)I - \alpha I \\ \frac{dR}{dt} &= (1-p)(1-q)S + \alpha I - \mu R \\ N &= S + I + R\end{aligned}\quad (1)$$

Jelas  $N = S + I + R$  maka  $S = N - I - R$  maka Sistem (1) dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= A - \mu N - \gamma I \\ \frac{dI}{dt} &= \beta[p + (1-p)q]\frac{(N - I - R)}{N}I - (\mu + \gamma)I - \alpha I \\ \frac{dR}{dt} &= (1-p)(1-q)(N - I - R) + \alpha I - \mu R\end{aligned}\quad (2)$$

Daftar variabel-variabel yang ada dalam model matematika pada penelitian ini diberikan dalam Tabel 1.

Tabel 1. Daftar Variabel-variabel

Variabel	Keterangan
N	Jumlah populasi individu dalam sistem
S	Jumlah individu rentan
I	Jumlah individu terinfeksi
R	Jumlah individu sembuh

Daftar parameter-parameter yang ada dalam model matematika pada penelitian ini diberikan dalam Tabel 2.

Tabel 2. Daftar Parameter-parameter

Parameter	Keterangan
A	Laju rekrutmen individu rentan terkena epidemi
$\mu$	Laju kematian murni
$\beta$	Peluang terjadinya kontak infektif individu yang rentan dengan individu yang terinfeksi
$\alpha$	Laju kesembuhan tiap individu yang sakit
$1 - p$	Proporsi individu rentan yang divaksinasi
$p$	Proporsi individu rentan yang tidak divaksinasi
$1 - q$	Peluang keberhasilan vaksinasi
$q$	Peluang kegagalan vaksinasi
$\gamma$	Laju kematian akibat epidemi

Titik kesetimbangan diperoleh dengan menjadikan persamaan dari Sistem (2) sama dengan nol. Saat  $I = 0$  diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu  $P_0 = (N, I, R)$  dan untuk  $I \neq 0$  tidak diperoleh titik

kesetimbangan epidemi. Adanya titik kesetimbangan epidemi tidak mungkin terjadi karena syarat yang harus dipenuhi berupa nilai  $\mu \geq \alpha$ . Hal ini merupakan kasus yang tidak mungkin terjadi dalam kehidupan nyata karena jika laju kematian murni lebih dari laju kesembuhan individu yang sakit, artinya lama waktu individu terinfeksi penyakit lebih dari waktu individu berada dalam sistem yang diamati. Sehingga hasil analisa model menunjukkan bahwa sistem persamaan yang terbentuk hanya memiliki satu titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit.

Dari hasil analisa diperoleh Teorema 1 terkait eksistensi dan kestabilan dari titik kesetimbangan Sistem (2) sebagai berikut.

### Teorema 1

Sistem (2) hanya mempunyai satu titik kesetimbangan berupa titik kesetimbangan bebas penyakit, yaitu

$$P_0 = (N, I, R) = \left( \frac{A}{\mu}, 0, \frac{(1-p)(1-q)A}{\mu[(1-p)(1-q) + \mu]} \right)$$

Diberikan

$$R_0 = \frac{\beta\mu[p + (1-p)q]}{[(1-p)(1-q) + \mu](\alpha + \mu + \gamma)}$$

Berdasarkan nilai  $R_0$  tersebut,

1. Jika  $R_0 < 1$  maka titik kesetimbangan bebas penyakit  $P_0$  stabil asimtosis lokal.
2. Jika  $R_0 > 1$  maka titik kesetimbangan bebas penyakit  $P_0$  tidak stabil.

$$J(P_0) = \begin{bmatrix} -\mu & -\gamma & 0 \\ 0 & \beta[p + (1-p)q] \left( 1 - \frac{(1-p)(1-q)}{(1-p)(1-q) + \mu} \right) - \mu - \gamma - \alpha & 0 \\ (1-p)(1-q) & -(1-p)(1-q) + \alpha & -(1-p)(1-q) - \mu \end{bmatrix}$$

### Bukti:

Titik kesetimbangan dicari dengan membuat nol  $\frac{dN}{dt}$ ,  $\frac{dI}{dt}$  dan  $\frac{dR}{dt}$  diperoleh Sistem (3) sebagai berikut.

$$A - \mu N - \gamma I = 0$$

$$\beta[p + (1-p)q] \frac{(N - I - R)}{N} I - (\mu + \gamma)I - \alpha I = 0 \quad (3)$$

$$(1-p)(1-q)(N - I - R) + \alpha I - \mu R = 0$$

Dari persamaan kedua Sistem (3) diperoleh  $I = 0$  atau

$$\beta[p + (1-p)q] \frac{(N - I - R)}{N} - (\alpha + \mu + \gamma) = 0$$

Penentuan titik kesetimbangan bebas penyakit dilakukan dengan memberikan nilai  $I = 0$  yang disubstitusikan pada Sistem (3).

Diperoleh  $N = \frac{A}{\mu}, I = 0$ , dan

$$R = \frac{(1-p)(1-q)A}{\mu[(1-p)(1-q) + \mu]}$$

sehingga saat  $I = 0$  diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit

$$P_0 = (N, I, R) = \left( \frac{A}{\mu}, 0, \frac{(1-p)(1-q)A}{\mu[(1-p)(1-q) + \mu]} \right)$$

Selanjutnya dilakukan analisis matriks Jacobian. Matriks Jacobian model matematika epidemi influenza dengan memperhatikan peluang keberhasilan vaksinasi dan kekebalan tetap untuk kasus  $P_0$  dapat dilihat pada Gambar 2. Diperoleh  $\lambda_1$  dan  $\lambda_3$  selalu bernilai negatif, sedangkan nilai  $\lambda_2$  bernilai negatif apabila  $R_0 < 1$ , bernilai 0 apabila  $R_0 = 1$ , dan bernilai positif apabila  $R_0 > 1$ . Untuk nilai  $R_0 = 1$  tidak diikutkan dalam analisa selanjutnya karena tidak memenuhi kondisi titik hiperboliks. Berdasarkan analisa tersebut, diperoleh bahwa titik  $P_0$  stabil asimtosis lokal apabila  $R_0 < 1$  dan tidak stabil apabila  $R_0 > 1$ .

Simulasi dilakukan dengan bantuan Program Maple 12 dengan memberikan nilai-nilai untuk masing-masing parameter sesuai dengan kondisi nilai  $R_0$  dalam teorema yang telah diberikan. Simulasi ini memberikan gambaran geometris terkait dengan hasil yang telah dianalisis.

Simulasi pertama dilakukan dalam dinamika populasi saat  $R_0 < 1$  dimana dalam populasi tidak terjadi epidemi influenza karena penyakit bengansur-angsur menghilang dengan perlakuan vaksinasi dan setiap individu yang terinfeksi tidak mungkin terinfeksi dengan virus yang sama dengan sifat stabil asimtotik lokal. Nilai awal untuk masing-masing variable dan parameter diperlukan sebelum melakukan simulasi.  $A = 2$  yang diinterpretasikan sebagai penambahan populasi sejumlah 2 orang setiap harinya.  $\beta = 0,5$  yang artinya rata-rata 5 individu rentan menjadi terinfeksi dari setiap 10 kontak yang terjadi antara individu rentan dengan individu yang terinfeksi.  $\mu = 0,016667$

menyatakan besarnya laju kematian murni yang diinterpretasikan sebagai waktu rata-rata seseorang berada dalam sistem yaitu selama 60 tahun.

$$\alpha = \frac{1}{14} = 0,071428$$

artinya rata-rata periode individu terinfeksi sampai sembuh adalah 14 hari.

$$\gamma = \frac{15,7 \times 365}{100000} = 0,060955$$

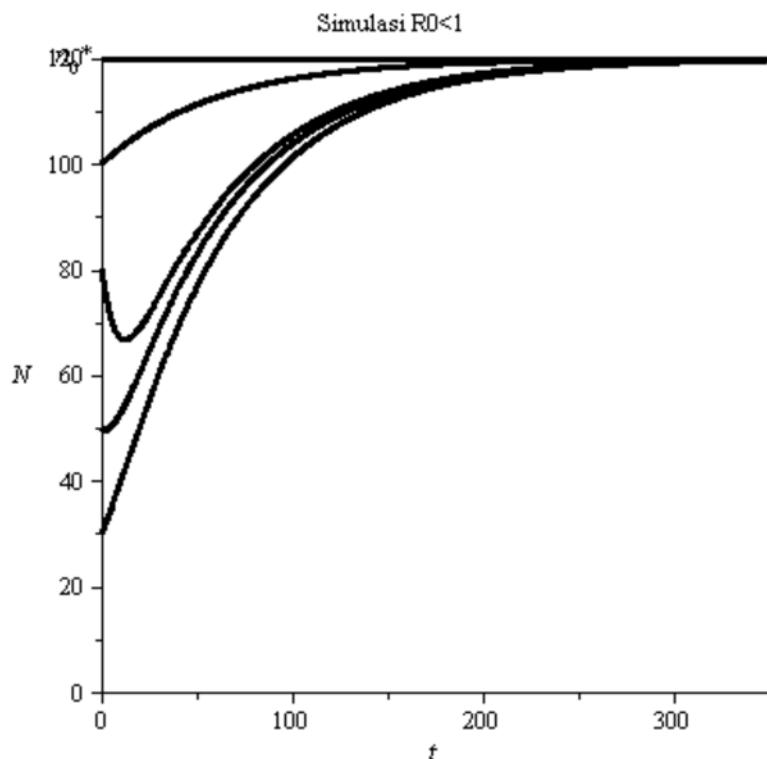
yang artinya terdapat sekitar 6 orang meninggal dari 100 kasus influenza setiap harinya.  $1 - p = 0,3$  artinya ada 30% individu rentan yang divaksinasi dan  $p = 0,7$  yang menginterpretasikan 70% individu pada populasi rentan tidak mendapatkan perlakuan vaksinasi.  $1 - q = 0,65$  menyatakan bahwa 65% dari total individu yang divaksinasi dinyatakan bebas dari infeksi virus, dan  $q = 0,25$  menginterpretasikan bahwa ada 25% dari kelompok individu yang mendapatkan vaksinasi gagal mendapat kekebalan dari virus dalam arti lain terinfeksi influenza.

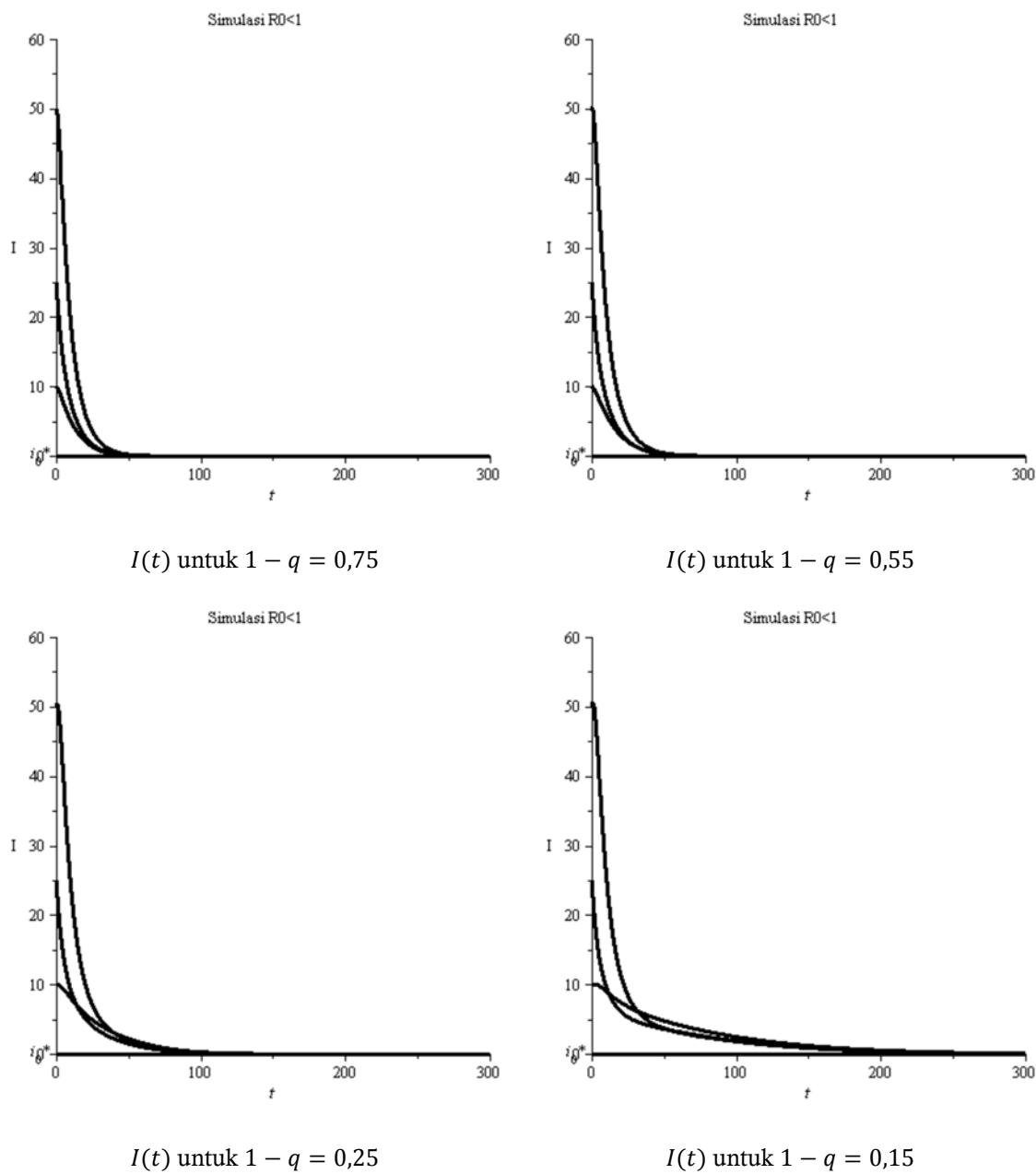
Nilai-nilai parameter untuk simulasi  $R_0 < 1$  diberikan dalam Tabel 3, diperoleh nilai  $R_0 = 0,179298 < 1$ . Pada Teorema 1 Sistem (2) hanya mempunyai satu titik kesetimbangan  $P_0 = (N, I, R) = (119,9976; 0; 110,5487)$  dan  $P_0$  stabil asimtotik lokal.

Tabel 3. Nilai-nilai Parameter Simulasi  $R_0 < 1$ 

Parameter	Nilai
A	2
$\mu$	0,016667
$\beta$	0,5
$\alpha$	0,071429
$\gamma$	0,060955
$1 - p$	0,3
$p$	0,7
$1 - q$	0,75
$q$	0,25

Berikut disajikan grafik-grafik dari nilai  $N$ ,  $I$ , dan  $R$  yang memberikan gambaran geometris dari model matematika epidemi influenza dengan memperhatikan peluang keberhasilan vaksinasi dan kekebalan tetap dengan  $R_0 < 1$ . Gambaran geometris dari sistem pada kasus  $R_0 < 1$  dengan nilai-nilai parameter yang telah diberikan dapat dilihat pada Gambar 2, Gambar 3 dan Gambar 4.

Gambar 2. Proporsi Populasi Individu saat  $t$  untuk  $R_0 < 1$

Gambar 3 Proporsi Populasi Individu Terinfeksi saat  $t$  untuk  $R_0 < 1$ 

Simulasi kedua dilakukan dalam dinamika populasi saat  $R_0 > 1$  dimana dalam populasi tidak tetap terjadi epidemi influenza karena penyakit bengansur-angsur menghilang dengan perlakuan vaksinasi dan setiap individu yang terinfeksi tidak mungkin terinfeksi dengan virus yang sama namun titik kesetimbangan bebas penyakit dalam kasus ini bersifat tidak stabil. Nilai-nilai parameter untuk simulasi  $R_0 > 1$  diberikan dalam Tabel 4. Dari Tabel 4 diperoleh nilai

$$R_0 = 1,40721 > 1$$

Pada Teorema 1 Sistem (2) hanya mempunyai satu titik kesetimbangan

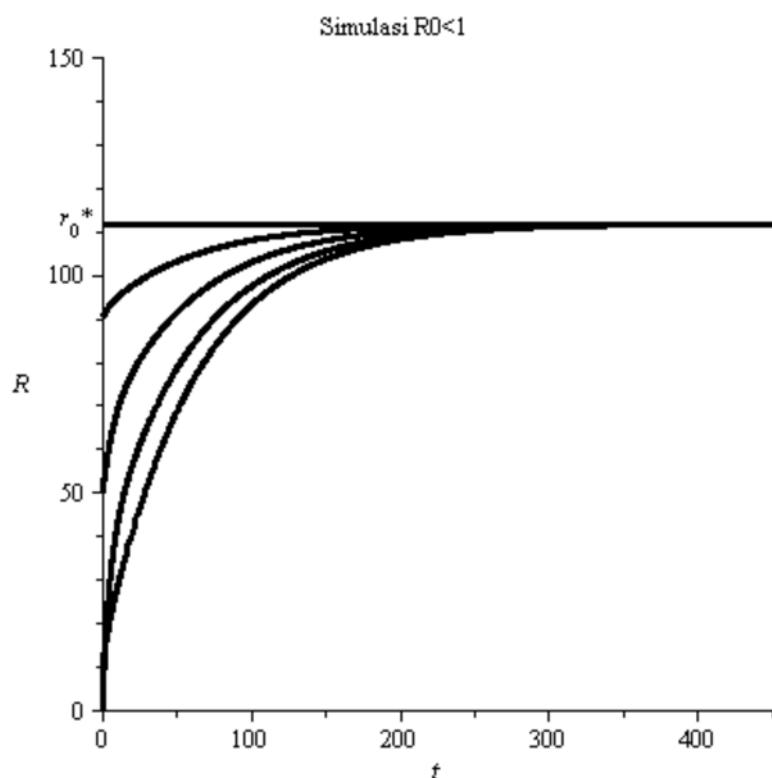
$P_0 = (N, I, R) = (11,99976; 0; 0,67921)$  dan  $P_0$  tidak stabil. Berikut disajikan grafik-grafik dari nilai  $N$ ,  $I$ , dan  $R$  yang memberikan gambaran geometris dari model matematika epidemi influenza dengan memperhatikan peluang keberhasilan vaksinasi dan kekebalan tetap dengan  $R_0 > 1$ . Gambaran geometris dari sistem pada kasus  $R_0 < 1$  dengan nilai-nilai parameter yang telah diberikan dapat dilihat pada Gambar 5, Gambar 6 dan Gambar 7.

Tabel 4. Nilai-nilai Parameter Simulasi  $R_0 > 1$ 

Parameter	Nilai
A	2
$\mu$	0,16667
$\beta$	0,5
$\alpha$	0,071429
$\gamma$	0,060955
$1 - p$	0,1
$p$	0,9
$1 - q$	0,1
$q$	0,9

menjadi epidemi pada sistem yang diteliti. Selain itu, kemungkinan adanya titik kesetimbangan epidemi tidak mungkin terjadi karena syarat yang harus dipenuhi berupa nilai  $\mu \geq \alpha$  yang merupakan kasus yang tidak mungkin terjadi dalam kehidupan nyata karena jika laju kematian murni lebih dari laju kesembuhan individu yang sakit, artinya lama waktu individu terinfeksi penyakit lebih dari waktu individu berada dalam sistem yang diamati.

Sebagai upaya pencegahan penyakit, tidak semua individu dalam populasi mendapat perlakuan vaksinasi dan kemudian tidak semua individu yang telah mendapatkan perlakuan vaksinasi terbebas dari infeksi. Dalam hal ini

Gambar 4. Proporsi Populasi Individu Sembuh saat  $t$  untuk  $R_0 < 1$ 

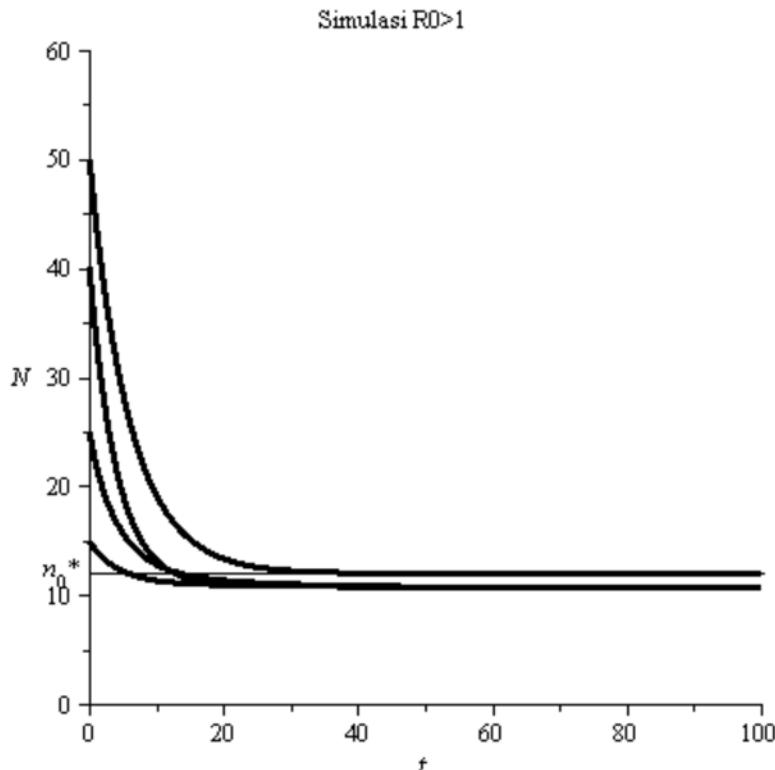
### Pembahasan

Hasil analisis pemodelan matematika epidemi influenza menunjukkan bahwa sistem persamaan yang terbentuk hanya memiliki satu titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit. Dari hal itu dapat diketahui bahwa dengan adanya pemberian vaksinasi dan juga dengan memperhatikan kekebalan tetap individu akan menyebabkan tidak akan terjadinya epidemi influenza karena individu-individu yang terinfeksi akan sembuh pada suatu waktu tertentu sebelum virus meluas dan

dilakukan vaksinasi dengan tingkat  $1 - p$  yang kemudian memiliki pengaruh pada tingkat  $1 - q$ . Pengaruh vaksinasi ini dapat dilihat pada perilaku proporsi individu yang terinfeksi. Pada Gambar 3 hasil simulasi, dapat dilihat bahwa dengan keberhasilan vaksinasi yang maka terjadi penurunan jumlah individu rentan. Semakin tinggi tingkat keberhasilan vaksinasi maka makin cepat pula grafik proporsi individu rentan mencapai garis  $I(t) = 0$  yang artinya proporsi individu terinfeksi lama kelamaan akan menghilang. Dari Gambar 4 dapat dilihat

bahwa proporsi individu yang sembuh akan semakin bertambah karena adanya vaksinasi

nilai  $I(t)$  tidak menuju ke  $I_0$  dan nilai  $R(t)$  tidak menuju ke  $R_0$ . Jadi  $\lim_{t \rightarrow \infty} (N, I, R)(t)$



Gambar 5. Proporsi Populasi Individu saat  $t$  untuk  $R_0 > 1$

dengan tingkat keberhasilan tertentu yang berhasil dilakukan, semakin tinggi tingkat keberhasilan vaksinasi maka semakin cepat wabah influenza menghilang dari sistem yang diamati.

Dari Gambar 2 dapat dilihat bahwa nilai  $N(t)$  menuju ke  $N_0$  sepanjang bertambahnya  $t$ , dengan kata lain

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = N_0$$

Dari Gambar 3 dapat dilihat bahwa nilai  $I(t)$  menuju ke  $I_0$  sepanjang bertambahnya  $t$ , dengan kata lain

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = I_0$$

Dari Gambar 4 dapat dilihat bahwa nilai  $R(t)$  menuju ke  $R_0$  sepanjang bertambahnya  $t$ , dengan kata lain

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = R_0$$

Jadi dapat dilihat bahwa

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (N, I, R)(t) = P_0$$

dengan kata lain titik kesetimbangan  $P_0$  stabil asimtosis lokal. Hal ini sesuai dengan hasil analisa terkait kestabilan titik kesetimbangan  $P_0$ . Dari Gambar 5, Gambar 6 dan Gambar 7 dapat dilihat bahwa nilai  $N(t)$  tidak menuju ke  $N_0$ ,

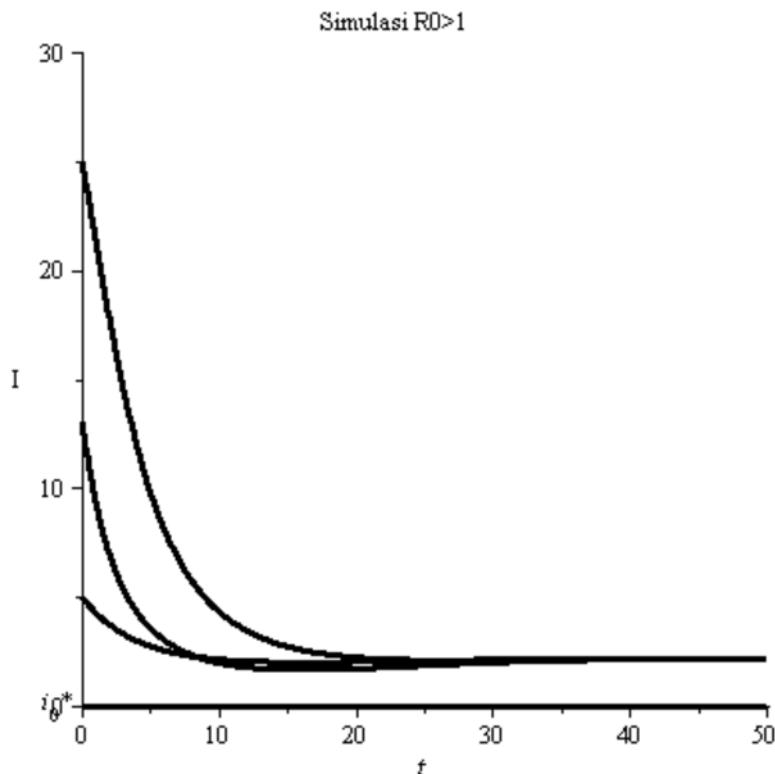
menjauhi  $P_0$ , dengan kata lain titik kesetimbangan  $P_0$  tidak stabil saat kasus  $R_0 > 1$ .

## PENUTUP

Model matematika epidemi influenza dengan memperhatikan peluang keberhasilan vaksinasi dan kekebalan tetap dapat dilihat pada Sistem (2) dan titik kesetimbangan dan sifatnya terdapat pada Teorema 1. Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan dapat disimpulkan tidak ada kemungkinan wabah tersebut meluas karena sudah dilakukan tindakan pencegahan berupa vaksinasi dengan kekebalan tetap tertentu. Hasil simulasi sebagai gambaran geometris dengan bantuan program *Maple 12* bisa dilihat pada Gambar 2, 3, 4, 5, 6, dan 7.

## DAFTAR PUSTAKA

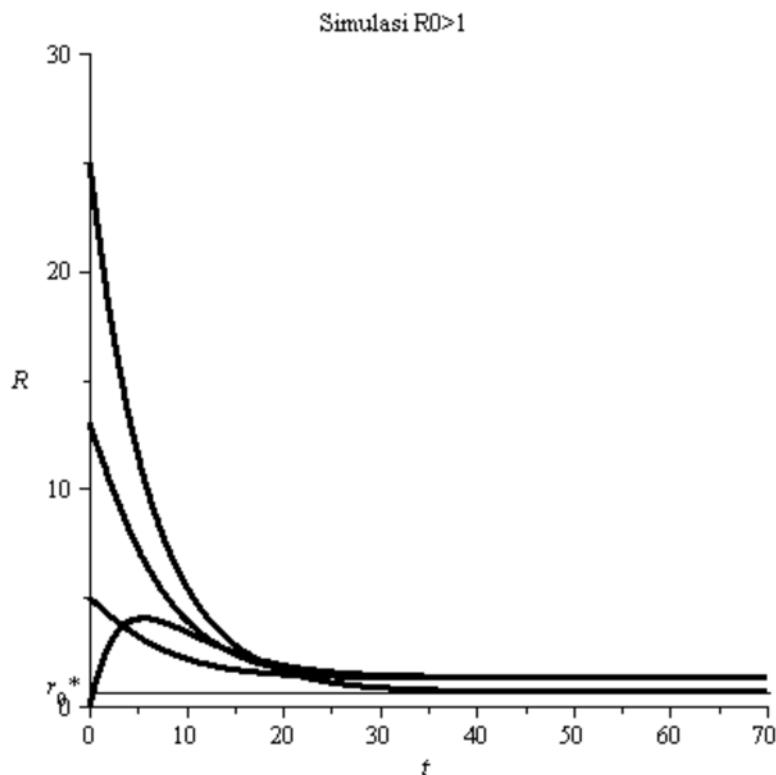
- Brankston, G., L. Gitterman, Z. Hijri, C. Lemieux & M. Gardam. 2007. Transmission of Influenza A in Human Beings. *The Lancet*, 7(4): 257 – 265.



Gambar 6. Proporsi Populasi Individu Terinfeksi saat  $t$  untuk  $R_0 > 1$

- Center for Disease Control and Prevention (CDC). 2010. Estimates of Death Associated with Seasonal Influenza – United States – 1967-2007. *Morbidity and Mortality Weekly Report*, 59(33): 1057 – 1062.
- Couch, R.B. 2000. Prevention and Treatment of Influenza. *The New England Journal of Medicine*, 343(24): 1778 – 1787.
- Fraser, C., C.A. Donnelly, S. Cauchemez, W.P. Hanage, M.D.V. Kerkhove, T.D. Hollingsworth, J. Griffin, R.F. Baggaley, H.E. Jenkins, E.J. Lyons, T. Jombart, W.R. Hinsley, N.C. Grassly, F. Balloux, A.C. Ghani, N.M. Ferguson, A. Rambaut, O.G. Pybus, H.L. Gatell, C.M.A. Aranda, I.B. Chapela, E.P. Zavala, D.M.E. Guevara, F. Checci, E. Garcia, S. Hugonnet & C. Roth. 2009. Pandemic Potential of a Strain of Influenza A (H1N1): Early Findings. *Science*, 324: 1557 – 1561.
- Kamps, B.S., C. Hoffmann & W. Preiser. 2006. *Influenza Report 2006*.
- <http://www.influenzareport.com>. [diakses 12 Desember 2015]
- Komsiyah, S. 2013. Simulasi Model Epidemik Tipe SIR dengan Strategi Vaksinasi dan Tanpa Vaksinasi. *Jurnal Stat Mat*, 13(1): 24 – 32.
- Miller, M.A., C. Viboud, M. Balinska & L. Simonsen. 2009. The Signature Features of Influenza Pandemics – Implication for Policy. *The New England Journal of Medicine*, 360(25): 2595 – 2598.
- Nicholson, K.G., J.M. Wood, & M. Zambon. 2003. Influenza. *The Lancet*. 362: 1733 – 1745.
- Palache, A., V.O. Mathieu, A. Abelin & T. Music. 2014. Seasonal Influenza Vaccine Dose Distribution in 157 Countries (2014–2011). *Vaccine*, 32: 6369 – 6376.
- Pringle, C.R. 2016. *Influenza (Flu)*. [www.merckmanuals.com](http://www.merckmanuals.com). [diakses 12 Desember 2015]

- Side, S. & S.M. Noorani. 2013. A SIR Model for Dengue Fever Disease (Simulation for South Sulawesi, Indonesia and Selangor, Malaysia). *World Journal of Modelling and Simulation*, 9(2): 96 – 105.



Gambar 7. Proporsi Populasi Individu Sembuh saat  $t$  untuk  $R_0 > 1$

Tumpey, T.M. 2005. Characterization of The Reconstructed 1918 Spanish Influenza Pandemic Virus. *Science*, 310: 77 – 80.

World Health Organization. 2012. Vaccines Against Influenza WHO Position Paper- November 2012. *Weekly Epidemiological Record*, 47(87): 461 – 476.

Yang, K.H & J.Y. Hsu. 2012. A New SIR-based Model for Influenza Epidemic, World Academy of Science. *Engineering and Technology*, 6(7): 307 – 312.