



## PEMODELAN SIRPS UNTUK PENYAKIT INFLUENZA DENGAN VAKSINASI PADA POPULASI KONSTAN

**Ardian Dwi Anggoro** ✉, **Muhammad Kharis, Supriyono**

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Indonesia  
Gedung D7 lantai 1 Kampus Sekaran, Gunungpati, Semarang, 50229

### Info Artikel

Sejarah Artikel:  
Diterima Januari 2013  
Disetujui Februari 2013  
Dipublikasikan Mei 2013

Keywords:  
Influenza  
Model SIRPS  
Titik kesetimbangan  
Vaksinasi

### Abstrak

Influenza adalah suatu penyakit infeksi saluran pernapasan. Influenza lebih dikenal dengan sebutan flu, yang disebabkan oleh virus RNA dari famili Orthomyxoviridae (virus influenza), yang menyerang unggas dan mamalia. Gejala yang paling umum dari penyakit ini adalah menggigil, demam, nyeri tenggorokan, nyeri otot, sakit kepala, batuk, dan rasa tidak nyaman. Dalam tulisan ini akan dikaji model matematika untuk penyebaran penyakit Influenza dengan vaksinasi. Model matematika yang digunakan berupa SIRPS dengan laju kelahiran diasumsikan sama dengan laju kematian. Dalam model ini terdapat pula dua titik kesetimbangan, yakni titik bebas penyakit dan titik endemik. Analisa yang dilakukan terkait dengan kestabilan titik kesetimbangan tersebut. Simulasi model dengan nilai-nilai parameter yang diberikan sebagai bentuk pengecekan terhadap hasil analisis. Vaksinasi yang dilakukan dapat mempengaruhi penyebaran penyakit Influenza dalam populasi.

### Abstract

Influenza is some kind of respiratory track infection disease. Influenza known as flue causes by RNA virus from familia of Orthomyxoviridae, it attackts aves and mammal. The most general symptom of this disease are cold, fever, throatache, shore all over, headance, Cough, and feel not comfort. In this paper, will be studied a mathematical model for the spread of Influenza by vaccination effect. Mathematical model which used is SIRPS with birth rate is assumed equal to mortality rate. In this model there are two equilibrium points, they are disease-free point and endemic point. Analysis is done related to the stability of equilibrium point. Simulation model with parameter values given as a check form to the analysis result. Vaccination is done can affect the spread of measles in the population.

## Pendahuluan

Influenza merupakan suatu penyakit infeksi saluran pernapasan. Influenza lebih dikenal dengan sebutan flu, yang disebabkan oleh virus RNA dari famili Orthomyxoviridae (virus influenza), yang menyerang unggas dan mamalia. Dalam Casagrandi dkk (2006) disebutkan bahwa virus yang menyebabkan epidemi flu dapat dibedakan dalam tiga tipe berbeda yaitu tipe A, B, dan C. Virus tipe A secara epidemiologi sangat berpengaruh terhadap kehidupan manusia karena dapat menggabungkan gen-gennya dengan strain-strain virus yang beredar di populasi binatang seperti burung, babi, dan kuda. Contoh epidemi flu yang disebabkan oleh virus tipe A adalah epidemi flu burung dan epidemi flu babi. Virus tipe A mempunyai kemampuan untuk bermutasi atau menghasilkan strain-strain baru sehingga manusia yang sudah sembuh dari epidemi flu mempunyai kemungkinan untuk tertular lagi.

Salah satu usaha yang dilakukan untuk menanggulangi wabah ini adalah dengan melakukan vaksinasi. Vaksinasi dilakukan terhadap orang yang belum terkena influenza. Dalam Carman dkk (2000) disebutkan bahwa vaksinasi memberikan kontribusi besar dalam penurunan jumlah pasien flu. Dalam Govaert dkk (1994) disebutkan bahwa ada penurunan pasien flu pada orang dewasa setelah dilakukan vaksinasi. Kwong dkk (2009) menyatakan bahwa vaksinasi mempunyai potensi yang lebih tinggi dalam mengurangi jumlah penderita flu dibandingkan dengan penggunaan antibiotik. Potter dkk (1997) juga menyatakan bahwa vaksinasi direkomendasikan sebagai salah satu strategi untuk mencegah wabah influenza pada orang usia lanjut dalam jangka waktu yang panjang.

Dari latar belakang tersebut, maka penulis merumuskan beberapa permasalahan yaitu bagaimana menurunkan model SIRPS pada penyebaran penyakit influenza dengan vaksinasi, bagaimana menentukan titik kesetimbangan dan analisis kestabilan pada penyebaran penyakit influenza dengan vaksinasi, bagaimana simulasi model pada penyebaran penyakit influenza dengan vaksinasi menggunakan program Maple 12, dan bagaimana menentukan proporsi vaksinasi minimum.

Sejalan dengan rumusan masalah, tujuan penulisan ini adalah untuk mengetahui penurunan model SIRPS pada penyebaran

penyakit influenza dengan vaksinasi, mengetahui titik kesetimbangan dan analisis kestabilan pada penyebaran penyakit influenza dengan vaksinasi, mengetahui simulasi model pada penyakit influenza dengan vaksinasi menggunakan program Maple 12, dan mengetahui proporsi vaksinasi minimum penyakit influenza.

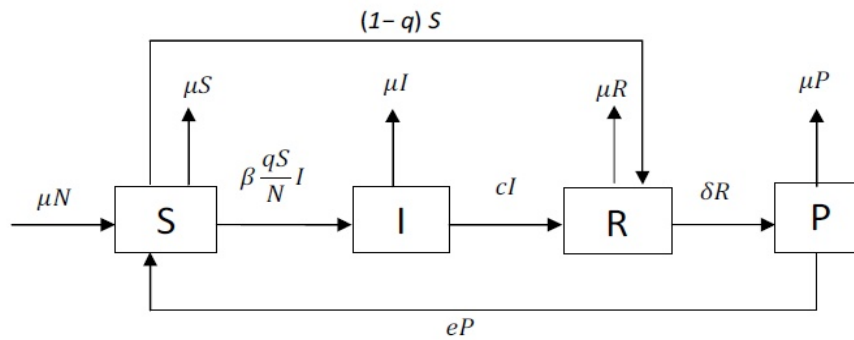
## Pembahasan

Pembentukan model SIRPS didasari oleh adanya penyakit menular. Populasi yang diberikan dibagi ke dalam empat kelas yakni kelas populasi rentan (*susceptibles*), kelas populasi terinfeksi (*infectious*), kelas populasi bebas penyakit (*recovered*) dan kelas individu yang menurun kekebalannya dan tidak kebal terhadap virus baru (*partial immunity class*).

Dalam pembentukan model ini dibatasi oleh beberapa asumsi. Asumsi-asumsi yang digunakan dalam model penyebaran penyakit campak sebagai berikut. (1) Individu yang terinfeksi penyakit influenza dapat disembuhkan. (2) Jumlah populasi diasumsikan cukup besar. (3) setiap individu yang belum terserang penyakit masuk ke subpopulasi *susceptible* (rentan terserang). (4) Penyakit menular melalui kontak langsung antara individu rentan dengan penderita. (5) Tidak ada masa inkubasi apabila terjadi proses penularan. (6) Individu yang sudah sembuh dapat menjadi rentan kembali terserang virus yang baru. (7) Individu yang rentan diberikan vaksinasi dengan ukuran vaksinasi tertentu sehingga dapat menyebabkan individu yang diberikan vaksin kebal terhadap penyakit. (8) Penyakit tidak fatal (tidak terjadi kematian karena infeksi).

Selanjutnya, asumsi yang digunakan terhadap vaksinasi dalam model ini adalah sebagai berikut. (1) Pemberian vaksin diasumsikan tidak terkendala oleh factor biaya. (2) Kekuatan vaksinasi adalah 100%, berarti setiap individu yang mendapat vaksin akan kebal dari penyakit influenza. (3) Kekebalan yang terjadi karena vaksin bersifat permanen. Hal tersebut berarti individu yang mendapat vaksin tidak dapat terinfeksi oleh penyakit yang sama sampai waktu yang tidak terbatas. (4) Terdapat virus baru yang kebal terhadap vaksin.

Secara skematis proses penyebaran penyakit influenza dengan vaksinasi dalam suatu populasi dapat disajikan dalam diagram transfer pada Gambar 1 di bawah ini.



Gambar 1. Diagram Transfer Penyebaran Penyakit Influenza dengan Vaksinasi.

Model matematika dari diagram transfer diatas selengkapnya dapat diekspresikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \mu N + eP - \mu S - \beta \frac{qS}{N} I - (1-q)S \\ \frac{dI}{dt} &= \beta \frac{qS}{N} I - \mu I - cI \\ \frac{dR}{dt} &= cI + (1-q)S - \mu R - \delta R \\ \frac{dP}{dt} &= \delta R - \mu P - eP\end{aligned}\quad (1)$$

$$N = S + I + R + P$$

Dari sistem (1) diperoleh  $\frac{dN}{dt} = 0$

sehingga  $N(t) = k$  untuk  $k$  bilangan bulat positif, karena  $N(t)$  konstan, sistem (1) dapat di skala ke total populasi  $N$  untuk menyederhanakan sistem (1). Proporsi banyaknya individu masing-masing kelompok dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$s = \frac{S}{N}, i = \frac{I}{N}, r = \frac{R}{N}, p = \frac{P}{N} \quad (2)$$

Dari persamaan (2), diperoleh

$$s + i + r + p = \frac{S}{N} + \frac{I}{N} + \frac{R}{N} + \frac{P}{N} = 1$$

Dari sistem persamaan (2), maka sistem persamaan (1) dapat disajikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= \mu + ep - \mu s - \beta qsi - (1-q)s \\ \frac{di}{dt} &= \beta qsi - \mu i - ci \\ \frac{dr}{dt} &= ci + (1-q)s - \mu r - \delta r \\ \frac{dp}{dt} &= \delta r - \mu p - ep\end{aligned}\quad (3)$$

### Analisa Model

Titik kesetimbangan diperoleh dengan menjadikan persamaan dari sistem (3) sama dengan nol. Saat  $i=0$  diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu  $Q_0 = (s, i, r, p)$  dan untuk diperoleh titik kesetimbangan endemik  $Q_1 = (s^*, i^*, r^*, p^*)$ . Selengkapnya diberikan dalam teorema berikut ini:

### Teorema 1

$$\text{Dipunyai } R_0 = \frac{\mu\beta q}{(\mu+c)(\mu+1-q)}$$

Dari sistem persamaan (3). Berdasarkan nilai  $R_0$  tersebut diperoleh

1. Jika  $R_0 < 1$  maka sistem persamaan (3) hanya mempunyai 1 titik kesetimbangan yaitu titik

$$Q_0 = (s, i, r, p) = \left( \frac{(\mu+\delta)(\mu+e)}{(\mu+e)(\mu+\delta+1-q)+\delta(1-q)}, 0, \frac{(\mu+e)(1-q)}{(\mu+e)(\mu+\delta+1-q)+\delta(1-q)}, \frac{\delta(1-q)}{(\mu+e)(\mu+\delta+1-q)+\delta(1-q)} \right)$$

kesetimbangan bebas penyakit

2. Jika  $R_0 > 1$  maka sistem persamaan (3) mempunyai 2 titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik  $Q_1 = (s^*, i^*, r^*, p^*)$  dengan

$$\begin{aligned}s^* &= \frac{\mu+c}{\beta q}, \\ i^* &= \frac{(\mu+e)(\mu+\delta)[\mu\beta q - (\mu+c)(\mu+1-q)] + e\delta(1-q)(\mu+c)}{\beta q\mu[(\mu+e)(\mu+c+\delta)+\delta c]}, \\ r^* &= \frac{1}{\beta q\mu(\mu+\delta)[(\mu+e)(\mu+c+\delta)+\delta c]} (c(\mu+e)(\mu+\delta)[\mu\beta q - (\mu+c)(\mu+1-q)] \\ &\quad + e\delta(1-q)(\mu+c) + \mu(1-q)(\mu+c)[(\mu+e)(\mu+c+\delta)+\delta c]), \\ p^* &= \frac{1}{\beta q\mu(\mu+e)(\mu+\delta)[(\mu+e)(\mu+c+\delta)+\delta c]} (c\delta(\mu+e)(\mu+\delta)[\mu\beta q - (\mu+c)(\mu+1-q)] \\ &\quad + e\delta^2(1-q)(\mu+c) + \mu\delta(1-q)(\mu+c)[(\mu+e)(\mu+c+\delta)+\delta c]).\end{aligned}$$

Bukti:

Titik kesetimbangan dicari dengan membuat nol

$$\frac{ds}{dt}, \frac{di}{dt}, \frac{dr}{dt}, \text{ dan } \frac{dp}{dt} \text{ diperoleh sistem (4)}$$

sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \mu + ep - \mu s - \beta qsi - (1-q)s &= 0, \\ \beta qsi - \mu i - ci &= 0, \\ ci + (1-q)s - \mu r - \delta r &= 0, \\ \delta r - \mu p - ep &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Penentuan eksistensi titik kesetimbangan bebas penyakit tidak tergantung dari syarat  $R_0$  sehingga dapat langsung ditentukan dari sistem (4) yaitu dengan membuat  $i=0$  yang disubstitusikan pada persamaan  $\frac{ds}{dt}, \frac{di}{dt}, \frac{dr}{dt}, \text{ dan } \frac{dp}{dt}$  diperoleh

$$s = \frac{(\mu+\delta)(\mu+e)}{(\mu+e)(\mu+\delta+1-q)+\delta(1-q)}, \quad i=0,$$

$$r = \frac{(\mu+e)(1-q)}{(\mu+e)(\mu+\delta+1-q)+\delta(1-q)},$$

$$\text{dan } p = \frac{\delta(1-q)}{(\mu+e)(\mu+\delta+1-q)+\delta(1-q)}.$$

Sehingga saat  $i=0$  diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit

$$Q_0 = (s, i, r, p) = \left( \frac{(\mu+\delta)(\mu+e)}{(\mu+e)(\mu+\delta+1-q)+\delta(1-q)}, 0, \frac{(\mu+e)(1-q)}{(\mu+e)(\mu+\delta+1-q)+\delta(1-q)}, \frac{\delta(1-q)}{(\mu+e)(\mu+\delta+1-q)+\delta(1-q)} \right)$$

Maka sistem (3) pasti mempunyai titik kesetimbangan bebas penyakit untuk segala kondisi  $R_0$ .

Penentuan titik kesetimbangan endemik dilakukan dengan mencari nilai  $i \neq 0$  dan mensyaratkan  $i > 0$ .

Dari persamaan kedua sistem (4) diperoleh:

$$s^* = \frac{\mu+c}{\beta q}, \quad r^* = \frac{ci^*+(1-q)s^*}{(\mu+\delta)}, \text{ dan } p^* = \frac{\delta[ci^*+(1-q)s^*]}{(\mu+e)(\mu+\delta)}.$$

Substitusikan  $s^*$  dan  $p^*$  ke persamaan pertama pada sistem (4) diperoleh

$$i^* = \frac{(\mu+e)(\mu+\delta)[\mu\beta q - (\mu+c)(\mu+1-q)] + e\delta(1-q)(\mu+c)}{\beta q\mu[(\mu+e)(\mu+c+\delta) + \delta c]}.$$

Dipunyai  $R_0 > 1$

Jelas nilai  $i^* > 0$

Sehingga saat  $i^* > 0$  diperoleh titik

kesetimbangan endemik  $Q_1 = (s^*, i^*, r^*, p^*)$  dengan Karena penentuan titik kesetimbangan bebas

$$s^* = \frac{\mu+c}{\beta q},$$

$$i^* = \frac{(\mu+e)(\mu+\delta)[\mu\beta q - (\mu+c)(\mu+1-q)] + e\delta(1-q)(\mu+c)}{\beta q\mu[(\mu+e)(\mu+c+\delta) + \delta c]},$$

$$r^* = \frac{1}{\beta q\mu[(\mu+e)(\mu+c+\delta) + \delta c]} \{ c(\mu+e)(\mu+\delta)[\mu\beta q - (\mu+c)(\mu+1-q)] + e\delta(1-q)(\mu+c) + \mu(1-q)(\mu+c)[(\mu+e)(\mu+c+\delta) + \delta c] \},$$

$$p^* = \frac{1}{\beta q\mu[(\mu+e)(\mu+c+\delta) + \delta c]} \{ c\delta(\mu+e)(\mu+\delta)[\mu\beta q - (\mu+c)(\mu+1-q)] + e\delta^2(1-q)(\mu+c) + \mu\delta(1-q)(\mu+c)[(\mu+e)(\mu+c+\delta) + \delta c] \}.$$

penyakit tidak tergantung dari syarat  $R_0$  dan penentuan titik kesetimbangan endemik tergantung dari syarat  $R_0 > 1$ . Jadi untuk  $R_0 > 1$  diperoleh 2 titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit  $Q_0 = (s, i, r, p)$  dan titik kesetimbangan endemik  $Q_1 = (s^*, i^*, r^*, p^*)$ .

## Teorema 2

Dipunyai  $R_0 = \frac{\mu\beta q}{(\mu+c)(\mu+1-q)}$

1. Jika  $R_0 < \frac{\mu}{\mu+1-q} < 1$

maka titik kesetimbangan  $Q_0$  stabil asimtotik lokal

2. Jika  $R_0 > 1$  maka titik kesetimbangan  $Q_0$  tidak stabil dan titik kesetimbangan endemik  $Q_1$  stabil asimtotik lokal.

Bukti :

Matriks jacobian model penyebaran penyakit *influenza* dengan pengaruh vaksinasi adalah

$$J^*(Q) = \begin{pmatrix} -\mu - \beta qi - (1-q) & -\beta qs & 0 & e \\ \beta qi & \beta qs - \mu - c & 0 & 0 \\ 1-q & c & -\mu - \delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -\mu - e \end{pmatrix}$$

Untuk kasus  $Q_0$ , diperoleh semua nilai eigen negatif apabila  $R_0 < 1$  dan ada satu nilai eigen yang positif apabila  $R_0 > 1$ , dengan kata lain jika  $R_0 < 1$  maka titik kesetimbangan  $Q_0$  stabil asimtotik lokal dan jika  $R_0 > 1$  maka titik kesetimbangan  $Q_0$  tidak stabil. Untuk kasus  $Q_1$  diperoleh persamaan karakteristiknya  $c_0\lambda^4 + c_1\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_3\lambda^1 + c_4 = 0$  dengan Jelas bahwa  $c_0 > 0$  dan  $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$  saat

$$c_0 = 1, \quad c_1 = (\mu+1-q)(R_0) + (2\mu+\delta),$$

$$c_2 = (\mu+1-q)[(3\mu+\delta+c)(R_0-1) + (2\mu+\delta)] + \mu^2 + \mu\delta$$

$$c_3 = (\mu+1-q)[(3\mu^2+2\mu c+2\mu\delta+c\delta)(R_0-1) + (\mu^2+\mu\delta)]$$

$$c_4 = \mu(\mu+\delta)(\mu+c)(\mu+1-q)(R_0-1).$$



$R_0 > 1$ . Jelas nilai  $c_1 c_2 - c_0 c_3$  positif dan  $c_3(c_1 c_2 - c_3) - c_1^2 c_4$  positif saat  $R_0 > 1$ . Dengan menggunakan kriteria Ruth Hurwitz untuk polinom pangkat 4 diperoleh simpulan bahwa  $c_0 \lambda^4 + c_1 \lambda^3 + c_2 \lambda^2 + c_3 \lambda + c_4 = 0$  mempunyai akar-akar dengan bagian real negatif. Maka titik kesetimbangan endemik  $Q_1$  stabil asimtotik lokal.

### Simulasi Model

Simulasi dilakukan menggunakan program Maple 12 dan dengan memberikan nilai-nilai untuk masing-masing parameter sesuai dengan kondisi nilai dalam teorema-teorema yang telah diberikan di atas. Simulasi ini diberikan untuk memberikan gambaran geometris terkait dengan hasil yang telah dianalisis.

Berdasarkan makna nilai-nilai parameter yang telah dijelaskan, Jika diasumsikan nilai  $\mu = 0.1$  artinya rata-rata ada 1 bayi yang lahir dan ada 1 orang yang meninggal tiap 10 hari, nilai  $\beta = 0.8$  artinya rata-rata ada 8 individu rentan yang menjadi terinfeksi dari setiap 10 kontak langsung yang terjadi antara individu rentan dengan manusia terinfeksi, nilai  $\delta = 0.1$  artinya rata-rata periode 1 manusia sembuh yang mulai menghilangkan kekebalannya dan kembali menjadi rentan adalah 10 hari, nilai artinya rata-rata periode individu terinfeksi sampai sembuh adalah 25 hari,  $=0.1$  artinya rata-rata ada 1 manusia yang kekebalannya mulai menghilang dari 10 individu dan nilai  $q=0.1$  artinya tiap hari ada 10% dari jumlah keseluruhan individu rentan yang tidak divaksinasi, jadi nilai  $1-q=0.9$  artinya tiap hari ada 90% dari jumlah keseluruhan individu rentan yang divaksinasi.

Nilai-nilai parameter yang diberikan untuk membuat simulasi dari model penyebaran penyakit influenza, disajikan dalam Tabel 1.

Kondisi awal rasio jumlah penduduk pada kelas susceptibles, infectious, recovered dan partial immunity class masing-masing adalah 0.8, 0.1, 0.1 dan 0.

Jika penyakit tersebut tidak dicegah dengan program vaksinasi maka nilai  $1-q = 0$ . Proporsi individu susceptibles, infectious, recovered dan partial immunity class untuk  $1-q = 0$  dapat ditunjukkan pada Gambar 2.

Pada kondisi setimbang tersebut, penyakit akan selalu ada sampai waktu tak terbatas. Oleh karena itu, penyakit tersebut bersifat endemik. Maka kondisi setimbang tersebut dicapai saat  $Q_1 = (s^*, i^*, r^*, p^*) = (0.175, 0.634, 0.126, 0.063)$ .

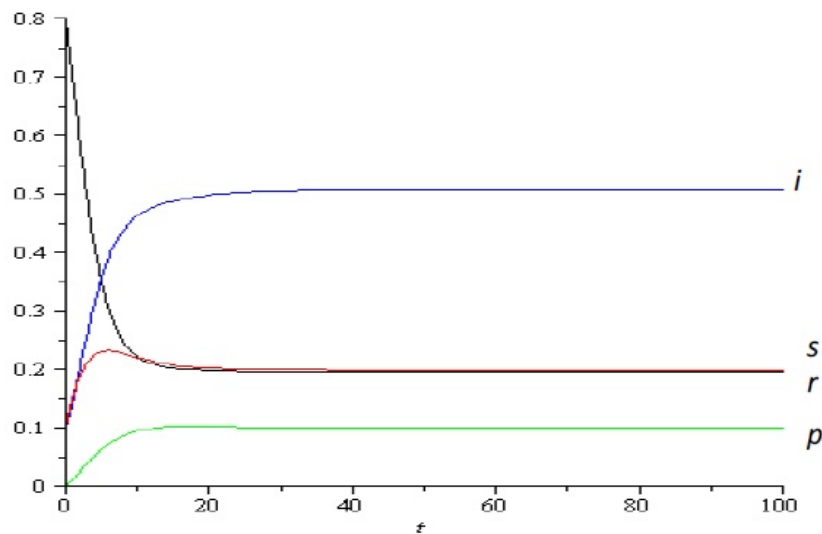
Titik  $Q_1$  tersebut merupakan titik kesetimbangan endemik karena nilai  $i \neq 0$ . Selanjutnya, akan ditentukan kestabilan dari titik kesetimbangan endemik  $Q_1$ . Besarnya rasio reproduksi dasar pada saat  $1-q = 0$  adalah  $R_0 = 5.714$ . Nilai  $R_0 > 1$  mengakibatkan keempat nilai eigen matriks Jacobian pada model ini berupa bilangan real negatif. Oleh karena itu, titik kesetimbangan endemik  $Q_1$  bersifat stabil asimtotis.

Selanjutnya, program vaksinasi dilakukan untuk mencegah meluasnya penyakit. Vaksinasi dianggap berhasil jika pada waktu tertentu penyakit akan menghilang dari populasi. Rasio reproduksi dasar dapat digunakan untuk menentukan apakah penyakit tersebut akan menghilang dari populasi atau bersifat endemik. Penyakit akan menghilang dari populasi pada waktu tertentu jika  $R_0 > 1$ , sedangkan penyakit akan tetap ada sampai waktu yang tidak terbatas (endemik) jika  $R_0 > 1$ .

Sebagai upaya pencegahan penyebaran penyakit, dilakukan program vaksinasi pada tingkat . Dalam hal ini, digunakan simulasi terhadap parameter tingkat vaksinasi untuk mengetahui pengaruh vaksinasi terhadap penyebaran penyakit. Pengaruh vaksinasi dapat

Tabel 1. Nilai Parameter untuk simulasi model

Parameter	Nilai	Parameter	Nilai
$\mu$	0.1	$c$	0.04
$\beta$	0.8	$q$	1
$e$	0.1	$1 - q$	0
$\delta$	0.1		



Gambar 2. Proporsi individu susceptibles (hitam), infectious (biru), recovered (merah), dan partial immunity class (hijau) saat  $1-q = 0$ .

dilihat pada perilaku proporsi individu infectious yang akan cenderung menghilang atau bersifat endemik.

a. Simulasi untuk  $R_0 > 1$ .

Nilai-nilai parameter yang diberikan untuk  $R_0 > 1$  disajikan dalam Tabel 2.

Jika dilakukan vaksinasi pada tingkat  $1-q=0.2$  maka proporsi individu infectious ditunjukkan oleh grafik (c) pada Gambar 3 Untuk  $1-q=0.2$ , penyakit akan selalu ada sampai waktu tak terbatas. Oleh karena itu, penyakit bersifat endemik dan tidak akan menghilang dari populasi.

Tabel 2. Nilai Parameter untuk  $R_0 > 1$

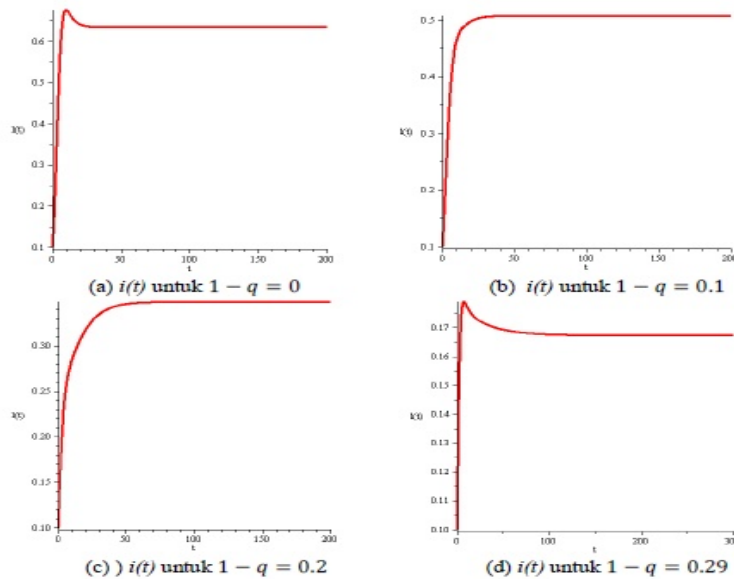
Parameter	Nilai	Parameter	Nilai
$\mu$	0.1	$c$	0.04
$\beta$	0.8	$q$	0.9
$e$	0.1	$1-q$	0.1
$\delta$	0.1		

Gambar 3 menunjukkan proporsi individu infectious untuk tingkat vaksinasi yang bervariasi yang lebih kecil dari tingkat vaksinasi minimum. Grafik (a) pada Gambar 3 menunjukkan proporsi individu infectious untuk tingkat vaksinasi  $1-q=0$ . Karena tidak dilakukan vaksinasi maka proporsi individu infectious akan bertambah dan penyakit akan selalu ada sampai waktu yang terbatas. Hal ini menyebabkan penyakit bersifat endemik.

Jika tingkat vaksinasi yang dilakukan adalah  $1-q=0.1$ , maka proporsi individu infectious ditunjukkan oleh grafik (b) pada Gambar 4 Untuk  $1-q=0.1$ , penyakit akan selalu ada sampai waktu tak terbatas. Oleh karena itu, penyakit bersifat endemik. Dengan demikian, vaksinasi yang dilakukan tidak berhasil membuat penyakit menghilang dari populasi.

Selanjutnya, jika dilakukan vaksinasi pada tingkat  $1-q=0.29$  maka proporsi individu infectious ditunjukkan oleh grafik (d) pada Gambar 3 Terlihat dalam grafik, penyakit masih ada sampai waktu tak terbatas. Sehingga, penyakit bersifat endemik dan vaksinasi yang dilakukan belum berhasil menghilangkan penyakit dari populasi.

Dengan demikian, jika  $1-q < 0.3$  maka penyakit tidak akan menghilang dari populasi sampai waktu yang tidak terbatas. Kondisi kesetimbangan yang dicapai merupakan titik kesetimbangan endemik. Titik kesetimbangan dan rasio reproduksi dasar untuk  $1-q=0$ ,  $1-q=0.1$ ,  $1-q=0.2$ , dan  $1-q=0.29$  disajikan pada Tabel 3.

Gambar 3. Proporsi individu infectious untuk  $1-q=0$ ,  $1-q=0.1$ ,  $1-q=0.2$ , dan  $1-q=0.29$ .Tabel 4.5 Titik kesetimbangan dan rasio reproduksi dasar  
Untuk  $1-q = 0$ ,  $1-q = 0.1$ ,  $1-q = 0.2$ , dan  $1-q = 0.29$ 

$q$	$1-q$	Titik Kesetimbangan $s^*, i^*, r^*, p^*$	$R_0$
1	0	(0.175, 0.634, 0.126, 0.063)	5.71
0.9	0.1	(0.194, 0.507, 0.378, 0.189)	2.57
0.8	0.2	(0.218, 0.348, 0.692, 0.346)	1.52
0.71	0.29	(0.246, 0.167, 1.050, 0.525)	1.04
<b>0.69</b>	<b>0.31</b>	<b>(0.253, 0.120, 1.142, 0.571)</b>	<b>0.96</b>

Tabel 3 menunjukkan bahwa semakin tinggi tingkat vaksinasi maka rasio reproduksi dasar  $R_0$  akan semakin menurun. Namun, untuk  $1-q < 0.3$  vaksinasi yang dilakukan belum berhasil membuat penyakit menghilang karena nilai sehingga penyakit akan selalu ada sampai waktu yang tidak terbatas.

Agar penyebaran penyakit dapat dicegah dengan sukses, maka tingkat vaksinasi yang dilakukan harus cukup lebih besar dari tingkat vaksinasi minimum. Oleh karena itu, selanjutnya dilakukan simulasi untuk  $1-q > 0.3$ .

Selanjutnya, akan diselidiki bagaimana pengaruh vaksinasi jika tingkat vaksinasi yang dilakukan lebih besar dari tingkat vaksinasi minimum.

b. Simulasi untuk  $R_0 < 1$ .

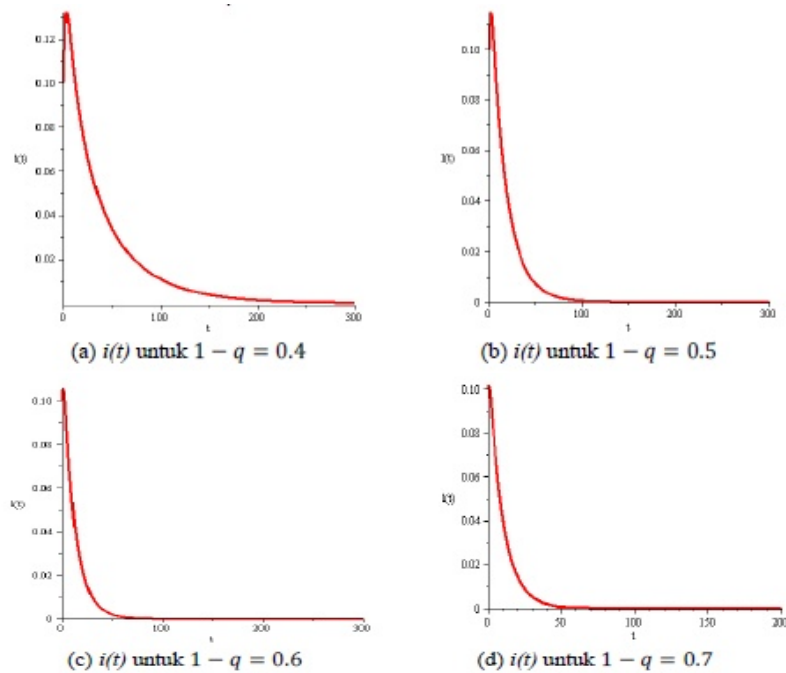
Gambar 4 menunjukkan proporsi individu infectious dengan tingkat vaksinasi yang bervariasi untuk  $1-q > 0.3$

Titik kesetimbangan yang dicapai adalah  $Q_0 = (s, i, r, p) = (0.25, 0, 0.50, 0.25)$ . Titik kesetimbangan yang dimaksud adalah titik kesetimbangan bebas penyakit karena proporsi individu infectious ( $i$ ) bernilai nol. Besarnya rasio reproduksi dasar adalah  $R_0 = 0.685$ . Titik kesetimbangan bebas penyakit  $Q_0$  tersebut bersifat stabil asimtotis karena  $R_0 < 1$ .

Berdasarkan Gambar 4 untuk  $1-q > 0.3$ , artinya penyakit akan menghilang dari populasi dalam waktu tertentu. Semakin tinggi tingkat vaksinasi, penyakit akan menghilang dari populasi dalam waktu yang semakin cepat.

c. Menentukan proporsi individu minimum yang telah divaksin.

Pada tabel 1 nilai  $1-q$  akan diubah-ubah untuk mendapatkan kapan saat  $R_0$  berubah dari  $< 1$  sampai dengan  $> 1$  artinya akan ditentukan nilai minimum dari  $1-q$  sehingga penyakit akan hilang.

Gambar 4. Proporsi individu infectious untuk  $1-q=0.4$ ,  $q=0.5$ ,  $1-q=0.6$ , dan  $1-q=0.7$ .

Dari table 4 sampai dengan 6 terlihat bahwa nilai  $1-q$  minimum untuk menanggulangi penyakit influenza apabila diberikan nilai-nilai parameter lain seperti pada tabel 4 dengan  $\beta$

yang diberikan antara 0.8 sampai 1 adalah 0.36 artinya minimal harus ada 36% vaksin yang diberikan kepada seluruh manusia yang rentan agar penyakit tidak meluas.

Tabel 4. Nilai-nilai  $1 - q$  untuk perubahan kondisi  $R_0$  saat  $\beta = 1$ 

$q$	$1 - q$	$R_0$	$q$	$1 - q$	$R_0$
0	1	0	0.6	0.4	0.8571428
0.1	0.9	0.0714285	<b>0.64</b>	<b>0.36</b>	<b>0.9937888</b>
0.2	0.8	0.1587301	0.7	0.3	1.2500000
0.3	0.7	0.2678571	0.8	0.2	1.9047619
0.4	0.6	0.4081632	0.9	0.1	3.2142857
0.5	0.5	0.5952381	1	0	7.1428571

Tabel 5. Nilai-nilai  $1 - q$  untuk perubahan kondisi  $R_0$  saat  $\beta = 0.9$ 

$q$	$1 - q$	$R_0$	$q$	$1 - q$	$R_0$
0	1	0	0.6	0.4	0.7714285
0.1	0.9	0.0642857	<b>0.66</b>	<b>0.34</b>	<b>0.9642857</b>
0.2	0.8	0.1428571	0.7	0.3	1.1250000
0.3	0.7	0.2410714	0.8	0.2	1.7142857
0.4	0.6	0.3673469	0.9	0.1	2.8928571
0.5	0.5	0.5357142	1	0	6.4285714

Tabel 6. Nilai-nilai  $1 - q$  untuk perubahan kondisi  $R_0$  saat  $\beta = 0.8$ 

$q$	$1 - q$	$R_0$	$q$	$1 - q$	$R_0$
0	1	0	0.6	0.4	0.6857142
0.1	0.9	0.0571428	<b>0.69</b>	<b>0.31</b>	<b>0.9616724</b>
0.2	0.8	0.1216984	0.71	0.29	1.0402930
0.3	0.7	0.2142857	0.8	0.2	1.5238095
0.4	0.6	0.3265306	0.9	0.1	2.5714285
0.5	0.5	0.4761904	1	0	5.7142857



**Simpulan**

Berdasarkan , jika  $R_0 = \frac{\mu\beta q}{(\mu+c)(\mu+1-q)}$  semakin tinggi tingkat vaksinasi maka rasio reproduksi dasar  $R_0$  akan semakin menurun. Namun, untuk  $1-q < 0.3$  vaksinasi yang dilakukan belum berhasil membuat penyakit menghilang karena nilai  $R_0 > 1$ . Agar penyebaran penyakit dapat dicegah, maka  $1-q > 0.3$  karena nilai  $R_0 < 1$  dan minimal harus ada 36% vaksin yang diberikan kepada seluruh manusia yang rentan sehingga penyakit secara berangsur-angsur akan menghilang dari populasi.

**DAFTAR PUSTAKA**

- Carman, W.F., Elder, A.G., Wallace, L.A., McAulay, K., Walker, A., Murray, G.D., & Stott, D.J., 2000, Effects of influenza vaccination of health-care workers on mortality of elderly people in long-term care: a randomised controlled trial, *The Lancet*, Volume 355, Issue 9198, Pages 93 – 97.
- Casagrandi, R., Bolzoni, L., Levin, S.A., & Andreasen, V., 2006, *The SIRC Model and Influenza A*, *Mathematical Biosciences*, Elsevier, 200, 152-169.
- Govaert, T.M.E., Thijs, C.T.M.C.N, Masurel, N., Sprenger, M.J.W., Dinant, G.J., & Knottnerus, J.A., 1994, The Efficacy of Influenza Vaccination in Elderly Individuals. *JAMA* 272(21):1661-1665.
- Kwong, J.C., Maaten, S., Upshur, R.E.G., Patrick, D.M., Marra, F., 2009, The Effect of Universal Influenza Immunization on Antibiotic Prescriptions: An Ecological Study, *Clinical Infectious Diseases* 49:750 – 756.
- Potter, J., Stott, D.J., Roberts, M.A., Elder, A.G., O'Donnell, B., Knight, P.V., dan Carman, W.F., 1997, Influenza Vaccination of Health Care Workers in Long-Term-Care Hospitals Reduces the Mortality of Elderly Patients, *The Journal of Infectious Diseases*, 175:1-6.