UJM 6(2) (2017)
UNNES Journal of Mathematics
http://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/ujm

NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN MATRIKS ATAS ALJABAR MAX-PLUS

Kholipah Tunisa✉, Kristina Wijayanti, Rahayu Budhiati Veronica

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Indonesia
Gedung D7 lantai 1 Kampus Sekaran, Gunungpati, Semarang, 50229

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima Juni 2016
Disetujui Juni 2016
Dipublikasikan Nopember 2017

Keywords:
Eigenvalue,
eigenvector,
irreducible matrice,
max-plus algebra.

Abstrak

Penelitian ini membahas mengenai menentukan nilai eigen, vektor eigen dari matriks tak tereduksi atas aljabar max-plus dan sifat -sifatnya. Metode yang digunakan adalah studi pustaka. Pada penelitian ini disimpulkan: 1) Nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tak tereduksi atas aljabar max-plus dapat ditentukan dengan langkah-langkah berikut. (i) Menghitung A pangkat k, untuk k dari 1 sampai n, dengan n ordo matriks persegi. (ii) Menghitung nilai eigen dengan yaitu maksimum seper k dikali trace dari A pangkat k pada langkah (i). (iii) Memilih sirkuit (c,c) yang merupakan sirkuit kritis di G(A). (iv) Menghitung matriks B dan B bintang. (v) Memilih vektor eigen dari A yang merupakan kolom ke-c dari matriks B bintang. 2) Sifat-sifat dari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tak tereduksi atas aljabar max-plus sebagai berikut. Vektor eigen dari matriks tak tereduksi tidak tunggal, Nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tak tereduksi adalah berhingga. Nilai eigen dari matriks tak tereduksi tunggal. Nilai eigen dari matriks transpose sama dengan nilai eigen dari matriks asalnya Nilai eigen dari A pangkat k sama dengan nilai eigen dari A dipangkatkan k..

Abstract

This study discusses the determining eigenvalues, eigenvectors of an irreducible matrice on max-plus algebra and its properties. The method used is literature. In this study concluded: 1) The eigenvalues and eigenvectors of an irreducible matrix on max-plus algebra can be determined with the following steps. (I) Calculate A rank k, for k from 1 to n, with n order square matrix. (Ii) Calculate the eigenvalues are maximum 1 divided by k times trace of A rank k in step (i). (Iii) Select circuit (c, c) which is a critical circuit in G (A). (Iv) Calculate the matrix B and B star. (V) Selecting an eigenvector of A which is a column c of the matrice B . 2) The properties of eigenvalues and eigenvectors of an irreducible matrice on max-plus algebra as follows. Eigenvectors of an irreducible matrice is not singular, eigenvalues and eigenvectors of an irreducible matrice is finite. Eigenvalues of an irreducible matrice unique. The eigenvalues of matrice transpose the same as the eigenvalues of origin. Eigenvalues of A rank k equal to the eigenvalues of A raised to k.

How to Cite

Tunisa K., Wijayanti K., & Veronica R.B. (2017). Nilai Eigen dan Vektor Eigen Matriks Atas Aljabar Max-Plus. *Unnes Journal of Mathematics* 6(2): 189-197.

Alamat korespondensi:
✉E-mail: kholipah.tunisa@yahoo.com

p-ISSN 2252-6943
e-ISSN 2460-5859

PENDAHULUAN

Matematika dikenal sebagai ratunya ilmu, yaitu ilmu yang mendasari semua disiplin ilmu. Salah satu cabang matematika adalah aljabar. Aljabar memegang peranan penting dalam perkembangan disiplin ilmu-ilmu lain. Aljabar max-plus merupakan salah satu topik dalam aljabar. Seperti pada aljabar linear, pada aljabar max-plus juga dikenal konsep nilai eigen dan vektor eigen.

Nilai eigen dan vektor eigen merupakan salah satu topik pada aljabar yang dimiliki matriks persegi, begitu pula pada matriks persegi atas aljabar max-plus. Masalah nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar max-plus, dapat di aplikasikan pada kehidupan sehari seperti untuk memaksimalkan pendapatan pengemudi taksi dengan memaksimalkan jarak tempuh pada Dorteus (2011) dan dapat pula untuk menyusun penjadwalan transportasi. Subiono (2015) dan Farlow (2009) telah menunjukkan bagaimana cara menentukan nilai eigen dan vektor eigen dalam aljabar max-plus. Oleh karena itu penulis tertarik untuk membahas kembali antara lain metode menentukan nilai eigen dan vektor eigen pada matriks atas aljabar max-plus disertai sifat-sifat nilai eigen dan vektor.

Berdasarkan latar belakang diatas penulis merumuskan beberapa permasalahan. Bagaimana menentukan nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar maks-plus? Apa saja sifat-sifat nilai eigen dan vektor eigen tersebut. Matriks yang dibahas disini adalah matriks tak tereduksi atas aljabar max-plus. Adapun tujuan penulisan ini adalah untuk mengetahui cara menentukan nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar maks-plus dan mengetahui sifat-sifat yang berkaitan.

Himpunan $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ dengan $\mathbb{R}$ himpunan semua bilangan real yang dilengkapi dengan dua operasi biner yang didefinisikan $\forall x, y \in \mathbb{R}_\varepsilon$ berlaku:

(i) $x \oplus y = \max(x, y)$,

(ii) $x \otimes y = x + y$.

Selanjutnya $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ disebut aljabar max-plus dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{max}$ dan $-\infty$ dinotasikan dengan ε. Aljabar max-plus memenuhi struktur semifield idempoten.

Vektor pada $\mathbb{R}_{max}$, yaitu $\mathbb{R}_{max}^n$ didefinisikan sebagai:

$$\mathbb{R}_{max}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \epsilon \mathbb{R}_{max}, i = 1,2, \dots, n\}$$

dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar pada $\mathbb{R}_{max}$ merupakan semimodul atas $\mathbb{R}_{max}$. Elemen $\vec{a} \in \mathbb{R}_{max}^n$ disebut vektor pada aljabar *max-plus.* Vektor nol di $\mathbb{R}_{max}^n$ dinotasikan dengan $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon)$.

Matriks atas aljabar max-plus adalah matriks yang elemenya di $\mathbb{R}_{max}$. Dalam aljabar max-plus suatu matriks khususnya matriks persegi dapat direpresentasikan dalam bentuk graf yang dinamakan graf *precendence* dan dinotasikan dengan G(A).

Definisi 1

Suatu graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V,E) dimana V adalah himpunan tak kosong simpul (titik) dan E adalah himpunan busur (sisi) yang menghubungkan sepasang simpul yang tidak harus berbeda. (West,2001)

Definisi 2

Jika matriks A berukuran $n \times n$ dengan $(A)_{ij} \in \mathbb{R}_{max}$ maka graf *precendence* dari matriks A yang dinotasikan dengan G(A) adalah graf berarah terboboti yang memiliki:

(i) simpul sebanyak n

(ii) busur (j,i), jika $(A)_{ij} \neq \varepsilon$

(iii) bobot busur bilangan real $(A)_{ij}$ untuk busur(j,i) atau dapat dinotasikan $(A)_{ij} = w(j, i)$.

Himpunan simpul dan himpunan busur pada G(A) berturut-turut dinotasikan dengan V(A) dan E(A). (Bacelli, F., G. Cohen, G.J. Olsder, dan J.P. Quadrat, 2001)

Definisi 3

Pandang suatu graf berarah G (V,E) . Suatu lintasan (path) p dari i ke j dalam graf berarah G adalah barisan berhingga dari simpul-simpul $(i_1, i_2, \dots, i_{s+1})$ dengan $i_1 = i, i_{s+1} = j$ dan setiap (i_k, i_{k+1}) adalah busur dari graf berarah G(V,E). (Bacelli, F., G. Cohen, G.J. Olsder, dan J.P. Quadrat, 2001)

Dari Definisi 3, di dapat sirkuit adalah sebuah lintasan dengan simpul akhir dan simpul awalnya sama, sirkuit elementer merupakan sirkuit yang hanya melewati suatu busur tepat satu kali.

Definisi 4

Suatu matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{nxm}$ disebut *irreducible* atau tak tereduksi jika graf G(A) dari matriks tersebut merupakan graf yang terhubung kuat. (Farlow, 2009)

Definisi 5

$A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}, E_n$ matriks identitas di $\mathbb{R}_{max}^{n \times n}$

$A^+ = A \oplus A^{\otimes 2} \oplus A^{\otimes 3} \oplus \dots$

$A^* = E_n \oplus A^+$.

Dari Definisi 5 diperoleh
$A^+ = A \otimes A^+$.
(Rudhito, 2016)

Bilangan $\left(A^{\otimes k}\right)_{ij}$ merupakan bobot maksimum semua lintasan pada graf G(A) dengan panjang k dari simpul j ke simpul i. Bilangan $(A^+)_{ij}$ merupakan bobot maksimum semua lintasan dalam graf G(A) dari simpul j ke simpul i. Jika tidak ada lintasan dari simpul j ke i maka $(A^+)_{ij} = \varepsilon$. Bilangan trace $\left(A^{\otimes k}\right)$ yaitu $\oplus_{k=1}^{\infty}\left(A^{\otimes k}\right)_{ii}$ merupakan maksimum dari bobot maksimum dari semua sirkuit dengan panjang k.

Rumus untuk bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer di G(A) yaitu

$$\lambda_{max}(A) = \oplus_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\ trace\ (A^{\otimes k})\right)$$

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan yaitu studi pustaka, dengan mengumpulkan sumber pustaka berupa buku, makalah, dan jurnal yang berkaitan dengan masalah nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar max-plus. Kemudian setelah sumber terkumpul dilanjutkan dengan perumusan masalah, setelah diperoleh rumusan masalah kemudian dari sumber pustaka yang telah terkumpul kemudian dipilih yang relevan untuk diolah dalam pembahasan sehingga dapat ditarik kesimpulan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Teorema 1

Misal $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$, G(A) graf *precendence* A sehingga setiap sirkuit di G(A) mempunyai bobot sirkuit rata-rata kurang dari atau sama dengan 0, maka
$A^+ = \oplus_{i=1}^{n} A^{\otimes i} = A \oplus A^{\otimes 2} \oplus \ldots \oplus A^{\otimes n}$.
(Subiono,2015)

Bukti
Diketahui
$A^+ = \oplus_{i=1}^{\infty} A^{\otimes i} = A \oplus A^{\otimes 2} \oplus \ldots \oplus A^{\otimes \infty}$.
$(A^+)_{ij} = maks\ \{(A^{\otimes k})_{ij}, 1 \le k \le \infty\} \ge$
$maks\ \{(A^{\otimes k})_{ij}, 1 \le k \le n\}$ (1)
Karena A matriks berordo $n \times n$, maka untuk seluruh lintasan di G(A) dari simpul i ke simpul j yang mempunyai panjang lebih dari atau sama dengan n akan terjadi paling sedikit satu pengulangan simpul. Sehingga terbentuk setidaknya satu sirkuit yang panjangnya tidak lebih dari n.
Karena setiap sirkuit di G(A) mempunyai bobot rata-rata sirkuit kurang dari atau sama dengan 0, maka maksimum bobot rata-rata sirkuit sama dengan 0. Oleh karena itu bobot lintasan tidak akan bertambah setiap terjadi pengulangan simpul, sehingga
$A \oplus A^{\otimes 2} \oplus \ldots \oplus A^{\otimes n} \ge A \oplus A^{\otimes 2} \oplus \ldots \oplus A^{\otimes \infty}$.
$(A^+)_{ij} = maks\ \left\{\left(A^{\otimes k}\right)_{ij}, 1 \le k \le \infty\right\} \le$
$maks\ \{(A^{\otimes k})_{ij}, 1 \le k \le n\}$ (2)
Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh
$maks\ \{(A^{\otimes k})ij, 1 \le k \le \infty\} =$
$maks\ \{(A^{\otimes k})ij, 1 \le k \le n\}$.
$(A^+)ij = maks\ \{(A^{\otimes k})ij, 1 \le k \le n\}$.
$A^+ = \oplus_{i=1}^{\infty} A^{\otimes n}$. (Terbukti).

Pada teorema diatas telah dibahas mengenai A^+ untuk G(A) yang setiap sirkuitnya mempunyai bobot sirkuit rata-rata kurang atau sama dengan 0. Kemudian dijelaskan pula mengenai A^* untuk G(A) yang setiap sirkuitnya mempunyai bobot sirkuit rata-rata kurang atau sama dengan 0.

Sesuai Teorema 1 didapat

$$A^+ = A \oplus A^{\otimes 2} \oplus A^{\otimes 3} \oplus A^{\otimes 4}$$

$$A^+ = E \otimes (A \oplus A^{\otimes 2} \oplus \ldots A^{n-1})$$

Pada Definisi 5 telah diketahui bahwa $A^+ = E \otimes A^*$ sehingga diperoleh

$$A^* = A \oplus A^{\otimes 2} \oplus \ldots \oplus A^{n-1}.$$

Definisi 6

Suatu sirkuit dalam graf G disebut sirkuit kritis jika bobot rata-ratanya sama dengan bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer dalam G. (Novrida, 2012)

Definisi 7

Suatu graf yang terdiri dari semua sirkuit kritis dari graf G, disebut graf kritis dinotasikan G^C. (Novrida, 2012)

Selanjutnya dibahas definisi dan teorema tentang nilai eigen dan vektor eigen dalam aljabar max-plus.

Definisi 8

Misalkan $A \in \mathbb{R}_{max}^{nxn}$, suatu vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}_{max}^{n}$ dengan $\vec{v} \neq \vec{\varepsilon}$ disebut vektor eigen dari A jika memenuhi

$$A \otimes \vec{v} = \lambda \otimes \vec{v}$$

skalar $\lambda \in \mathbb{R}_{max}$ disebut nilai eigen dari A dan $\vec{v}$ disebut vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan λ. (Bacelli, F., G. Cohen, G.J. Olsder, dan J.P. Quadrat, 2001).

Selanjutnya dibahas teorema tentang nilai eigen dan vektor eigen yang berhubungan dengan bobot rata-rata.

Teorema 2

Misalkan $A \in \mathbb{R}_{max}^{nxn}$, skalar $\lambda_{max}(A)$ yaitu bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer dalam G(A), merupakan suatu nilai eigen aljabar max-plus matriks A. (Rudito, 2016)

Bukti

Misal $B = -\lambda_{max}(A) \otimes A$

$(B^{\otimes k})_{ss}$ = elemen kolom ke s dan baris ke s dari matriks $B^{\otimes k}$

$(B^{+})_{.s}$ = elemen kolom ke s matriksB^{+}

Jelas

$$\lambda_{max}(B) = \oplus_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}\ trace\ (B^{\otimes k})$$
$$= \oplus_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}\ trace\ (-\lambda_{max}(A) \otimes A)^{\otimes k}$$
$$= \oplus_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}\ trace\ ((-\lambda_{max}(A)^{\otimes k}) \otimes A^{\otimes k}))$$
$$= \oplus_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}(-\lambda_{max}(A)^{\otimes k}) \otimes \frac{1}{k}\ trace\ (\otimes A^{\otimes k}))$$
$$= \oplus_{k=1}^{n}(-\lambda_{max}(A) \otimes \lambda_{max}(A)) = \otimes_{k=1}^{n} 0$$

Karena $\lambda_{max}(B) = 0$ dan $B^{+} = \oplus_{k=1}^{n} B^{\otimes k}$ dan $B^{*} = E_n \oplus B \oplus \ldots \oplus B^{n-1}$.

Karena $\lambda_{max}(B) = 0$ maka $\exists\ k \in \mathbb{N}$, untuk $k \leq n$ dan suatu $s \in \{1,2,\ldots,n\}$ sehingga $(B^{\otimes k})_{ss} = 0$.

Karena $(B^{\otimes k})_{ss} = 0$ maka sirkuit elementer dengan panjang k di G(B) dengan simpul awal s dan simpul akhir s merupakan sirkuit kritis.

Jelas $(E_n)_{ss} = 0$. Kemudian dari Definisi 5. $B^{+} = B \otimes B^{*}$ dan $B^{*} = E_n \oplus B^{+}$,

$(B^{*})_{ij} = (E_n \oplus B^{+})_{ij} =$

$$\begin{cases} \varepsilon \oplus (B^{+})_{is} = (B^{+})_{is} : i \neq s \\ 0 \oplus (B^{+})_{is} : i = s \end{cases},$$

sehingga

$$(B^{+})_{.s} = (B^{*})_{.s}$$
$$B \otimes (B^{*})_{.s} = (B^{*})_{.s}$$
$$-\lambda_{max}(A) \otimes A \otimes (B^{*})_{.s} = (B^{*})_{.s}$$
$$A \otimes (B^{*})_{.s} = \lambda_{max}(A) \otimes (B^{*})_{.s}$$

Jadi diperoleh $\lambda_{max}(A)$ yaitu bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer dalam G(A), merupakan suatu nilai eigen aljabar max-plus matriks A dan $(B^{*})_{.s}$ yaitu elemen kolom ke s matriks B^{*} $(B = -\lambda_{max}(A) \otimes A)$.

Dari Teorema 2 dapat dirumuskan langkah-langkah untuk menentukan nilai eigen λ dari matriks tak tereduksi A $\in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ dan vektor eigen yang bersesuaian dapat ditentukan melalui langkah-langkah berikut.

(i) Menghitung $A^{\otimes k}$, $1 \leq k \leq n$.

(ii) Hitung nilai eigen
$$\lambda = \oplus_{k=1}^{n}(\frac{1}{k} trace\ (A^{\otimes k}))$$

(iii) Perhatikansirkuit (c,c) untuk suatu $1 \leq c \leq n$ yang merupakan sirkuit kritis di G(A).

(iv) Hitung matriks $B = -\lambda \otimes A$ dan B^{*}

(v) Vektor eigen dari A adalah kolom ke-c dari matriks B^{*}.

Contoh 1

Diberikan matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{3x3}$,
$A = \begin{bmatrix} 5 & \varepsilon & 5 \\ \varepsilon & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 3 \end{bmatrix}$, carilah nilai eigen dan vektor eigen aljabar max-plus dari matrik A.

Jawab

$$A = \begin{bmatrix} 5 & \varepsilon & 5 \\ \varepsilon & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 3 \end{bmatrix},$$

maka $A^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} 11 & 11 & 10 \\ 9 & 9 & 6 \\ 11 & 9 & 11 \end{bmatrix}$,

dan $A^{\otimes 3} = \begin{bmatrix} 16 & 16 & 16 \\ 14 & 12 & 14 \\ 17 & 17 & 16 \end{bmatrix}$.

$$\text{Jadi } \lambda_{max}(A) = \lambda = \oplus_{k=1}^{3}(\frac{1}{k} trace(A^{\otimes k}))$$
$$= \max\{1(5), \tfrac{1}{2}11, \tfrac{1}{3}16\}$$
$$= \frac{11}{2}$$

Mencari vektor eigen

Bentuk matriks $B = -\lambda_{max}(A) \otimes A$,

Diperoleh

$$B = -\frac{11}{2} \otimes \begin{bmatrix} 5 & \varepsilon & 5 \\ \varepsilon & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \varepsilon & -\frac{1}{2} \\ \varepsilon & -\frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

Jadi $B^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

Jelas

$$B^{*} = E_n \oplus B \oplus B^{\otimes 2}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -2 & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

.

Karena sirkuit kritisnya adalah sirkuit (1,1) dan (3,3) maka vektor eigen matriks A yang bersesuaian dengan $\lambda(A) = \frac{11}{2}$ adalah

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sifat-Sifat Nilai Eigen dan Vektor Eigen
Definisi 9
Sebuah vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n_{max}$ dinamakan kombinasi linear dari vektor-vektor $v_1, v_2, \dots v_n \in \mathbb{R}^n_{max}$ apabila $\vec{v}$ dapat dinyatakan dalam bentuk
$\vec{v} = k_1 \otimes v_1 \oplus k_2 \otimes v_2 \oplus \dots \oplus k_n \otimes v_n$.
(Subiono,2015)

Contoh 2
Perhatikan vektor eigen matriks A pada Contoh 1.

Vektor $\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ merupakan kombinasi linear dari $\vec{v_2} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$.

Karena $\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \otimes \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \otimes \vec{v_2}$.

Teorema 3
Jika $A \in \mathbb{R}^{n \times n}_{max}$, A tak tereduksi maka A memiliki vektor eigen tidak tunggal. (Subiono, 2015)

Bukti
Misal λ nilai eigen dari A, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n_{max}$ adalah vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan λ
Jelas $A \otimes \vec{v} = \lambda \otimes \vec{v}$
Ambil $a \in \mathbb{R}$ sembarang
$a \otimes A \otimes \vec{v} = a \otimes \lambda \otimes \vec{v}$
$\Leftrightarrow A \otimes a \otimes \vec{v} = \lambda \otimes a \otimes \vec{v}$
$\Leftrightarrow A \otimes (a \otimes \vec{v}) = \lambda \otimes (a \otimes \vec{v})$
Jadi $(a \otimes \vec{v}) \in \mathbb{R}^n_{max}$ juga merupakan vektor eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ.
Jadi vektor eigen dari matriks tak tereduksi tidak tunggal.

Contoh matriks tak tereduksi dengan vektor eigen lebih dari satu dapat dilihat pada contoh 2

Setelah dibahas mengenai vektor eigen matriks atas aljabar max-plus yang tidak tunggal selanjutnya teorema dibawah ini membahas mengenai karakteristik matriks dengan nilai eigen ε.

Teorema 4
Jika ε merupakan suatu nilai eigen dari matriks $A \in \mathbb{R}^{nxn}_{max}$ maka ada kolom di A yang semua elemennya bernilai ε.(Farlow, 2009)

Bukti
Misal λ = nilai eigen matriks A,
$\vec{v}$ = vektor eigen dari A,
$(A \otimes \vec{v})_i$ = elemen baris ke i matriks $(A \otimes \vec{v})$,
dan a_{ij}= elemen kolom ke j dan baris ke i matriks A.
Akan ditunjukkan jika ε nilai eigen dari $A \in \mathbb{R}^{nxn}_{max}$, maka ada kolom di A yang semua elemennya ε
Dipunyai $A \in \mathbb{R}^{nxn}_{max}$, $\lambda = \varepsilon$.
Jelas $A \otimes \vec{v} = \lambda \otimes \vec{v}$
$\Leftrightarrow A \otimes \vec{v} = \varepsilon \otimes \vec{v}$
$\Leftrightarrow (A \otimes \vec{v})_i = (\varepsilon \otimes \vec{v})_i$
$\Leftrightarrow (A \otimes \vec{v})_i = \varepsilon \otimes v_i$
$\Leftrightarrow (A \otimes \vec{v})_i = \varepsilon$
Karena $\vec{v} \neq \varepsilon$ maka $\vec{v}$ memuat paling sedikit satu elemen di $\mathbb{R}_{max}$ yang $\neq \varepsilon$,
Andaikan $v_c \neq \varepsilon, 1 \leq c \leq n$.
Pandang
$(A \otimes \vec{v})_i = \oplus_{j=1}^{n} (a_{ij} \otimes v_j)$
$\varepsilon = maks_{1 \leq j \leq n} (a_{ij} \otimes v_j)$
$\varepsilon = maks_{1 \leq j \leq n} (a_{i1} \otimes v_1, \dots, a_{ic} \otimes v_c, \dots, \otimes v_n)$
Karena $\vec{v_c} \neq \varepsilon$ dan $\vec{v_i} = \varepsilon$ untuk $i \neq c$, sehingga haruslah $a_{ic} = \varepsilon$.
Karena a_{ic} merupakan elemen baris ke i dan kolom ke c matriks A untuk i=1,2,..,n, Maka a_{ic} merupakan elemen kolom ke c matriks A yang seluruh elemennya ε.
Jadi ada kolom di matriks A yang semua elemennya ε.

Untuk arah sebaliknya teorema diatas tidak berlakuhal ini dibuktikan dengan contoh dibawah ini.

Contoh 3

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} \varepsilon & 5 & 5 \\ \varepsilon & 2 & 3 \\ \varepsilon & 6 & 3 \end{bmatrix}$.

Jelas $A^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 11 & 8 \\ \varepsilon & 9 & 6 \\ \varepsilon & 9 & 9 \end{bmatrix}$, dan

$$A^{\otimes 3} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 14 & 14 \\ \varepsilon & 12 & 12 \\ \varepsilon & 15 & 12 \end{bmatrix}.$$

Jadi $\lambda(A) = \oplus_{k=1}^{3}(\frac{1}{k} trace\ (A^{\otimes k}))$

$= \max\{1(3),\ \frac{9}{2}, \frac{12}{3}\}$

$= \frac{9}{2} \neq \varepsilon$

Dari contoh diatas menunjukan bahwa ada kolom di matriks A yang semua elemennya ε, tetapi nilai eigen dari A, $\lambda(A) = \frac{9}{2} \neq \varepsilon$. Setelah membahas mengenai nilai eigen matriks tak tereduksi yang berhingga, selanjutnya akan dibahas mengenai vektor eigen dari matriks tereduksi yang berhingga.

Teorema 5

Jika $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ matriks tak tereduksi, dan λ merupakan nilai eigen A serta vektor $v \in \mathbb{R}_{max}^{n}$ merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen vektor λ maka $v_i \neq \varepsilon$ untuk setiap $i \in \{1,2,\dots,n\}$. (Novrida, 2012)

Bukti

Menurut Teorema 1, untuk mendapatkan vektor eigen dari matriks taktereduksi A terlebih dahulu dihitung $B = -\lambda(A) \otimes A$

Selanjutnya dilakukan perhitungan matriks $B^{*} = E_n \oplus B \oplus \dots \oplus B^{n-1}$.

Karena matriks A tak tereduksi maka graf *precendence* dari A yaitu G(A) adalah graf terhubung kuat, sehingga untuk setiap dua simpul yang berbeda di A selalu terdapat lintasan (saling terhubung). Jadi ada $b_{ij} \in B^{\otimes k}$ sehingga $b_{ij} \neq \varepsilon$ untuk setiap $i \in \{1,2,\dots,n\}$, $j \in \{1,2,\dots,n\}$ dan untuk suatu $k \geq 1$.

Jadi $B^{*} = E_n \oplus B \oplus \dots \oplus B^{n-1}$, setiap elemennya $\neq \varepsilon$

Karena $B_{.c}$ adalah vektor eigen dari A untuk setiap (c,c) sirkuit kritis di A, maka $v_i \neq \varepsilon\ \forall\ v_i \in \vec{v}$ vektor eigen di A.

Contoh 4

Misal $A = \begin{bmatrix} \varepsilon & 2 & 2 & 4 \\ 3 & \varepsilon & 5 & 2 \\ \varepsilon & 2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 & 2 \end{bmatrix}$, nilai eigen dari A yaitu $\lambda = \frac{7}{2}$.

Bentuk matriks $B = -\lambda(A) \otimes A$,

diperoleh $B = -\frac{7}{2} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon & 2 & 2 & 4 \\ 3 & \varepsilon & 5 & 2 \\ \varepsilon & 2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \varepsilon & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \varepsilon & -\frac{3}{2} & -\frac{6}{2} & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Jelas $B^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{2} & -\frac{6}{2} & 0 & -\frac{2}{2} \\ \varepsilon & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{4}{2} & -\frac{9}{2} & 0 & -\frac{6}{2} \\ \varepsilon & -\frac{6}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$,

dan $B^{\otimes 3} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{2}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{6}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{10}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{6}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{7}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$

Jelas

$$B^{*} = E_n \oplus B \oplus B^{\otimes 2}$$

Jadi $B^{*} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{4}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{7}{2} & -\frac{6}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$.

Karena sirkuit kritisnya adalah sirkuit (2,2) dan (3,3,) maka vektor eigen dari A adalah $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{6}{2} \end{bmatrix}$

dan $\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$.

Jelas $v_i \neq \varepsilon \; \forall \; i \in \{1,2,3,4\}$.

Pada teorema selanjutnya dibahas mengenai nilai eigen dari matriks tak tereduksi yang tunggal.

Teorema 6

Jika $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ matriks tak tereduksi, maka A mempunyai nilai eigen tunggal. (Subiono, 2015)

Bukti

Misal $\lambda \in \mathbb{R}_{max}$ adalah nilai eigen A dengan $\vec{v} \in \mathbb{R}_{max}^{n}$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

Karena A matriks tak tereduksi maka elemen $v_i \neq \varepsilon \; \forall \; i \in (1,2,\dots,n)$ dan $\lambda \neq \varepsilon$

Ambil sebarang sirkuit elementer di G(A) misal c $= ((i_1,i_2),(i_2,i_3),\dots,(i_l,i_1))$ dengan $|c| = l$ .Diperoleh $a_{i_k i_{k+1}} \neq \varepsilon$ untuk $k = \{1,2,\dots,l\}$.

Jelas

$$A \otimes \vec{v} = \lambda \otimes \vec{v}$$
$$(A)_{i_1 i_2} \otimes v_{i_2} \leq \lambda \otimes v_{i_1}$$
$$\vdots$$
$$(A)_{i_k i_{k+1}} \otimes v_{i_{k+1}} \leq \lambda \otimes v_{i_k}$$

untuk $k = \{1,2,\dots,l\}$.

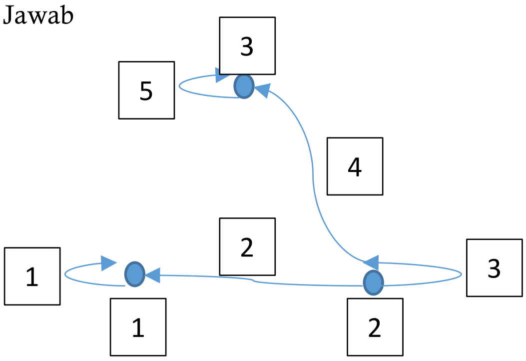
Berdasarkan Teorema 2 diperoleh nilai eigen $\lambda = \lambda_{max}(A)$,berarti λ lebih besar atau sama dengan bobot rata-rata sirkuit elementer di G(A). Jadi λ tunggal.

Contoh 5

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5 \end{bmatrix}$

Hitung nilai eigen λ dari matriks A dan vektor eigen $\vec{v}$ yang bersesuaian dengan λ. Graf precendence dari A diberikan pada Gambar 1.

Jawab



Gambar 1 Graf *precendence* dari A

Dari Gambar 1 dapat dilihat bahwa A bukanlah graf terhubung kuat. Jadi A bukan matriks tak tereduksi, melainkan matriks tereduksi.

Jelas $A^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & \varepsilon \\ \varepsilon & 6 & \varepsilon \\ \varepsilon & 9 & 10 \end{bmatrix}$,

$A^{\otimes 3} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & \varepsilon \\ \varepsilon & 9 & \varepsilon \\ \varepsilon & 14 & 15 \end{bmatrix}$.

Jadi $\lambda = \bigoplus_{k=1}^{3} (\frac{1}{k} trace\ (A^{\otimes k}))$

$= \max\{1(5),\ \frac{1}{2}10, \frac{1}{3}15\}$

$= 5$.

Sirkuit kritisnya adalah (3,3), selanjutnya menentukan vektor eigen.

$B = -\lambda \otimes A$

$B = -5 \otimes \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 & \varepsilon \\ \varepsilon & -2 & \varepsilon \\ \varepsilon & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$B^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} -8 & -5 & \varepsilon \\ \varepsilon & -4 & \varepsilon \\ \varepsilon & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Jadi $B^{*} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Karena sirkuit kritisnya (3,3) maka vektor eigen yang bersesuai dengan $\lambda = 5$ adalah $\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 0 \end{bmatrix}$.

Dari Gambar 1 terdapat dua sirkuit selain sirkuit kritis. Sirkuit (1,1) dengan bobot rata-rata sirkuit 1 yang juga merupakan nilai eigen matriks A dengan vektor eigen adalah kolom ke-1 dari B^{*}. Hal ini dapat diselidiki dengan

$A \otimes \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = 1 \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \lambda \otimes \vec{v}$.

Jadi didapat nilai eigen dari matriks tereduksi tidak tunggal.

Teorema selanjutnya dibahas mengenai nilai eigen dari matriks pangkat.

Teorema 7

Jika $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ matriks tak tereduksi, dan $\lambda \in \mathbb{R}_{max}$ adalah nilai eigen A dengan $\vec{v} \in \mathbb{R}_{max}^{n}$ adalah vektor eigen A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ, maka $A^{\otimes k} \otimes \vec{v} = \lambda^{\otimes k} \otimes \vec{v}$ untuk semua $k \geq 0$. (Subiono, 2015)

Bukti

Bukti dengan induksi matematika pada k

(i) Untuk k = 1

Jelas $A^{\otimes 1} \otimes \vec{v} = \lambda^{\otimes 1} \otimes \vec{v}$

$\Leftrightarrow A \otimes \vec{v} = \lambda \otimes \vec{v}$ (Benar)

(ii) Asumsikan benar untuk k = n

Jadi $A^{\otimes n} \otimes \vec{v} = \lambda^{\otimes n} \otimes \vec{v}$.

Akan ditunjukkan benar untuk k = n+1.

$$A \otimes (\lambda^{\otimes n} \otimes \vec{v}) = (A \otimes \lambda^{\otimes n}) \otimes \vec{v}$$
$$\Leftrightarrow A \otimes (A^{\otimes n} \otimes \vec{v}) = (\lambda^{\otimes n} \otimes A) \otimes \vec{v}$$

$\Leftrightarrow A \otimes A^{\otimes n} \otimes \vec{v} = \lambda^{\otimes n} \otimes (A \otimes \vec{v})$
$\Leftrightarrow (A \otimes A^{\otimes n}) \otimes \vec{v} = \lambda^{\otimes n} \otimes \lambda \otimes \vec{v}$
$\Leftrightarrow A^{\otimes n+1} \otimes \vec{v} = \lambda^{\otimes n+1} \otimes \vec{v}$

Jadi untuk k = n+1 maka $A^{\otimes k} \otimes \vec{v} = \lambda^{\otimes k+1} \otimes \vec{v}$ (benar)

Dari (i) dan (ii) terbukti.

Jadi jika $\lambda \in \mathbb{R}_{max}$ adalah nilai eigen A matriks tak tereduksi maka nilai eigen dari $A^{\otimes k}$ adalah $\lambda^{\otimes k}$ semua $k \geq 0$.

Contoh 6

Dari Contoh 1

$A = \begin{bmatrix} 5 & \varepsilon & 5 \\ \varepsilon & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ nilai eigennya $\frac{11}{2}$.

Jelas $A^{\otimes 3} = \begin{bmatrix} 16 & 516 & 416 \\ 14 & 12 & 14 \\ 17 & 17 & 16 \end{bmatrix}$, kemudian akan dicari nilai eigen untuk $A^{\otimes 3} = D$

Jelas $D^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} 33 & 33 & 32 \\ 31 & 31 & 30 \\ 34 & 34 & 33 \end{bmatrix}$,dan

$D^{\otimes 3} = \begin{bmatrix} 50 & 50 & 49 \\ 48 & 48 & 47 \\ 51 & 51 & 50 \end{bmatrix}$

Jadi $\lambda(D) = \oplus_{k=1}^{3} (\frac{1}{k} trace\ (D^{\otimes k}))$

$= \max\{16, \quad \frac{33}{2}, \frac{50}{3}\}$

$= \frac{33}{2}$

Diperoleh $\lambda(D) = \frac{33}{2} = \frac{11^{\otimes 3}}{2} = \lambda(A)^{\otimes 3}$.

Teorema berikutnya menjukan bahwa nilai eigen dari matriks tranpose yang sama dengan matriks asalnya.

Teorema 8

Jika λ merupakan nilai eigen dari matriks tak tereduksi $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$, maka λ juga merupakan nilai eigen dari matriks $B = A^T$.(Musthofa dan Bintari, 2013)

Bukti

Misal λ_A = nilai eigen matriks A
λ_B = nilai eigen matriks B

Karena $B = A^T$ maka
$(A)_{ii} = (B)_{ii}$.
$\Leftrightarrow (A^{\otimes k})_{ii} = (B^{\otimes k})_{ii}$
$\Leftrightarrow trace\ A^{\otimes k} = trace\ B^{\otimes k}$

Jelas $\lambda_A = \oplus_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} \times trace\ A^{\otimes k})$
$= \oplus_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} \times trace\ B^{\otimes k})$
$= \lambda_B$.

Jadi $\lambda_A = \lambda_B$ jika $B = A^T$, $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ matriks tak tereduksi.

Contoh 6

Diberikan matriks A seperti pada contoh 1

$A = \begin{bmatrix} 5 & \varepsilon & 5 \\ \varepsilon & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = A^T = \begin{bmatrix} 5 & \varepsilon & 6 \\ \varepsilon & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

Dari Contoh 1 telah diketahui nilai eigen A adalah $\lambda(A) = \frac{11}{2}$. Kemudian akan dicari nilai eigen dari A^T.

Jelas $(A^T)^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} 5 & \varepsilon & 6 \\ \varepsilon & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 5 & \varepsilon & 6 \\ \varepsilon & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 3 \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} 11 & 9 & 11 \\ 11 & 9 & 9 \\ 10 & 6 & 11 \end{bmatrix}$

$(A^T)^{\otimes 3} = \begin{bmatrix} 16 & 14 & 17 \\ 16 & 12 & 17 \\ 16 & 14 & 16 \end{bmatrix}$

Jelas

$\lambda(A^T) = \oplus_{k=1}^{3} (\frac{1}{k} trace\ \left(A^{T^{\otimes k}}\right))$.

$= \max\{1(5), \quad \frac{1}{2} 11, \frac{1}{3} 16\}$

$= \frac{11}{2}$

Jadi $\lambda(A) = \lambda(A^T)$.

SIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan dapat disimpulkan sebagai berikut. Nilai eigen λ dari matriks tak tereduksi A $\in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ dan vektor eigen yang bersesuaian dapat ditentukan melalui langkah-langkah berikut.

(i) Menghitung $A^{\otimes k}$, untuk $1 \leq k \leq n$.
(ii) Menghitung nilai eigen λ dengan rumus $\lambda = \oplus_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} trace\ (A^{\otimes k})\right)$.
(iii) Memilih sirkuit (c,c) untuk suatu $1 \leq c \leq n$ yang merupakan sirkuit kritis di G(A).
(iv) Menghitung matriks $B = -\lambda \otimes A$ dan B^*.
(v) Memilih vektor eigen dari A yang merupakan kolom ke-c dari matriks B^*.

Sifat-sifat dari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tak tereduksi dalam aljabar max-plus meliputi: Vektor eigen dari matriks tak tereduksi tidak tunggal dan berhingga, nilai eigen dari matriks tak tereduksi $\neq \varepsilon$ atau berhingga dan tunggal, dan nilai eigen dari matriks A^T = nilai eigen dari matriks A, serta Jika $\lambda \in \mathbb{R}_{max}$ adalah nilai eigen A matriks tak tereduksi maka nilai eigen dari $A^{\otimes k}$ adalah $\lambda^{\otimes k}$ semua $k \geq 0$.

DAFTAR PUSTAKA

Bacelli, F., Cohen, G., Olsder, G.J. & Quadrat, J.P. 2001. Syncronization and Linearity: *an algebra for discrete event system*. New York : Wiley-Interscience.

Budayasa, K. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya*, Surabaya: Unesa University Press.

Farlow, K.G. 2009. *Max-Plus Algebra* . Master's Thesis Polytechnic Institute and State University. Virginia: Polytechnic Institute and State University.

Musthofa 7 Bintari, N. 2013 . Sifat–Sifat Nilai Eigen dan Vektor Eigen atas Aljabar MaxPlus. *Jurnal Sains Dasar* 2(1): 25-31.

Novrida, R. 2012 .*Nilai Eigen dan Vektor Eigen dalam Aljabar Max-Plus*. Tesis Program Pasca Sarjana UI. Depok : UI.

Rahakbauw, D.L.2011. Aplikasi Aljabar Maks-Plus pada Jalur Taksi untuk Memaksimumkan Pendapatan Pengemudi Taksi. *Jurnal Barekang,* 5(1): 29-32.

Rudhito, M.A. 2016. *Aljabar Max-Plus dan Penerapannya* (versi 8). Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma.

Subiono. 2015. *Aljabar Min-Max Plus dan Terapannya* (versi 3). Surabaya: ITS.

West, D.B. 2001. *Introduction to Graph Theory*. Illiois: University of Illinois.