

MODEL MATEMATIKA POPULASI PEROKOK PADA DAERAH YANG MENERAPKAN DENDA

Ramadhani Trihartanto[✉], Supriyono, Muhammad Kharis

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Indonesia
Gedung D7 Lt. 1, Kampus Sekaran Gunungpati, Semarang 50229

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima Mei 2016
Disetujui Agustus 2016
Dipublikasikan Mei 2018

Abstrak

Mudahnya menemukan perokok disebabkan oleh banyaknya perokok terutama di Indonesia. Untuk menekan banyaknya perokok di Indonesia, penerapan denda diberlakukan. Tujuan penelitian adalah membangun, menganalisis, dan menginterpretasikan simulasi model matematika populasi perokok di daerah yang menerapkan denda. Dalam pembangunan model diperoleh dua model matematika. Dari kedua model diperoleh bilangan reproduksi (R_0), titik kesetimbangan endemik berbeda yang stabil untuk $R_0 > 1$ dan memiliki titik kesetimbangan tak endemik sama yang stabil untuk $R_0 < 1$ dan tak stabil untuk $R_0 > 1$. Untuk menghilangkan populasi perokok pada model pertama, diperlukan usaha untuk menekan laju kontak kurang dari 0,01 dan tingkat keefektifan denda lebih dari 0,3445. Untuk menghilangkan populasi perokok pada model kedua, diperlukan usaha untuk menekan laju kontak kurang dari 0,03 dan tingkat keefektifan denda lebih dari 0,1548.

Abstract

It is easy to find the smokers caused by enhancement of smokers, especially in Indonesia. To reduce the number of the smokers in Indonesia, the penalties was applied. The purpose of this research to construct, to analyze and to explain simulation of smokers population on fines applied areas. On the model construction, two models were obtained. From two models, we derive two reproduction ratio (R_0), two different endemic equilibrium points that stable for $R_0 > 1$ and one non-endemic equilibrium point that stable for $R_0 < 1$ and unstable for $R_0 > 1$. To omit the smokers population on the first model, the effort is required to reduce the rate of contact less than 0,01 and increase the rate of fines more than 0,3445. To omit the smokers population on the second model, the effort is required to reduce the rate of contact less than 0,03 and increase the rate of fines more than 0,1548.

How to Cite

Trihartanto R, Supriyono, & Kharis M. 2018. Model Matematika Populasi Perokok pada Daerah yang Menerapkan Denda. *UNNES Journal of Mathematics* 7(1): 1-17.

PENDAHULUAN

Mudahnya menemukan perokok disebabkan oleh banyaknya perokok terutama di Indonesia. Indonesia merupakan negara dengan persentase jumlah perokok dewasa terbanyak se-Asia Tenggara yaitu sebesar 51,11% (The Asean Tobacco Control Report, 2012).

Salah satu cara untuk mengurangi jumlah perokok adalah dengan penerapan denda. Beberapa daerah di Indonesia sudah menerapkan kebijakan membayar denda terutama di daerah yang telah ditetapkan sebagai kawasan bebas rokok seperti sekolah, rumah sakit dan tempat ibadah.

Aplikasi pemodelan matematika dapat dimanfaatkan sebagai alat bantu dalam menyelesaikan permasalahan di bidang sains, ekonomi, teknik dan kedokteran. Proses pemodelan matematika yaitu mengetahui masalah di dunia real, transformasi ke dalam masalah matematika, membuat asumsi, formulasi persamaan/ pertidaksamaan, penyelesaian persamaan/ pertidaksamaan, interpretasi solusi dan transformasi ke solusi di dunia real.

Konsep pemodelan matematika digunakan untuk mengetahui dinamika pada suatu penyakit, yakni menggunakan matematika pada konsep penyakit tersebut beserta penyebarannya (Zaman, 2009).

Penelitian yang berhubungan dengan perokok sudah dilakukan oleh beberapa orang. Menurut Andest (2013), kandungan nikotin pada paru-paru perokok akan dapat berkurang drastis jika dia berhenti merokok.

Model kecanduan terhadap rokok dibentuk dengan menggunakan model dasar dalam epidemiologi yaitu model SIR (*Susceptible, Infective, Removed*). (Kermack & McKendrick, 1927). Garsow *et al.* (1997) memperkenalkan model umum SIR populasi perokok dengan laju populasi konstan. Model matematikanya disajikan dalam Sistem (1).

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \mu N - \beta S \frac{D}{N} - \mu S \\ \frac{dD}{dt} &= \beta S \frac{D}{N} - \gamma D + \delta R - \mu D \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma D - \delta R - \mu R \end{aligned} \quad (1)$$

(Garsow *et al.*, 1997)

Model matematika perokok dikembangkan dengan mempertimbangkan tingkat efektivitas denda yang diterapkan di suatu daerah (Jami *et al.*, 2013). Model matematikanya disajikan dalam Sistem (2).

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= bN - c\delta P \frac{S}{N} (1-h) - (\mu + d1)P \\ \frac{dS}{dt} &= c\delta P \frac{S}{N} (1-h) - \gamma S (1+h) - (\mu + d2)P \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \gamma S (1+h) - (\mu + d1)Q$$

(Jami *et al.*, 2013)

Sebelumnya model matematika mengenai perokok juga dilakukan dengan membentuk empat kelas yaitu perokok potensial, perokok aktif, berhenti sementara dan berhenti permanen (Sharomi & Gumel, 2008). Model matematikanya disajikan dalam Sistem (3).

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \mu - \beta PS - \mu P \\ \frac{dS}{dt} &= \beta PS + \alpha SQ_t - (\mu + \gamma)S \\ \frac{dQ_t}{dt} &= -\mu Q_t - \alpha SQ_t + \gamma(1-\sigma)S \\ \frac{dQ_p}{dt} &= -\mu Q_p + \sigma \gamma S \end{aligned} \quad (3)$$

(Sharomi & Gumel, 2008)

Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah (1) Bagaimana model matematika pada populasi perokok di daerah yang menerapkan denda? (2) Bagaimana analisis model matematika pada populasi perokok di daerah yang menerapkan denda? (3) Bagaimana simulasi model matematika pada populasi perokok di daerah yang menerapkan denda dengan menggunakan *software Maple*?

Tujuan dari penelitian ini membangun model, menganalisis dan menginterpretasikan simulasi model matematika populasi perokok di daerah yang menerapkan denda sehingga diperoleh pengaruh dari denda terhadap populasi perokok.

Diberikan sistem persamaan diferensial sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (4)$$

dengan kondisi awal $x_i(t_0) = x_{i0}$, untuk $i = 1, 2, \dots, n$ dan $\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$.

Sistem (4) dapat dituliskan menjadi

$$\dot{x} = f(x), \quad (5)$$

Dengan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)$ dan kondisi awal $x(t_0) = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) = x_0$. Selanjutnya notasi $x(t) = (x_0, t)$ menyatakan solusi Sistem (5) dengan nilai awal x_0 .

Titik $\bar{x} \in R^n$ disebut titik ekuilibrium Sistem (4) jika $f(\bar{x}) = 0$ (Perko, 1991)

Misal matriks A bujursangkar berukuran $n \times n$, maka vektor tak nol $\bar{x} \in R^n$ disebut vektor eigen (vektor karakteristik) dari matriks A bila terdapat skalar λ , sehingga berlaku:

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x}.$$

Skalar λ disebut nilai eigen/ nilai karakteristik dari matriks A . (Mursita, 2010)

Diberikan fungsi $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ pada sistem (4) dengan $f_i \in C(E), i = 1, 2, \dots, n$. Matriks transformasi L dinamakan matriks Jacobi dari fungsi f dan ditulis dengan lambang $J_f(\bar{x})$. Jadi matriks Jacobi dari fungsi f adalah

$$J_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

(Martono, 1992)

Diberikan matriks Jacobian $J_f(\bar{x})$ dari Sistem (4), dengan nilai eigen λ .

- Jika semua bagian real nilai eigen dari matriks $J_f(\bar{x})$ bernilai negatif, maka titik ekuilibrium \bar{x} dari Sistem (4) stabil asimtotik.
- Jika terdapat paling sedikit satu nilai eigen matriks $J_f(\bar{x})$ yang bagian realnya positif, maka titik ekuilibrium \bar{x} dari Sistem (4) tidak stabil.

(Sutimin & Widowati, 2007)

Diberikan Polinomial $P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n$, dengan a_0 positif dan a_k bilangan real, $k = 1, 2, 3, \dots, n$. Matriks Hurwitz untuk $P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n$ didefinisikan sebagai matriks bujur sangkar berukuran $n \times n$ yang berbentuk sebagai berikut.

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

Determinan Hurwitz tingkat ke- k dinotasikan dengan Δ_k ; $k = 1, 2, 3, \dots, n$ yang dibentuk dari matriks Hurwitz didefinisikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= |a_1|, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \dots \\ H &= \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pembuat nol dari Polinomial $P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n$ mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika Pertidaksamaan $\frac{a_1}{a_0} > 0, \frac{a_2}{a_0} > 0, \dots, \frac{a_n}{a_0} > 0$ dipenuhi dan $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \dots, \Delta_n > 0$

(Gantmacher, 1959 dalam Barnett, 1971)

Diberikan matriks Jacobian $J_f(\bar{x})$ dari sistem (4), dengan nilai eigen λ dan misal $x = \bar{x}$ titik tetap dari $\dot{x} = f(x), x \in R^n$. \bar{x} dikatakan titik tetap hiperbolik jika tidak ada nilai eigen dari matriks $J_f(\bar{x})$ yang memiliki bagian real nol. (Wiggins, 2003:12)

Jika titik ekuilibrium \bar{x} merupakan titik tetap hiperbolik, maka struktur orbit di sekitar titik ekuilibrium bidang sistem nonlinier sama dengan bidang sistem linier. Jika titik ekuilibrium \bar{x} bukan merupakan titik tetap hiperbolik, maka tidak dapat ditentukan kesamaan struktur orbit di sekitar titik ekuilibrium bidang sistem nonlinier dan bidang sistem linier. (Wiggins, 2003:12)

METODE

Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah studi literatur atau kajian pustaka dengan tahap-tahap : (1) penentuan masalah, (2) perumusan masalah, (3) studi pustaka, (4) analisis dan pemecahan masalah, (5) penarikan kesimpulan.

Pemilihan dan perumusan masalah diperlukan untuk membatasi permasalahan sehingga diperoleh bahan kajian yang jelas. Sehingga akan lebih mudah untuk menentukan langkah dalam memecahkan masalah tersebut.

Tahap studi pustaka dilakukan dengan mengkaji sumber-sumber pustaka sehingga diperoleh gambaran umum perokok dan populasinya, model matematika, model epidemi SIR, sistem persamaan diferensial, titik ekuilibrium, nilai eigen dan vektor eigen, analisis kestabilan titik ekuilibrium dan simulasi model dengan *software Maple*.

Dalam pembahasan masalah dilakukan beberapa langkah pokok yaitu sebagai berikut. (1) Membangun model matematika populasi perokok pada daerah yang menerapkan denda, (2) Mencari titik kesetimbangan dari model matematika, (3) Menentukan bilangan reproduksi dasar (R_0), (4) Menganalisis kestabilan titik kesetimbangan, (5) Menginterpretasikan solusi model matematika.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dari hasil penelitian diperoleh dua model matematika pada daerah yang menerapkan denda yang membagi menjadi empat kelas yaitu proporsi populasi perokok potensial, proporsi populasi perokok aktif, proporsi populasi perokok yang berhenti sementara dan proporsi populasi yang berhenti permanen. Dua model yang dibangun yaitu model matematika dengan denda sebagai faktor utama dan model

matematika dengan denda bukan sebagai faktor utama.

Pada kedua model matematika diberikan batasan atau asumsi : (1) Laju rekruitmen (pertambahan populasi) konstan dan semua individu yang lahir merupakan individu yang rentan terhadap rokok. (2) Laju kematian sama dengan laju rekruitmen (konstan). (3) Penambahan perokok aktif (S) diakibatkan adanya interaksi atau kontak antara perokok aktif (S) dengan perokok potensial (P) dan kembalinya perokok yang sembuh sementara (Q_t) ke kebiasaan merokoknya. (4) Penambahan individu yang berhenti merokok permanen (Q_p) diakibatkan adanya kemauan perokok aktif (S) untuk berhenti merokok dan kemauan perokok yang berhenti sementara (Q_t) untuk berhenti secara permanen (Q_p). (5) Kematian murni terjadi pada semua kelompok dengan laju yang sama. (6) Denda hanya dikenakan pada kelompok perokok aktif.

Untuk model matematika dengan denda sebagai faktor utama ditambahkan asumsi bahwa orang yang memutuskan berhenti merokok hanya dipengaruhi oleh denda dan untuk model matematika dengan denda bukan sebagai faktor utama ditambahkan asumsi bahwa orang yang berhenti merokok tidak hanya dipengaruhi oleh denda. Dari kedua model diperoleh daftar variabel-variabel yang disajikan dalam Tabel 1.

Tabel 1. Daftar Variabel-variabel

Variabel	Syarat	Keterangan
$P(t)$	$0 \leq P(t) \leq 1$	Proporsi populasi perokok potensial pada waktu t
$S(t)$	$0 \leq S(t) < 1$	Proporsi populasi perokok aktif pada waktu t
$Q_t(t)$	$0 \leq Q_t(t) < 1$	Proporsi populasi perokok yang berhenti merokok sementara pada waktu t
$Q_p(t)$	$0 \leq Q_p(t) < 1$	Proporsi populasi perokok yang berhenti merokok secara permanen pada waktu t

Dari kedua model diperoleh daftar parameter-parameter yang disajikan dalam Tabel 2.

Tabel 2. Daftar Parameter-parameter

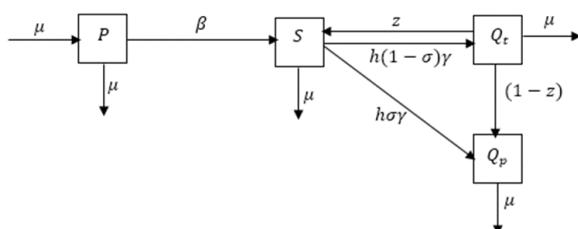
Parameter	Syarat	Keterangan
μ	$0 < \mu \leq 1$	Laju rekruitmen dan laju kematian pada populasi manusia
β	$0 < \beta \leq 1$	Laju kontak antara perokok aktif dan perokok potensial
h	$0 < h \leq 1$	Laju efektivitas denda yang dikenakan pada perokok aktif
γ	$0 < \gamma \leq 1$	Laju individu yang berhenti merokok
z	$0 < z \leq 1$	Proporsi individu yang

σ	$0 < \sigma \leq 1$	berhenti merokok untuk kembali merokok Proporsi perokok aktif yang berhenti merokok secara permanen
----------	---------------------	--

Model matematika dengan denda sebagai faktor utama diberikan dalam sistem (6).

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \mu - \mu P - \beta PS \\ \frac{dS}{dt} &= -(\mu + h\gamma)S + \beta PS + zQ_t \\ \frac{dQ_t}{dt} &= -(\mu + 1)Q_t + h(1 - \sigma)\gamma S \\ \frac{dQ_p}{dt} &= -\mu Q_p + h\sigma\gamma S + (1 - z)Q_t \end{aligned} \quad (6)$$

Diagram skematik model matematika dengan denda sebagai faktor utama disajikan dalam Gambar 1.



Gambar 1. Diagram Skematik Model Matematika (Denda Faktor Utama)

Selanjutnya dilakukan analisis terhadap model matematika pada Sistem (6) untuk menentukan titik ekuilibriumnya. Untuk menentukan titik ekuilibriumnya, masing-masing persamaan pada Sistem (6) dibuat menjadi nol.

Dari persamaan pertama Sistem (6) diperoleh

$$\mu - \mu P - \beta PS = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu - (\mu + \beta S)P = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu = (\mu + \beta S)P$$

$$P = \frac{\mu}{\mu + \beta S} \quad (7)$$

Subtitusi (7) ke persamaan kedua Sistem (6) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} -(\mu + h\gamma)S + \beta \left(\frac{\mu}{\mu + \beta S} \right) S + zQ_t &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\mu\beta S}{\mu + \beta S} - (\mu + h\gamma)S + zQ_t &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\mu\beta S - (\mu + \beta S)(\mu + h\gamma)S + (\mu + \beta S)zQ_t}{\mu + \beta S} &= 0 \\ \Leftrightarrow \mu\beta S - (\mu + \beta S)(\mu + h\gamma)S + (\mu + \beta S)zQ_t &= 0 \\ \Leftrightarrow (\mu + \beta S)zQ_t &= -\mu\beta S + (\mu + \beta S)(\mu + h\gamma)S \\ \Leftrightarrow Q_t &= \frac{(\mu + \beta S)(\mu + h\gamma)S - \mu\beta S}{(\mu + \beta S)z} \end{aligned} \quad (8)$$

Subtitusi (8) ke persamaan ketiga sistem (6) diperoleh

$$-(\mu + 1)Q_t + h(1 - \sigma)\gamma S = 0$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow -(\mu + 1) \left(\frac{(\mu + \beta S)(\mu + h\gamma)S - \mu\beta S}{(\mu + \beta S)z} \right) + h(1 - \sigma)\gamma S = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{(\mu + 1)[\mu\beta S - (\mu + \beta S)(\mu + h\gamma)S] + [h(1 - \sigma)\gamma S](\mu + \beta S)z}{(\mu + \beta S)z} = 0 \\
 &\Leftrightarrow (\mu + 1)[\mu\beta S - (\mu + \beta S)(\mu + h\gamma)S] + [h(1 - \sigma)\gamma S](\mu + \beta S)z = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left\{ \frac{(\mu + 1)[\mu\beta - (\mu + \beta S)(\mu + h\gamma)]}{[h(1 - \sigma)\gamma](\mu + \beta S)z} + 1 \right\} S = 0
 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$S = 0 \text{ atau } (\mu + 1)[\mu\beta - (\mu + \beta S)(\mu + h\gamma)] + [h(1 - \sigma)\gamma](\mu + \beta S)z = 0$$

Kasus $S = 0$ diperoleh titik ekuilibrium non-endemik $P_0 = (P, S, Q_t, Q_p) = (1, 0, 0, 0)$

Kasus $(\mu + 1)[\mu\beta - (\mu + \beta S)(\mu + h\gamma)] + [h(1 - \sigma)\gamma](\mu + \beta S)z = 0$ diperoleh

$$S = \frac{\mu[\mu\beta + \beta - \mu^2 - \mu h\gamma - \mu - h\gamma + h\gamma z - h\sigma\gamma z]}{\beta[\mu^2 + \mu h\gamma + \mu + h\gamma(1-z) + h\sigma\gamma z]} \quad (9)$$

Subtitusi (9) ke (7) diperoleh

$$P = \frac{\mu^2 + \mu h\gamma + \mu + h\gamma - h\gamma z + h\sigma\gamma z}{(\mu + 1)\beta} \quad (10)$$

Subtitusi (9) ke (8) diperoleh

$$Q_t = \frac{\mu h\gamma(1-\sigma)(\mu\beta + \beta - \mu^2 - \mu h\gamma - \mu - h\gamma + h\gamma z - h\sigma\gamma z)}{\beta(\mu + 1)(\mu^2 + \mu h\gamma + \mu + h\gamma(1-z) + h\sigma\gamma z)} \quad (11)$$

Dari persamaan keempat sistem (6) diperoleh

$$Q_p = \frac{[\mu\sigma + 1 - z + z\sigma]h\gamma(\mu\beta + \beta - \mu^2 - \mu h\gamma - \mu - h\gamma + h\gamma z - h\sigma\gamma z)}{\beta(\mu + 1)(\mu^2 + \mu h\gamma + \mu + h\gamma - h\gamma z + h\sigma\gamma z)} \quad (12)$$

Berdasarkan (9)-(12) diperoleh titik ekuilibrium

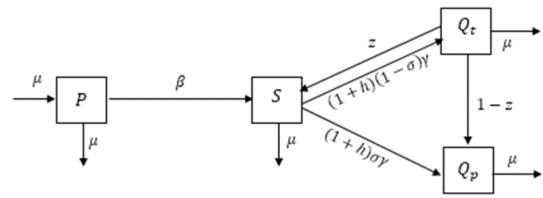
$$\begin{aligned}
 P^* &= \frac{\mu^2 + \mu h\gamma + \mu + h\gamma - h\gamma z + h\sigma\gamma z}{(\mu + 1)\beta}, \\
 S^* &= \frac{\mu[\mu\beta + \beta - \mu^2 - \mu h\gamma - \mu - h\gamma + h\gamma z - h\sigma\gamma z]}{\beta[\mu^2 + \mu h\gamma + \mu + h\gamma - h\gamma z + h\sigma\gamma z]}, \\
 Q_t^* &= \frac{\mu h\gamma(1 - \sigma)(\mu\beta + \beta - \mu^2 - \mu h\gamma - \mu - h\gamma + h\gamma z - h\sigma\gamma z)}{\beta(\mu + 1)(\mu^2 + \mu h\gamma + \mu + h\gamma - h\gamma z + h\sigma\gamma z)}, \\
 Q_p^* &= \frac{[\mu\sigma + 1 - z + z\sigma]h\gamma(\mu\beta + \beta - \mu^2 - \mu h\gamma - \mu - h\gamma + h\gamma z - h\sigma\gamma z)}{\beta(\mu + 1)(\mu^2 + \mu h\gamma + \mu + h\gamma(1 - z) + h\sigma\gamma z)}
 \end{aligned}$$

$$P_1 = (P^*, S^*, Q_t^*, Q_p^*) \text{ dimana}$$

Model matematika dengan denda bukan sebagai faktor utama diberikan dalam Sistem (13).

$$\begin{aligned}
 \frac{dP}{dt} &= \mu - \mu P - \beta P S \\
 \frac{dS}{dt} &= -(\mu + (1 + h)\gamma)S + \beta P S + z Q_t \\
 \frac{dQ_t}{dt} &= -(\mu + 1)Q_t + (1 + h)(1 - \sigma)\gamma S \\
 \frac{dQ_p}{dt} &= -\mu Q_p + (1 + h)\sigma\gamma S + (1 - z)Q_t
 \end{aligned} \quad (13)$$

Diagram skematik model matematika dengan denda bukan sebagai faktor utama disajikan dalam Gambar 2.



Gambar 2. Diagram Skematik Model Matematika (Denda Bukan Faktor Utama)

Dari kedua model diperoleh domain Sistem (6) dan Sistem (13) adalah

$$\begin{aligned}
 D = \{ (P, S, Q_t, Q_p) : & P + S + Q_t + Q_p = 1, P \\
 & \geq 0, S \geq 0, Q_t \geq 0, Q_p \geq 0 \}
 \end{aligned}$$

Selanjutnya dilakukan analisis terhadap model matematika pada sistem (13) untuk menentukan titik ekuilibriumnya. Untuk menentukan titik ekuilibriumnya, masing-masing persamaan pada sistem (13) dibuat menjadi nol.

Dari persamaan pertama sistem (13) diperoleh

$$\mu - \mu P - \beta P S = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu - (\mu + \beta S)P = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu = (\mu + \beta S)P$$

$$P = \frac{\mu}{\mu + \beta S} \quad (14)$$

Subtitusi (14) ke persamaan kedua (13) diperoleh

$$\begin{aligned}
 & -(\mu + (1+h)\gamma)S + \beta \left(\frac{\mu}{\mu + \beta S} \right) S + zQ_t = 0 \\
 & \Leftrightarrow \frac{\mu\beta S}{\mu + \beta S} - (\mu + (1+h)\gamma)S + zQ_t = 0 \\
 & \Leftrightarrow \frac{\mu\beta S - (\mu + (1+h)\gamma)(\mu + \beta S)S + (\mu + \beta S)zQ_t}{\mu + \beta S} = 0 \\
 & \Leftrightarrow \mu\beta S - (\mu + (1+h)\gamma)(\mu + \beta S)S + (\mu + \beta S)zQ_t = 0 \\
 & \Leftrightarrow (\mu + \beta S)zQ_t = -\mu\beta S + (\mu + (1+h)\gamma)(\mu + \beta S)S \\
 & \Leftrightarrow Q_t = \frac{(\mu + (1+h)\gamma)(\mu + \beta S)S - \mu\beta S}{(\mu + \beta S)z} \quad (15)
 \end{aligned}$$

Subtitusi (15) ke persamaan ketiga (13)

$$\begin{aligned}
 P^* &= \frac{\mu(\mu + 1) + (1+h)\gamma(1-z + \mu + \sigma z)}{(\mu + 1)\beta}, \\
 S^* &= \frac{\mu\{(\mu + 1)\beta - [\mu(\mu + 1) + (1+h)\gamma(1-z + \mu + \sigma z)]\}}{\beta[\mu(\mu + 1) + (1+h)\gamma(1-z + \mu + \sigma z)]}, \\
 Q_t^* &= \frac{[(1-\sigma)(1+h)\gamma]\mu\{(\mu + 1)\beta - [\mu(\mu + 1) + (1+h)\gamma(1-z + \mu + \sigma z)]\}}{\beta[\mu(\mu + 1) + (1+h)\gamma(1-z + \mu + \sigma z)]}, \\
 Q_p^* &= \left\{ \frac{(1+h)(\mu + 1)\sigma\gamma + (1-z)(1-\sigma)(1+h)\gamma}{\beta(\mu + 1)} \right\} \left[\frac{(\mu + 1)\beta - [\mu(\mu + 1) + (1+h)\gamma(1-z + \mu + \sigma z)]}{\mu(\mu + 1) + (1+h)\gamma(1-z + \mu + \sigma z)} \right]
 \end{aligned}$$

diperoleh

$$\begin{aligned}
 & -(\mu + 1)Q_t + (1+h)(1-\sigma)\gamma S = 0 \\
 & \Leftrightarrow -(\mu + 1) \left(\frac{(\mu + (1+h)\gamma)(\mu + \beta S)S - \mu\beta S}{(\mu + \beta S)z} \right) + (1+h)(1-\sigma)\gamma S = 0 \\
 & \Leftrightarrow \frac{(\mu + \beta S)(1+h)(1-\sigma)z\gamma S - (\mu + 1)[(\mu + (1+h)\gamma)(\mu + \beta S)S - \mu\beta S]}{(\mu + \beta S)z} = 0 \\
 & \Leftrightarrow (\mu + \beta S)(1+h)(1-\sigma)z\gamma S - (\mu + 1 + h\gamma\mu + \beta S - \mu\beta S) = 0 \\
 & \Leftrightarrow \{(\mu + \beta S)(1+h)(1-\sigma)z\gamma - (\mu + 1 + h\gamma\mu + \beta S - \mu\beta S)\} = 0
 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$S = 0 \quad \text{atau} \quad (\mu + \beta S)(1+h)(1-\sigma)z\gamma - (\mu + 1)[(\mu + (1+h)\gamma)(\mu + \beta S) - \mu\beta] = 0$$

Kasus $S = 0$ diperoleh titik ekulibrium non-endemik $P_0 = (P, S, Q_t, Q_p) = (1, 0, 0, 0)$.

Kasus $(\mu + \beta S)(1+h)(1-\sigma)z\gamma - (\mu + 1)[(\mu + (1+h)\gamma)(\mu + \beta S) - \mu\beta] = 0$ diperoleh

$$S = \frac{\mu\{(\mu + 1)\beta - [\mu(\mu + 1) + (1+h)\gamma(1-z + \mu + \sigma z)]\}}{\beta[\mu(\mu + 1) + (1+h)\gamma(1-z + \mu + \sigma z)]} \quad (16)$$

Subtitusi (16) ke (14) diperoleh

$$P = \frac{\mu(\mu + 1) + (1+h)\gamma(1-z + \mu + \sigma z)}{(\mu + 1)\beta} \quad (17)$$

Subtitusi (16) ke (15) diperoleh

$$Q_t = \left[\frac{(1-\sigma)(1+h)\gamma}{(\mu + 1)} \right] \frac{\mu\{(\mu + 1)\beta - [\mu(\mu + 1) + (1+h)\gamma(1-z + \mu + \sigma z)]\}}{\beta[\mu(\mu + 1) + (1+h)\gamma(1-z + \mu + \sigma z)]} \quad (18)$$

Dari persamaan keempat sistem (13) diperoleh

$$Q_p = \left\{ \frac{(1+h)(\mu + 1)\sigma\gamma + (1-z)(1-\sigma)(1+h)\gamma}{\beta(\mu + 1)} \right\} \left[\frac{(\mu + 1)\beta - [\mu(\mu + 1) + (1+h)\gamma(1-z + \mu + \sigma z)]}{\mu(\mu + 1) + (1+h)\gamma(1-z + \mu + \sigma z)} \right] \quad (19)$$

Berdasarkan (16)-(19) diperoleh titik ekulibrium $P_1 = (P^*, S^*, Q_t^*, Q_p^*)$ dimana

Untuk menganalisis P_1 diperlukan bilangan reproduksi dasar (R_0) yang menyebabkan terdapatnya perokok aktif di dalam sistem. Pada sistem (6) diperoleh $R_0 = \frac{(\mu\beta + \beta)}{\mu^2 + \mu h\gamma + \mu + h\gamma(1-z) + h\gamma z}$ dan pada sistem (13) diperoleh $R_0 = \frac{(\mu + 1)\beta}{\mu(\mu + 1) + (1+h)\gamma(1-z + \mu + \sigma z)}$. Berdasarkan R_0 dari sistem (6) diperoleh titik kesetimbangan $P_1 = (P^*, S^*, Q_t^*, Q_p^*)$

$$= \left(\frac{\frac{1}{R_0}, \frac{\mu}{\beta}(R_0 - 1)}{\left[\frac{\mu h\gamma(1-\sigma)}{\beta(\mu + 1)} \right] (R_0 - 1), \left[\frac{[\mu\sigma + 1 - z + z\sigma]h\gamma}{\beta(\mu + 1)} \right] (R_0 - 1)} \right)$$

dan R_0 dari sistem (13) diperoleh titik kesetimbangan $P_1 = (P^*, S^*, Q_t^*, Q_p^*)$

$$= \left(\frac{\frac{1}{R_0}, \frac{\mu}{\beta}(R_0 - 1)}{\left[\frac{\mu(1-\sigma)(1+h)\gamma}{\beta(\mu + 1)} \right] (R_0 - 1), \left[\frac{(1+h)(\mu + 1)\sigma\gamma + (1-z)(1-\sigma)(1+h)\gamma}{\beta(\mu + 1)} \right] (R_0 - 1)} \right).$$

Analisis eksistensi titik kesetimbangan dilakukan untuk memperoleh batas R_0 dimana terdapat titik kesetimbangan P_0 atau P_1 . Dari hasil analisis eksistensi titik kesetimbangan sistem (6) diperoleh Teorema 1.

Teorema 1

$$\text{Dipunyai } R_0 = \frac{(\mu\beta+\beta)}{\mu^2+\mu h\gamma+\mu+h\gamma(1-z)+h\sigma\gamma z}.$$

Dari sistem persamaan di atas, berdasarkan nilai R_0 tersebut diperoleh

- (1) Jika $R_0 \leq 1$, maka sistem persamaan hanya mempunyai 1 titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas populasi perokok $P_0 = (P, S, Q_t, Q_p) = (1, 0, 0, 0)$.
- (2) Jika $R_0 > 1$, maka sistem persamaan hanya mempunyai 2 titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas populasi perokok $P_0 = (P, S, Q_t, Q_p) = (1, 0, 0, 0)$ dan titik kesetimbangan endemik $P_1 = (P^*, S^*, Q_t^*, Q_p^*)$

$$= \left(\begin{array}{c} \frac{1}{R_0}, \frac{\mu}{\beta}(R_0 - 1), \\ \left[\frac{\mu h\gamma(1-\sigma)}{\beta(\mu+1)} \right] (R_0 - 1), \left[\frac{[\mu\sigma + 1 - z + z\sigma]\hbar\gamma}{\beta(\mu+1)} \right] (R_0 - 1) \end{array} \right).$$

Dari hasil analisis eksistensi titik kesetimbangan sistem (13) diperoleh Teorema 2.

Teorema 2

$$\text{Dipunyai } R_0 = \frac{(\mu+1)\beta}{\mu(\mu+1)+(1+h)\gamma(1-z+\mu+\sigma z)}.$$

Dari sistem persamaan di atas, berdasarkan nilai R_0 tersebut diperoleh

- (1) Jika $R_0 < 1$, maka sistem persamaan hanya mempunyai 1 titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas populasi perokok $P_0 = (P, S, Q_t, Q_p) = (1, 0, 0, 0)$.
- (2) Jika $R_0 > 1$, maka sistem persamaan hanya mempunyai 2 titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas populasi perokok $P_0 = (P, S, Q_t, Q_p) = (1, 0, 0, 0)$ dan titik kesetimbangan endemik $P_1 = (P^*, S^*, Q_t^*, Q_p^*)$

$$= \left(\begin{array}{c} \frac{1}{R_0}, \frac{\mu}{\beta}(R_0 - 1), \\ \left[\frac{\mu(1-\sigma)(1+h)\gamma}{\beta(\mu+1)} \right] (R_0 - 1), \\ \left[\frac{(1+h)(\mu+1)\sigma\gamma + (1-z)(1-\sigma)(1+h)\gamma}{\beta(\mu+1)} \right] (R_0 - 1) \end{array} \right)$$

Kestabilan kedua titik kesetimbangan yang diperoleh dari masing-masing sistem dianalisis dengan menggunakan nilai eigen dari matriks jacobian sistem (6) dan sistem (13).

Berikut ini merupakan analisis kestabilan titik kesetimbangan sistem (6). Pada mulanya dibentuk matriks jacobian dari sistem (6) sehingga diperoleh

$$J(E) = \begin{pmatrix} -\mu - \beta S & -\beta P & 0 & 0 \\ \beta S & -(\mu + h\gamma) + \beta P & z & 0 \\ 0 & h(1-\sigma)\gamma & -(\mu + 1) & 0 \\ 0 & h\sigma\gamma & (1-z) & -\mu \end{pmatrix}$$

Kemudian berdasarkan matriks jacobian, dianalisis pada kedua titik ekuilibrium. Sehingga diperoleh matriks jacobian pada titik non-endemik P_0 sebagai berikut.

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} -\mu & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & -(\mu + h\gamma) + \beta & z & 0 \\ 0 & h(1-\sigma)\gamma & -(\mu + 1) & 0 \\ 0 & h\sigma\gamma & (1-z) & -\mu \end{pmatrix}$$

Dari jacobian titik ekuilibrium P_0 diperoleh nilai eigen sebagai berikut.

$$\lambda_1 = -\mu$$

$$\lambda_2 = -\mu$$

Kemudian dianalisis untuk λ_3 dan λ_4 .

Persamaan karakteristik untuk λ_3 dan λ_4 adalah

$$[\lambda + (\mu + h\gamma) - \beta][\lambda + (\mu + 1)] - zh(1 - \sigma)\gamma$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + (\mu + h\gamma - \beta + \mu + 1)\lambda + [(\mu + h\gamma) - \beta](\mu + 1) - zh(1 - \sigma)\gamma$$

Didefinisikan $a_0 = 1$, $a_1 = \mu + h\gamma - \beta + \mu + 1$ dan $a_2 = [(\mu + h\gamma) - \beta](\mu + 1) - zh(1 - \sigma)\gamma$

Oleh sebab dipunyai $R_0 < 1$.

$$\text{Jelas } \frac{(\mu\beta+\beta)}{\mu^2+\mu h\gamma+\mu+h\gamma(1-z)+h\sigma\gamma z} < 1$$

Jelas $a_1 > 0$ dan $a_2 > 0$.

$$\text{Sehingga diperoleh } a_1^2 - 4a_0a_2 < a_1^2$$

Berakibat

$$\lambda_{3,4} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0} < 0 \quad (20)$$

$$\text{Jelas } a_1^2 - 4a_0a_2 > 0 \quad (21)$$

Berdasarkan (20) dan (21) diperoleh nilai eigen $\lambda_{3,4}$ merupakan bilangan real negatif.

Apabila $R_0 = 1$ mengakibatkan $\lambda_{3,4}$ ada yang bernilai nol.

Diperoleh Teorema 3 sebagai berikut.

Teorema 3

Diberikan $R_0 = \frac{(\mu\beta+\beta)}{\mu^2+\mu h\gamma+\mu+h\gamma(1-z)+h\sigma\gamma z}$ dan titik ekuilibrium $P_0 = (P, S, Q_t, Q_p) = (1, 0, 0, 0)$.

- (1) Jika $R_0 < 1$ maka titik kesetimbangan P_0 stabil asimtotik lokal,
- (2) Jika $R_0 = 1$ maka titik kesetimbangan P_0 bukan titik hiperbolik.
- (3) Jika $R_0 > 1$ maka titik kesetimbangan P_0 tidak stabil.

Selanjutnya dianalisis matriks jacobian untuk mengetahui kestabilan titik ekuilibrium endemik P_1 .

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} -\mu - \beta S^* & -\beta P^* & 0 & 0 \\ \beta S^* & -(\mu + h\gamma) + \beta P^* & z & 0 \\ 0 & h(1-\sigma)\gamma & -(\mu + 1) & 0 \\ 0 & h\sigma\gamma & (1-z) & -\mu \end{pmatrix}$$

Misal $K_1 = \mu + h\gamma$; $K_2 = h(1-\sigma)\gamma$; $K_3 = \mu + 1$; $K_4 = h\sigma\gamma$; $G = \beta S^*$ dan $G_1 = \beta P^*$

Diperoleh

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} -\mu - G & -G_1 & 0 & 0 \\ G & -K_1 + G_1 & z & 0 \\ 0 & K_2 & -K_3 & 0 \\ 0 & K_4 & (1-z) & -\mu \end{pmatrix}$$

Diperoleh

$$\lambda_1 = -\mu$$

Kemudian dianalisis untuk λ_2, λ_3 dan λ_4 .

Persamaan karakteristik untuk λ_2, λ_3 dan λ_4 adalah sebagai berikut.

$$\lambda^3 + [K_1 - G_1 + K_3 + (\mu + G)]\lambda^2 + [(K_1 - G_1)K_3 + (\mu + G)(K_1 - G_1 + K_3) - zK_2 + G_1G]\lambda + (\mu + G)(K_1 - G_1)K_3 - (\mu + G)zK_2 + G_1GK_3 = 0 \quad (22)$$

Persamaan (22) dapat diubah menjadi

$$b_0\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0$$

dengan $b_0 = 1$

$$b_1 = K_1 - G_1 + K_3 + (\mu + G)$$

$$b_2 = (K_1 - G_1)K_3 + (\mu + G)(K_1 - G_1 + K_3) - zK_2 + G_1G$$

$$b_3 = (\mu + G)(K_1 - G_1)K_3 - (\mu + G)zK_2 + G_1GK_3$$

Jelas $b_0 = 1 > 0$

$$b_1 = K_1 - G_1 + K_3 + (\mu + G) > 0$$

$$b_2 = (K_1 - G_1)K_3 + (\mu + G)(K_1 - G_1 + K_3) - zK_2 + G_1G > 0$$

$$b_3 = (\mu + G)(K_1 - G_1)K_3 - (\mu + G)zK_2 + G_1GK_3 > 0$$

$$\text{Dan } b_1b_2 - b_0b_3 > 0$$

Berdasarkan kriteria Routh Hurwitz diperoleh persamaan (22) memiliki nilai eigen dengan bagian real negatif.

Diperoleh Teorema 4 sebagai berikut.

Teorema 4

$$\begin{aligned} \text{Diberikan } R_0 &= \frac{(\mu\beta+\beta)}{\mu^2+\mu h\gamma+\mu+h\gamma(1-z)+h\sigma\gamma z} \text{ dan titik} \\ \text{ekuilibrium } P_1 &= (P^*, S^*, Q_t^*, Q_p^*) \\ &= \left(\frac{1}{R_0}, \frac{\mu}{\beta}(R_0 - 1), \right. \\ &\quad \left. \left[\frac{\mu h\gamma(1-\sigma)}{\beta(\mu+1)} \right] (R_0 - 1), \left[\frac{[\mu\sigma+(1-z)+z\sigma]h\gamma}{\beta(\mu+1)} \right] (R_0 - 1) \right). \end{aligned}$$

Jika $R_0 > 1$ maka titik kesetimbangan P_1 stabil asimtotik lokal.

Berikut ini merupakan analisis kestabilan titik kesetimbangan sistem (13). Pada mulanya dibentuk matriks jacobian dari sistem (13) sehingga diperoleh

$$J(E) = \begin{pmatrix} -\mu - \beta S & -\beta P & 0 & 0 \\ \beta S & -(\mu + (1+h)\gamma) + \beta P & z & 0 \\ 0 & (1+h)(1-\sigma)\gamma & -(\mu + 1) & 0 \\ 0 & (1+h)\sigma\gamma & (1-z) & -\mu \end{pmatrix}$$

Kemudian berdasarkan matriks jacobian, dianalisis pada kedua titik ekuilibrium. Sehingga diperoleh matriks jacobian pada titik non-endemik P_0 sebagai berikut.

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} -\mu & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & -(\mu + (1+h)\gamma) + \beta & z & 0 \\ 0 & (1+h)(1-\sigma)\gamma & -(\mu + 1) & 0 \\ 0 & (1+h)\sigma\gamma & (1-z) & -\mu \end{pmatrix}$$

Dari jacobian titik ekuilibrium P_0 diperoleh nilai eigen sebagai berikut.

$$\lambda_1 = -\mu$$

$$\lambda_2 = -\mu$$

Kemudian dianalisis untuk λ_3 dan λ_4 .

Persamaan karakteristik untuk λ_3 dan λ_4 adalah

$$[\lambda + (\mu + (1+h)\gamma) - \beta][\lambda + (\mu + 1)] - (1+h)(1-\sigma)z\gamma$$

$$= \lambda^2 + [(\mu + (1+h)\gamma) - \beta + \mu + 1]\lambda +$$

$$[(\mu + (1 + h)\gamma) - \beta](\mu + 1) - (1 + h)(1 - \sigma)z\gamma$$

Didefinisikan $a_0 = 1, a_1 = (\mu + (1 + h)\gamma) - \beta + \mu + 1$ dan $a_2 = [(\mu + (1 + h)\gamma) - \beta](\mu + 1) - (1 + h)(1 - \sigma)z\gamma$

Oleh sebab dipunyai $R_0 < 1$.

$$\text{Jelas } \frac{(\mu+1)\beta}{\mu(\mu+1)+(1+h)\gamma(1-z+\mu+\sigma z)} < 1$$

Jelas $a_1 > 0$ dan $a_2 > 0$.

Sehingga diperoleh $a_1^2 - 4a_0a_2 < a_1^2$

Berakibat

$$\lambda_{3,4} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0} < 0 \quad (23)$$

$$\text{Jelas } a_1^2 - 4a_0a_2 > 0 \quad (24)$$

Berdasarkan (23) dan (24) diperoleh nilai eigen $\lambda_{3,4}$ merupakan bilangan real negatif.

Apabila $R_0 = 1$ mengakibatkan $\lambda_{3,4}$ ada yang bernilai nol.

Diperoleh Teorema 5 sebagai berikut.

Teorema 5

Diberikan $R_0 = \frac{(\mu+1)\beta}{\mu(\mu+1)+(1+h)\gamma(1-z+\mu+\sigma z)}$ dan titik ekuilibrium $P_0 = (P, S, Q_t, Q_p) = (1, 0, 0, 0)$.

- (1) Jika $R_0 < 1$ maka titik kesetimbangan P_0 stabil asimtotik lokal,
- (2) Jika $R_0 = 1$ maka titik kesetimbangan P_0 bukan titik hiperbolik.
- (3) Jika $R_0 > 1$ maka titik kesetimbangan P_0 tidak stabil.

Selanjutnya dianalisis matriks jacobian untuk mengetahui kestabilan titik ekuilibrium endemik P_1 .

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} -\mu - \beta S^* & -\beta P^* & 0 & 0 \\ \beta S^* & -(\mu + (1 + h)\gamma) + \beta P^* & z & 0 \\ 0 & (1 + h)(1 - \sigma)\gamma & -(\mu + 1) & 0 \\ 0 & (1 + h)\sigma\gamma & (1 - z) & -\mu \end{pmatrix}$$

Misal $K_1 = \mu + (1 + h)\gamma; K_2 = (1 + h)(1 - \sigma)\gamma; K_3 = \mu + 1; K_4 = (1 + h)\sigma\gamma; G = \beta S^*$ dan $G_1 = \beta P^*$

Diperoleh

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} -\mu - G & -G_1 & 0 & 0 \\ G & -K_1 + G_1 & z & 0 \\ 0 & K_2 & -K_3 & 0 \\ 0 & K_4 & (1 - z) & -\mu \end{pmatrix}$$

Diperoleh

$$\lambda_1 = -\mu$$

Kemudian dianalisis untuk λ_2, λ_3 dan λ_4 .

Persamaan karakteristik untuk λ_2, λ_3 dan λ_4 adalah sebagai berikut.

$$\lambda^3 + [K_1 - G_1 + K_3 + (\mu + G)]\lambda^2 + [(K_1 - G_1)K_3 + (\mu + G)(K_1 - G_1 + K_3) - zK_2 + G_1G]\lambda + (\mu + G)(K_1 - G_1)K_3 - (\mu + G)zK_2 + G_1GK_3 = 0 \quad (25)$$

Persamaan (25) dapat diubah menjadi

$$b_0\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0$$

dengan $b_0 = 1$

$$b_1 = K_1 - G_1 + K_3 + (\mu + G)$$

$$b_2 = (K_1 - G_1)K_3 + (\mu + G)(K_1 - G_1 + K_3) - zK_2 + G_1G$$

$$b_3 = (\mu + G)(K_1 - G_1)K_3 - (\mu + G)zK_2 + G_1GK_3$$

Jelas $b_0 = 1 > 0$

$$b_1 = K_1 - G_1 + K_3 + (\mu + G) > 0$$

$$b_2 = (K_1 - G_1)K_3 + (\mu + G)(K_1 - G_1 + K_3) - zK_2 + G_1G > 0$$

$$b_3 = (\mu + G)(K_1 - G_1)K_3 - (\mu + G)zK_2 + G_1GK_3 > 0$$

Dan $b_1b_2 - b_0b_3 > 0$

Berdasarkan kriteria Routh Hurwitz diperoleh persamaan (25) memiliki nilai eigen dengan bagian real negatif.

Diperoleh Teorema 6 sebagai berikut.

Teorema 6

Diberikan $R_0 = \frac{(\mu+1)\beta}{\mu(\mu+1)+(1+h)\gamma(1-z+\mu+\sigma z)}$ dan titik ekuilibrium $P_1 = (P^*, S^*, Q_t^*, Q_p^*)$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{R_0}, \frac{\mu}{\beta}(R_0 - 1), \\ \left[\frac{\mu h \gamma (1 - \sigma)}{\beta(\mu + 1)} \right] (R_0 - 1), \left[\frac{[\mu \sigma + (1 - z) + z\sigma]h\gamma}{\beta(\mu + 1)} \right] (R_0 - 1) \end{pmatrix}.$$

Jika $R_0 > 1$ maka titik kesetimbangan P_1 stabil asimtotik lokal.

Selanjutnya dilakukan interpretasi model ke dalam bentuk simulasi berbantuan *software* Maple. Simulasi diawali dengan memberikan nilai awal pada parameter-parameter dan mengubah-ubah nilai untuk parameter tertentu pada model matematika. Untuk model matematika dengan denda sebagai faktor utama/ sistem (6) dimasukkan nilai-nilai awal sebagai berikut.

$$\begin{aligned}h &= 0,7 \\ \mu &= 0,0083 \\ \gamma &= 0,0111 \\ z &= 0,7 \\ \sigma &= 0,2\end{aligned}$$

Rasio reproduksi (R_0) untuk beberapa nilai β dimana $\beta < 0,0118$ diberikan pada Tabel 3.

Tabel 3. Rasio Reproduksi Dasar (R_0) untuk Beberapa Nilai β (Kasus $R_0 < 1$)

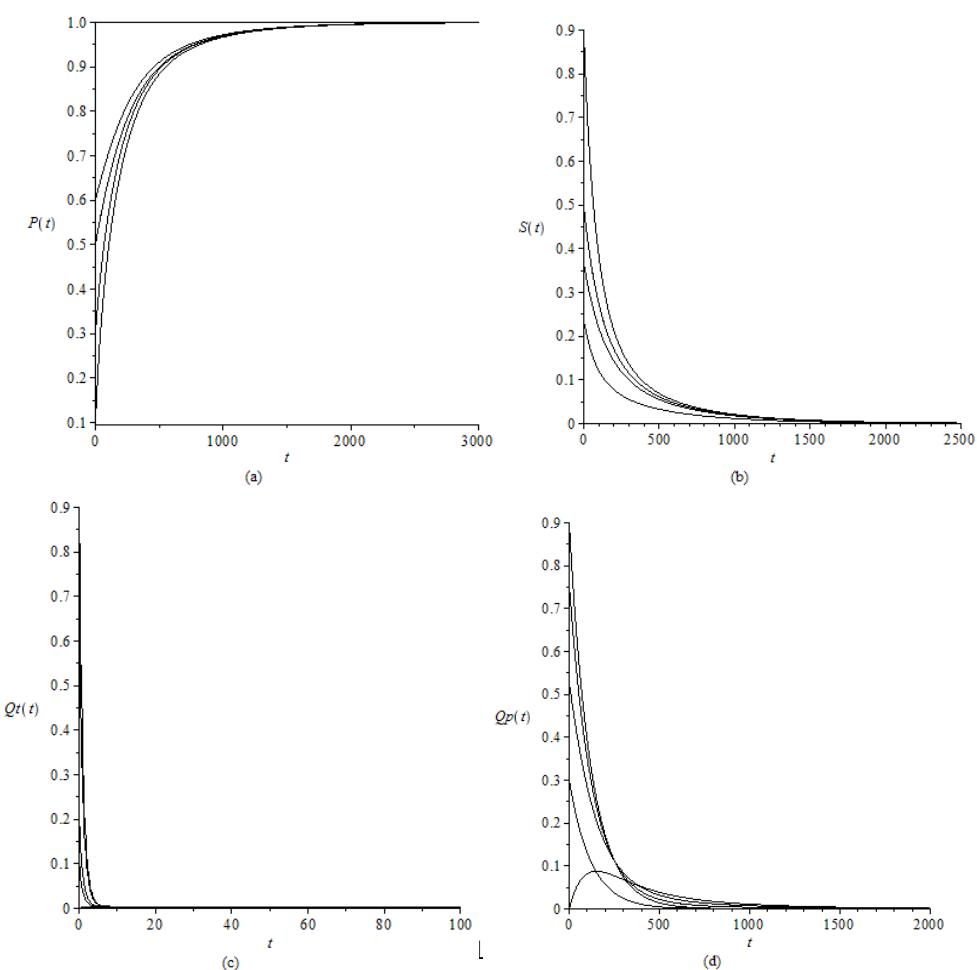
Rasio Reproduksi Dasar (R_0)	β
0,8507	0,01
0,4254	0,005
0,0851	0,001

Titik Kesetimbangan P_1 dan Rasio Reproduksi Dasar (R_0) untuk nilai $\beta = 0,05$; $\beta = 0,1$ dan $\beta = 0,3$ disajikan dalam Tabel 4.

Tabel 4 Titik Kesetimbangan (P_1) dan Rasio Reproduksi Dasar (R_0) untuk Beberapa Nilai β

Titik Kesetimbangan (P_1)	R_0	β
(0,2351; 0,5401; 0,0033; 0,2215)	4,2536	0,05
(0,1175; 0,6231; 0,0038; 0,2555)	8,5073	0,1
(0,0392; 0,6784; 0,0042; 0,2782)	25,5219	0,3

Kondisi geometris dinamika populasi $P(t)$, $S(t)$, $Q_t(t)$ dan $Q_p(t)$ terhadap waktu t pada saat $\beta = 0,01$ disajikan pada Gambar 3.



Gambar 3. Kondisi Geometris (a) $P(t)$, (b) $S(t)$, (c) $Q_t(t)$ dan (d) $Q_p(t)$ terhadap Waktu t pada saat $\beta = 0,01$ dengan $R_0 < 1$

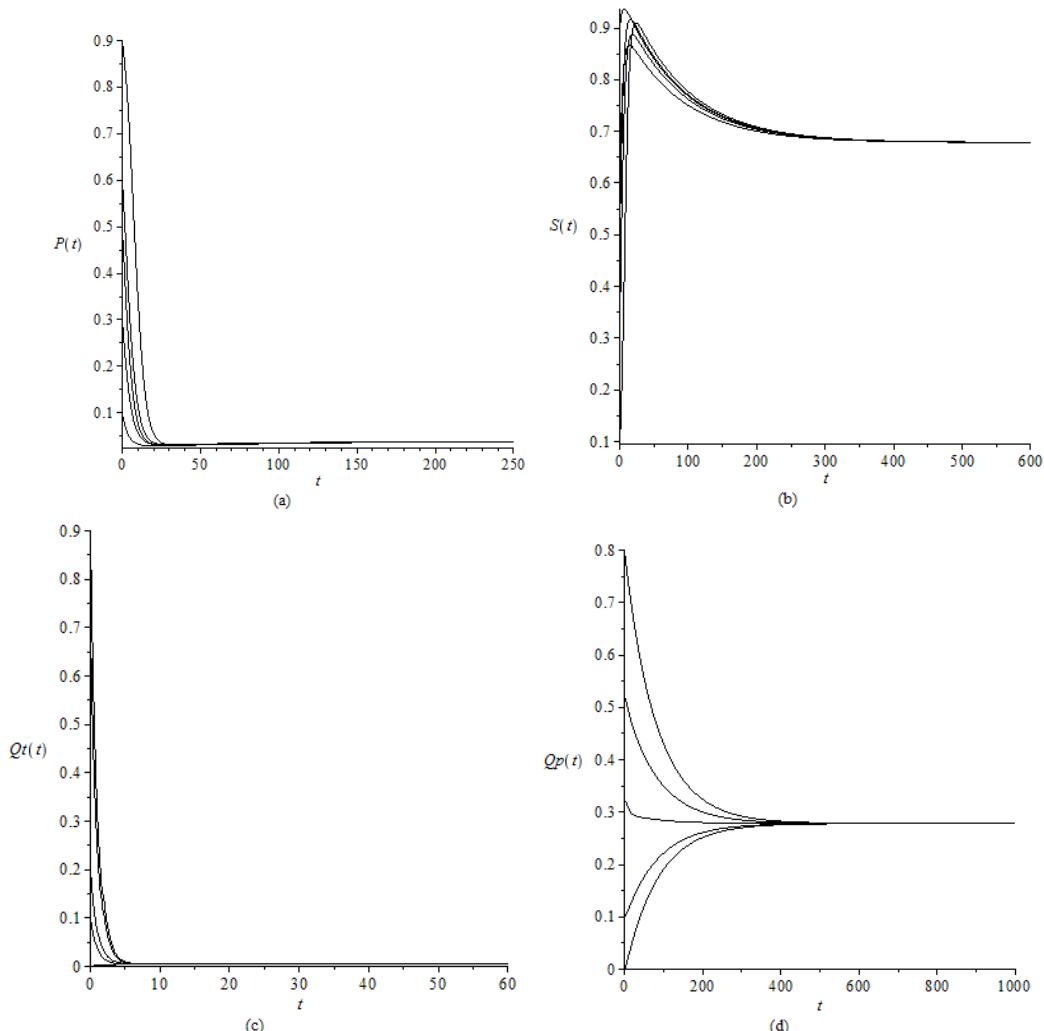
Eksistensi titik kesetimbangan pada $\beta = 0,01$ dan $\beta = 0,02$ disajikan dalam Tabel 5.

Tabel 5. Eksistensi Titik Kesetimbangan pada $\beta = 0,01$ dan $\beta = 0,02$

β	h	Titik Kesetimbangan
0,01	0,1	P_0 tak stabil, P_1 stabil
	0,2	P_0 tak stabil, P_1 stabil
	0,3	P_0 tak stabil, P_1 stabil
	0,3445	P_0 stabil
	0,4	P_0 stabil
	0,5	P_0 stabil
0,02	0,1	P_0 tak stabil, P_1 stabil
	0,2	P_0 tak stabil, P_1 stabil
	0,4	P_0 tak stabil, P_1 stabil
	0,6	P_0 tak stabil, P_1 stabil
	0,8	P_0 tak stabil, P_1 stabil
	1	P_0 tak stabil, P_1 stabil

Kondisi geometris dinamika populasi $P(t), S(t), Q_t(t)$ dan $Q_p(t)$ terhadap waktu t pada saat $\beta = 0,3$ disajikan pada Gambar 4.

Selanjutnya untuk memperjelas tingkat perbedaan proporsi masing-masing populasi dalam sistem, dengan nilai $\beta = 0,8$ akan diperlihatkan dinamika perbedaan titik kesetimbangan endemik untuk beberapa nilai h yang disajikan dalam Tabel 6.

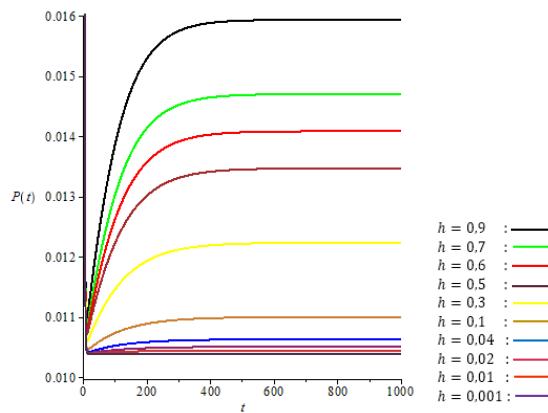


Gambar 4. Kondisi Geometris (a) $P(t)$, (b) $S(t)$, (c) $Q_t(t)$ dan (d) $Q_p(t)$ terhadap Waktu t pada saat $\beta = 0,3$ dengan $R_0 > 1$

Tabel 6. Dinamika Titik Kesetimbangan Endemik pada $\beta = 0,8$ untuk Beberapa Nilai h

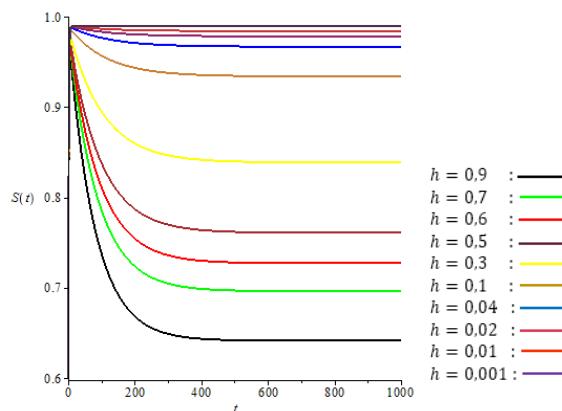
h	P	S	Q_t	Q_p
0,9	0,0159	0,6410	0,0051	0,3380
0,7	0,0147	0,6957	0,0043	0,2853
0,6	0,0141	0,7267	0,0038	0,2554
0,5	0,0135	0,7605	0,0033	0,2227
0,3	0,0122	0,8382	0,0022	0,1473
0,1	0,0110	0,9335	0,0008	0,0547
0,04	0,0106	0,9664	0,0003	0,0226
0,02	0,0105	0,9779	0,0002	0,0115
0,01	0,0104	0,9837	0,0001	0,0058
0,001	0,0104	0,9890	0,0000	0,0006

Dinamika proporsi populasi perokok potensial (P) pada beberapa nilai h dengan $\beta = 0,8$ disajikan pada Gambar 5.



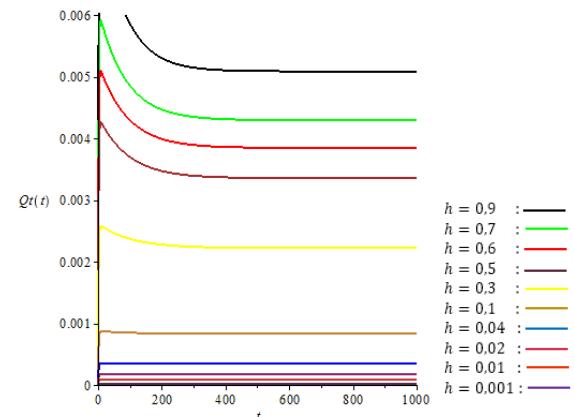
Gambar 5. Dinamika P pada Beberapa Nilai h dengan $\beta = 0,8$.

Dinamika proporsi populasi perokok aktif (S) pada beberapa nilai h dengan $\beta = 0,8$ disajikan pada Gambar 6.



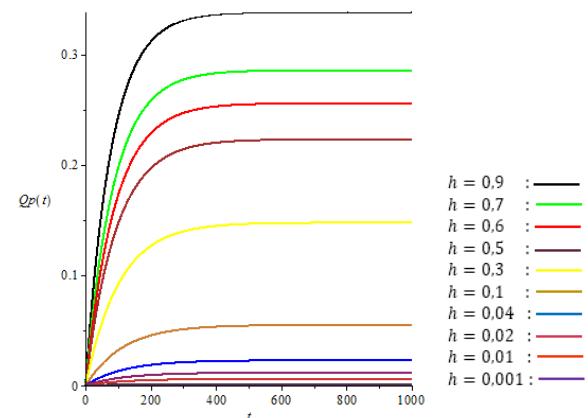
Gambar 6. Dinamika S pada Beberapa Nilai h dengan $\beta = 0,8$

Dinamika proporsi populasi perokok yang sembuh sementara (Q_t) pada beberapa nilai h dengan $\beta = 0,8$ disajikan pada Gambar 7.



Gambar 7. Dinamika Q_t pada Beberapa Nilai h dengan $\beta = 0,8$

Dinamika proporsi populasi perokok yang sembuh permanen (Q_p) pada beberapa nilai h dengan $\beta = 0,8$ disajikan pada Gambar 8.



Gambar 8. Dinamika Q_p pada Beberapa Nilai h dengan $\beta = 0,8$

Untuk model matematika dengan denda bukan sebagai faktor utama/ sistem (13) dimasukkan nilai-nilai awal sebagai berikut.

$$\begin{aligned} h &= 0,7 \\ \mu &= 0,0167 \\ \gamma &= 0,02564 \\ z &= 0,7 \\ \sigma &= 0,2 \end{aligned}$$

Rasio reproduksi (R_0) untuk beberapa nilai β dimana $\beta < 0,0363$ diberikan pada Tabel 7.

Tabel 7. Rasio Reproduksi Dasar (R_0) untuk Beberapa Nilai β (Kasus $R_0 < 1$)

Rasio Reproduksi Dasar (R_0)	β
0,8269	0,03
0,2756	0,01
0,0276	0,001

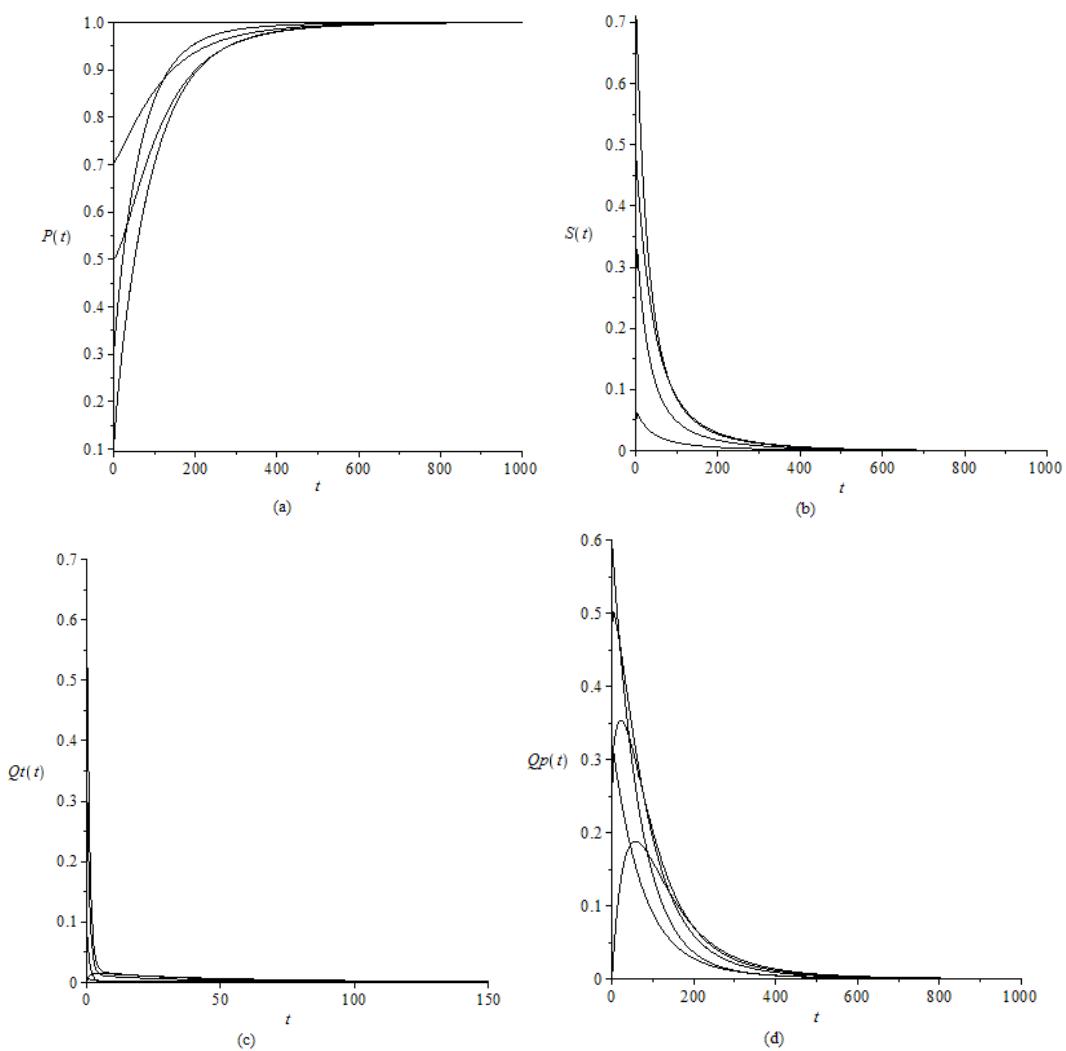
Kesetimbangan (P_1) dan Rasio Reproduksi Dasar (R_0) untuk beberapa nilai β disajikan

dalam tabel 8

Tabel 8 Titik Kesetimbangan (P_1) dan Rasio Reproduksi Dasar (R_0) untuk Beberapa Nilai β

P_1	R_0	β
(0,7256; 0,1263; 0,0043; 0,1438)	1,3782	0,05
(0,1209; 0,4046; 0,0139; 0,4605)	8,2691	0,3
(0,0604; 0,4325; 0,0148; 0,4922)	16,5382	0,6

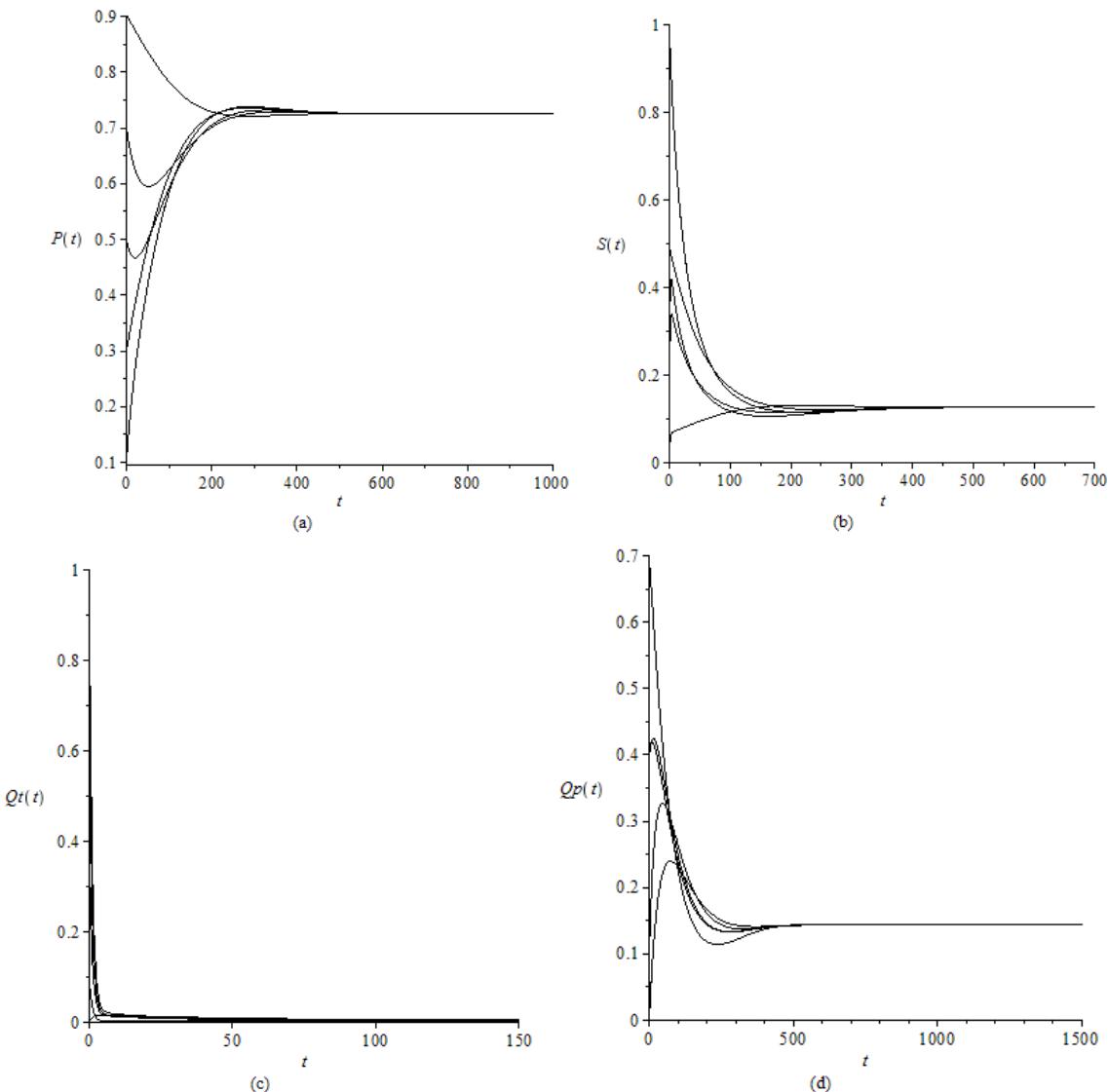
Kondisi geometris dinamika populasi $P(t), S(t), Q_t(t)$ dan $Q_p(t)$ terhadap waktu t pada saat $\beta = 0,03$ disajikan pada Gambar 9



Gambar 9. Kondisi Geometris (a) $P(t)$, (b) $S(t)$, (c) $Q_t(t)$ dan (d) $Q_p(t)$ terhadap Waktu t pada saat $\beta = 0,03$ dengan $R_0 < 1$

Eksistensi titik kesetimbangan pada $\beta = 0,03$ dan $\beta = 0,04$ disajikan dalam Tabel 9.

	0,8	P_0 tak stabil, P_1 stabil
	1	P_0 tak stabil, P_1 stabil
Kondisi geometris dinamika populasi $P(t), S(t), Q_t(t)$ dan $Q_p(t)$ terhadap waktu t pada saat $\beta = 0,05$ disajikan dalam Gambar		



Gambar 10. Kondisi Geometris (a) $P(t)$, (b) $S(t)$, (c) $Q_t(t)$ dan (d) $Q_p(t)$ terhadap Waktu t pada saat $\beta = 0,05$ dengan $R_0 > 1$

Tabel 9. Eksistensi Titik Kesetimbangan pada $\beta = 0,01$ dan $\beta = 0,02$

β	h	Titik Kesetimbangan
0,03	0,1	P_0 tak stabil, P_1 stabil
	0,1548	P_0 tak stabil, P_1 stabil
	0,2	P_0 stabil
	0,3	P_0 stabil
	0,4	P_0 stabil
0,04	0,5	P_0 stabil
	0,1	P_0 tak stabil, P_1 stabil
	0,2	P_0 tak stabil, P_1 stabil
	0,4	P_0 tak stabil, P_1 stabil
	0,6	P_0 tak stabil, P_1 stabil

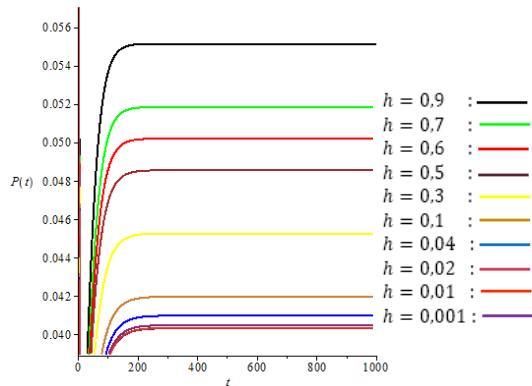
10.

Selanjutnya untuk memperjelas tingkat perbedaan proporsi masing-masing populasi dalam sistem, dengan nilai $\beta = 0,7$ akan diperlihatkan dinamika perbedaan titik kesetimbangan endemik untuk beberapa nilai h yang disajikan dalam Tabel 10.

Tabel 10. Dinamika Titik Kesetimbangan Endemik pada $\beta = 0,7$ untuk Beberapa Nilai h

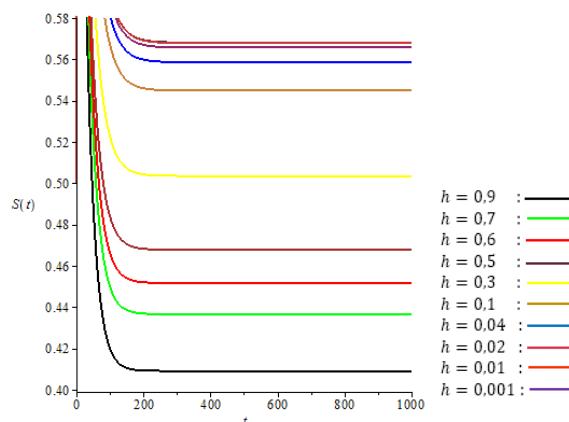
h	P	S	Q_t	Q_p
0,9	0,0551	0,4090	0,0157	0,5202
0,7	0,0518	0,4365	0,0150	0,4967
0,6	0,0502	0,4515	0,0146	0,4837
0,5	0,0485	0,4677	0,0142	0,4696
0,3	0,0452	0,5034	0,0132	0,4381
0,1	0,0420	0,5448	0,0121	0,4012
0,04	0,0410	0,5585	0,0117	0,3888
0,01	0,0405	0,5656	0,0115	0,3824
0,001	0,0403	0,5677	0,0115	0,3805
0,0001	0,0403	0,5680	0,0115	0,3803

Dinamika proporsi populasi perokok potensial (P) pada beberapa nilai h dengan $\beta = 0,8$ disajikan pada Gambar 11.



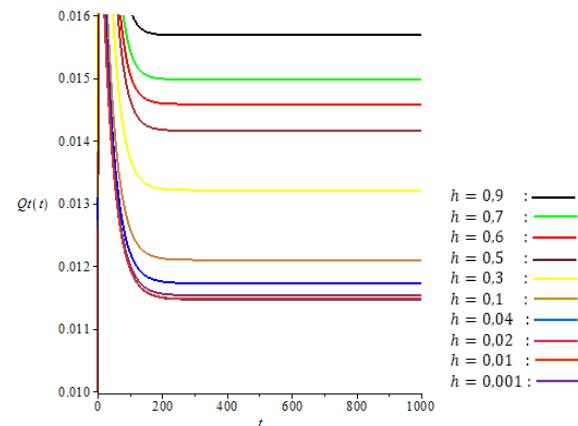
Gambar 11. Dinamika P pada $h = 0,7$, $h = 0,25$ dan $h = 0,01$ dengan $\beta = 0,7$

Dinamika proporsi populasi perokok aktif (S) pada $h = 0,7$, $h = 0,25$ dan $h = 0,01$ dengan $\beta = 0,7$ disajikan pada Gambar 12.



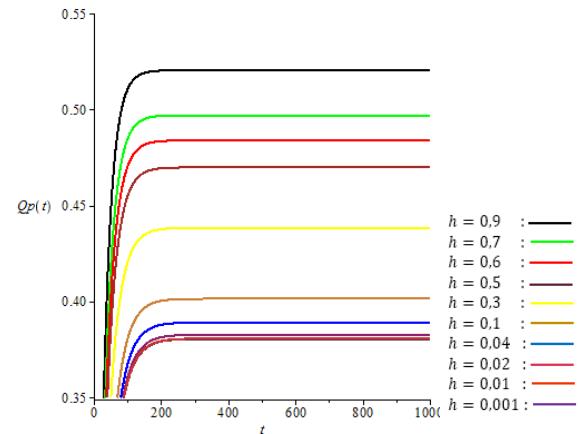
Gambar 12. Dinamika S pada Beberapa Nilai h dengan $\beta = 0,7$

Dinamika proporsi populasi perokok yang berhenti sementara (Q_t) pada beberapa nilai h dengan $\beta = 0,7$ disajikan pada Gambar 13.



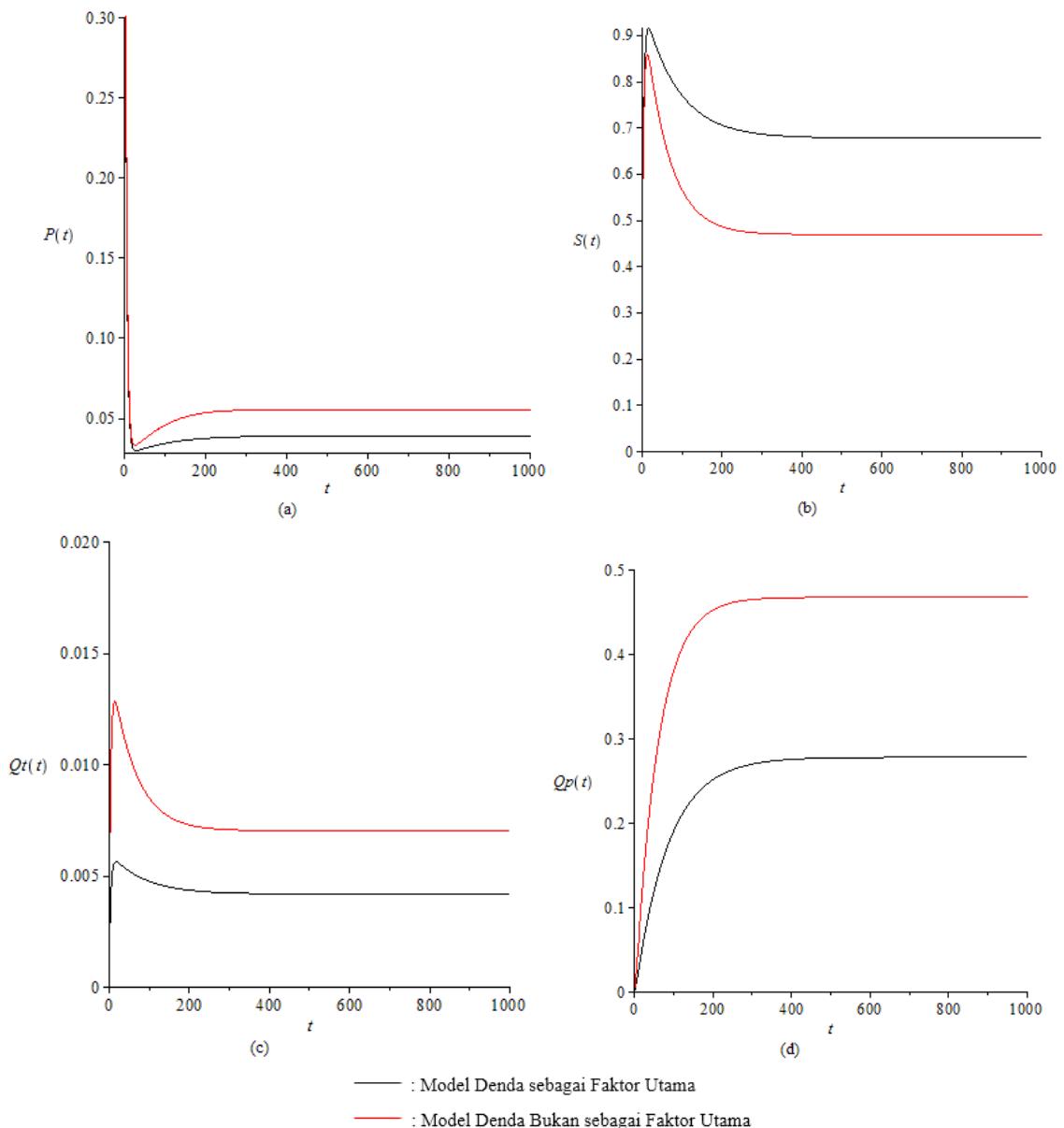
Gambar 13. Dinamika Q_t pada Beberapa Nilai h dengan $\beta = 0,7$

Dinamika proporsi populasi perokok yang berhenti permanen (Q_p) pada beberapa nilai h dengan $\beta = 0,7$ disajikan pada Gambar 14.



Gambar 14. Dinamika Proporsi Q_p pada Beberapa Nilai h dengan $\beta = 0,7$

Dinamika populasi pada model populasi perokok dengan denda sebagai faktor utama dan model populasi perokok dengan denda bukan sebagai faktor utama dengan nilai parameter yang sama disajikan pada Gambar 15



Gambar 15. Dinamika Populasi (a) $P(t)$, (b) $S(t)$, (c) $Q_t(t)$ dan (d) $Q_p(t)$ pada Model Populasi Perokok Dengan Denda sebagai Faktor Utama dan Denda Bukan sebagai Faktor Utama

SIMPULAN

Dari penelitian diperoleh dua model matematika yaitu model matematika populasi perokok dengan denda sebagai faktor utama dan model matematika populasi perokok dengan denda bukan sebagai faktor utama. Analisis kedua model menghasilkan Teorema 1, Teorema 2, Teorema 3, Teorema 4, Teorema 5 dan Teorema 6 mengenai R_0 , titik kesetimbangan endemik dan nonendemik dan analisis kestabilan titik kesetimbangan endemik dan nonendemik.

Untuk menghilangkan populasi perokok aktif pada model populasi perokok dengan denda sebagai faktor utama, diperlukan usaha untuk menekan laju kontak $\beta \leq 0,01$ dan $h \geq 0,3445$. Untuk menghilangkan populasi perokok aktif pada model populasi perokok dengan denda bukan sebagai faktor utama, diperlukan usaha untuk menekan laju kontak $\beta \leq 0,03$ dan $h \geq 0,1548$.

DAFTAR PUSTAKA

- Andest, J. N. 2013. A Mathematical Model on Cigarette Smoking And Nicotine In The Lung. *International Refereed Journal of Engineering and Sciences*. 2(6): 01-03.
- Barnett, S. 1971. A New Formulation of the Theorems of Hurwitz, Routh and Sturm. *J. Inst. Maths Applics.* 8: 240-250.
- Garsow, C.C., Guarionex Jordan-Salivia & Ariel Rodriguez-Herrera. 1997. Mathematical Models for the Dynamics of Tobacco Use, Recovery, and Relapse. *Technical Report Series*, BU-1505-M. Department of Biometrics, Cornell University.
- Jami, F. Y, Muhammad Subhan & Riry Sriningsih. 2013. Model Matematika Pencegahan Pertambahan Jumlah Perokok dengan Penerapan Denda. *Jurnal Jurusan Matematika Universitas Negeri Padang*.
- Kermack, W. O. & McKendrick, A. G. 1927. A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*. 115(772): 700-721.
- Martono, K. 1992. *Kalkulus Lanjut 1*. Bandung : Institut Teknologi Bandung.
- Mursita, D. 2010. *Aljabar Linear*. Bandung : Rekayasa Sains.
- Perko, L. 2001. *Differential Equations and Dynamical Systems*. (Third Edition). New York: Springer Verlag.
- Sharomi, O. & Gumel, A. B. 2008. Curtailing Smoking Dynamics: A Mathematical Modeling Approach. [Online]. *Journal of Applied Mathematics and Computation*. 195: 475-499. Tersedia : www.sciencedirect.com [3 Maret 2015].
- Southeast Asia Tobacco Control Alliance. 2012. *The ASEAN Tobacco Control Report*. Thailand: SEATCA.
- Widowati dan Sutimin. 2007. *Buku Ajar Pemodelan Matematika*. Semarang: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Diponegoro.
- Wiggins, S. 2003. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. (Second Edition). New York: Springer Verlag.
- Zaman, G. 2009. Qualitative Behavior of Giving up Smoking Model. [Online]. Tersedia:http://www.emis.de/journals/BMMSS/pdf/acceptedpapers/2009-07-023_R1.pdf [21 Maret 2015]