



PEMODELAN MATEMATIKA DAN ANALISIS KESTABILAN MODEL PENYEBARAN HIV/AIDS DENGAN TREATMENT

Ahmad Julul Zamzami[✉], Stevanus Budi Waluya, dan Muhammad Kharis

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Indonesia
Gedung D7 Lt. 1, Kampus Sekaran Gunungpati, Semarang 50229

Info Artikel

Sejarah Artikel:

Diterima Januari 2018

Disetujui Februari 2018

Dipublikasikan November 2018

Keywords:

Epidemi Model, HIV/AIDS,
Treatment, Stability

Abstrak

Di Indonesia terdapat kasus HIV sebanyak 29.037 dan 5.608 kasus AIDS pada tahun 2013, tidak menutup kemungkinan angka tersebut dapat bertambah tiap tahunnya. Penelitian ini membahas model matematika untuk penyebaran penyakit HIV/AIDS dengan Treatment. Model matematika yang digunakan berupa model SIAT. Tujuan penelitian ini adalah membangun model matematika, menganalisis titik kestabilan, dan menginterpretasikan simulasi model matematika dengan *Maple*. Analisis yang dilakukan menghasilkan angka rasio reproduksi dasar (R_0). Setelah menganalisis dua titik kesetimbangan maka dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil asimtotik lokal apabila $R_0 < 1$. Sedangkan titik kesetimbangan endemik akan stabil asimtotik lokal apabila $R_0 > 1$. Selanjutnya, untuk mengilustrasikan model tersebut maka dilakukan simulasi model menggunakan program *Maple* menghasilkan beberapa fakta, yaitu semakin besar nilai progres menuju HIV tahap lanjut pada individu HIV tahap awal (γ_1) akan memperkecil jumlah penderita dan semakin besar laju Treatmen dari populasi HIV tahap awal (ψ_1) akan memperkecil jumlah penderita.

Abstract

In Indonesia there are as many as 29.037 cases of HIV and 5.608 cases of AIDS on 2013,, it is possible that number could increase every year. This study discusses the mathematical models for the spread of HIV/AIDS disease with treatment class. The mathematical models used in the form SIAT models. The purpose of this study is to develop a mathematical model, analyze the point of stability, and interpret the mathematical model simulation with maple. The analysis carried out to produce numbers basic reproduction ratio (R_0). After analyzing two equilibrium point it can be concluded that the disease-free equilibrium point will be the local asymptotically stable if $R_0 < 1$. While the endemic equilibrium point will be the local asymptotically stable if $R_0 > 1$. Furthermore, to illustrate the model of the simulation model using Maple program produces some of the facts, that the greater value of the individuals who join treatment from HIV class ψ_1 and the greater progress of individual who came pre-AIDS γ_1 will reduce the number of patients.

How to Cite

Zamzami, A.J., Waluya, S.B., Kharis, M. (2018). Pemodelan Matematika dan Analisis Kestabilan Model Penyebaran HIV/AIDS dengan Treatment. *UNNES Journal of Mathematics* 7(2): 142- 154.

PENDAHULUAN

HIV (Human Immunodeficiency Virus) merupakan retrovirus bersifat limfotropik khas yang menginfeksi sel-sel dari sistem kekebalan tubuh, menghancurkan atau merusak sel darah putih yang spesifik yang disebut limfosit T-helper atau limfosit pembawa faktor T4(CD4). Virus ini diklasifikasikan dalam famili *Retroviridae*, subfamili *Lentiviridae*, genus *Lentivirus* (Nasronudin, 2007 dalam Rosella, 2013). Selama infeksi berlangsung, sistem kekebalan tubuh menjadi lemah dan penderita menjadi lebih rentan terhadap infeksi. Tingkat HIV dalam tubuh dan timbulnya berbagai infeksi tertentu merupakan indikator bahwa infeksi HIV telah berkembang menjadi AIDS (KPAI, 2010). AIDS merupakan kumpulan gejala atau penyakit yang disebabkan oleh menurunnya kekebalan tubuh akibat virus HIV (Dinas Kesehatan Kota Semarang, 2011).

Dasar utama terinfeksinya HIV adalah berkurangnya jenis Limfosit T helper yang mengandung marker CD4 (Sel T4). Limfosit T4 adalah pusat dan sel utama yang terlibat secara langsung maupun tidak langsung dalam menginduksi fungsi imunologik. Menurun atau menghilangnya sistem imunitas seluler terjadi karena virus HIV menginfeksi sel yang berperan membentuk antibodi pada sistem kekebalan tersebut, yaitu sel Limfosit T4, setelah virus HIV mengikatkan diri pada molekul CD4, virus masuk ke dalam target dan melepaskan bungkusnya kemudian dengan enzim *reserve transkriptase* virus tersebut merubah bentuk RNA agar dapat bergabung dengan DNA sel target. Selanjutnya sel yang berkembang biak akan mengandung bahan genetik virus. Infeksi HIV dengan demikian menjadi irreversible dan berlangsung seumur hidup (Djoerban, 2009 dalam Rosella 2013).

Menurut laporan Direktorat Jenderal Pengendali Penyakit dan Penyehatan Lingkungan Kementerian Kesehatan RI pada tahun 2013, jumlah infeksi HIV yang dilaporkan dari tahun 2000 – 2013 selalu meningkat dari awal yang hanya berjumlah 859 kasus menjadi 29,037 kasus pada tahun 2013. Hal ini menunjukkan bagaimana perkembangan kasus HIV yang begitu pesat menyebar di masyarakat. Hal yang senada diungkapkan oleh Komisi Penanggulangan AIDS Nasional yang melaporkan bahwa HIV/AIDS merupakan salah satu penyakit yang dapat menyebabkan kematian sehingga penyakit ini memerlukan perhatian serius. Hal ini terlihat dari meningkatnya jumlah penderita HIV/AIDS yang dilaporkan tiap tahunnya.

Aplikasi pemodelan matematika dapat dimanfaatkan sebagai alat bantu dalam menyelesaikan permasalahan di bidang sains, ekonomi, teknik dan kedokteran. Proses pemodelan matematika yaitu mengetahui masalah di dunia real, transformasi ke dalam masalah matematika, membuat asumsi, formulasi persamaan/ pertidaksamaan, penyelesaian persamaan/ pertidaksamaan, interpretasi solusi dan transformasi ke solusi di dunia real.

Model matematika menurut Haberman (1977) adalah model yang melibatkan konsep-konsep matematika (misalnya: fungsi, persamaan, ketaksamaan), atau representasi simbolik dari satu sistem yang melibatkan formulasi matematika secara abstrak.

Penelitian yang berhubungan dengan pemodelan matematika tentang penyakit HIV/AIDS sudah dilakukan oleh beberapa orang. Menurut penelitian Bayarama *et.al* (2006) yaitu pada penelitiannya mengacu pada model jenis SIR epidemi dijelaskan oleh persamaan diferensial. Model matematikanya disajikan dalam Sistem persamaan (1).

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= \Lambda - \eta(A) \frac{SI}{N} - \mu S, \\ \frac{di}{dt} &= \eta(A) \frac{SI}{N} - (\nu + \mu) I, \\ \frac{da}{dt} &= \nu I - (\sigma + \mu) A.\end{aligned}\quad (1)$$

Model matematika tentang penyakit HIV/AIDS dikembangkan oleh Hia *et al.* (2012) yang pada jurnalnya menjelaskan tentang model SIR pada penyakit HIV/AIDS dengan melihat probabilitas masing-masing variabel. Model matematikanya disajikan dalam Sistem persamaan (2).

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= \Lambda - \mu S - \beta S \frac{I}{N}, \\ \frac{di}{dt} &= \beta S \frac{I}{N} - (\mu + \gamma) I, \\ \frac{da}{dt} &= \gamma I - (\mu + \delta) A,\end{aligned}\quad (2)$$

Model matematika tentang penyakit HIV/AIDS dikembangkan oleh Hia *et al.* (2012) yang pada jurnalnya menjelaskan tentang model SIR pada penyakit HIV/AIDS dengan melihat laju *Treatment*. Model matematikanya disajikan dalam Sistem Persamaan (3)

$$\begin{aligned}\dot{S} &= \Lambda - \beta SI - dS, \\ \dot{I} &= \beta SI + \alpha_1 T - k_1 I - k_2 I - dI, \\ \dot{A} &= k_1 I + \alpha_2 T - (\delta_1 + d) A, \\ \dot{T} &= k_2 I - \alpha_1 T - \alpha_2 T - (\delta_2 + d) T, \\ \dot{R} &= \mu_1 S - dR,\end{aligned}\quad (3)$$

Pengembangan model dinamika SIA menjadi model SIAT pada pembahasan ini yaitu dengan membagi klas populasi manusia di mana klas *Infected* dibagi menjadi kelas populasi *Infected1* dan kelas populasi *Infected2*. Di mana kelas populasi *Infected1* adalah kelas populasi yang positif HIV tahap awal, kemudian kelas populasi *Infected2* adalah kelas

populasi yang menjadi HIV tahap lanjut atau disebut *pre-AIDS*.

Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah (1) Bagaimana model SIAT dalam penyebaran penyakit HIV/AIDS dengan kelas *Treatment*? (2) Bagaimana analisis titik kesetimbangan? (3) Bagaimana simulasi model matematika SIAT dengan *software Maple*?

Tujuan dari penelitian ini membangun model, menganalisis dan menginterpretasikan simulasi model matematika SIR untuk penyakit HIV/AIDS dengan populasi yang masuk ke kelas HIV tahap awal dalam sistem lebih memilih menjalani *Treatment*. Model epidemik SIR (*Susceptible, Infectives, Recovered*) pada awalnya dikembangkan untuk mengetahui laju penyebaran dan kepuanahan suatu wabah penyakit dalam populasi tertutup dan bersifat epidemik. Setelah model terbentuk, akan dicari solusi analitis dan titik kesetimbangannya, yang selanjutnya diinterpretasikan dalam permasalahan yang sesungguhnya dalam kehidupan nyata (Haberman, 1977).

Selanjutnya untuk mengetahui definisi dari titik ekuilibrium, diberikan sistem persamaan diferensial sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}\tag{4}$$

dengan kondisi awal $x_i(t_0) = x_{i0}$, untuk $i = 1, 2, \dots, n$ dan $\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$.

Sistem persamaan (4) dapat dituliskan menjadi

$$\dot{x} = f(x),\tag{5}$$

Dengan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)$ dan kondisi awal $x(t_0) = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) = x_0$.

Selanjutnya notasi $x(t) = (x_0, t)$ menyatakan solusi Sistem persamaan (5) dengan nilai awal x_0 .

Titik $\bar{x} \in R^n$ disebut titik ekuilibrium Sistem persamaan (4) jika $f(\bar{x}) = 0$ (Perko, 1991).

Kestabilan titik tetap suatu sistem linear dapat dilihat dari nilai eigen sistem tersebut. Pada persamaan deferensial orde satu Sistem persamaan (5) dengan solusi awal $x(t, x_0)$ pada waktu t dan dengan kondisi awal $x(0) = x_0$, pernyataan berikut bernilai benar (Olsder, 2004).

Definisi 1. Diberikan fungsi $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ pada sistem $\dot{x} = f(x)$, dengan $f_i \in C(E)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Matriks transformasi L dinamakan matriks Jacobi dari fungsi f dan dituliskan dengan lambang $J_f(\bar{x})$. Jadi matriks Jacobi dari fungsi f adalah

$$J_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

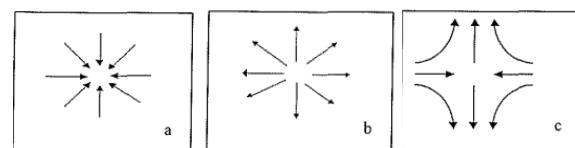
(Kocak, 1991)

Definisi 2 Sistem linear $\dot{x} = Jf(\bar{x})(x - \bar{x})$ disebut linearisasi sistem nonlinear dari Sistem persamaan (4) di sekitar titik \bar{x} (Perko, 1991).

Bentuk umum kestabilan di sekitar titik tetap berdasarkan perilaku orbit di sekitarnya, dibedakan berdasarkan dua tipe nilai eigen, nilai eigen real dan nilai eigen kompleks.

Bentuk umum kestabilan untuk tipe nilai real adalah:

- Jika setiap orbit mendekati titik tetap, maka titik tetap itu disebut titik tetap stabil. Tipe ini ditunjukkan oleh Gambar 1a.
- Jika setiap orbit bergerak menjauhi titik tetap, maka titik tetap itu disebut titik tetap tak stabil. Tipe ini ditunjukkan oleh Gambar 1b.
- Jika ada orbit yang bergerak mendekati dan ada orbit yang menjauhi titik tetap, maka titik tetap itu disebut titik pelana (sadel). Tipe ini ditunjukkan oleh Gambar 1c.

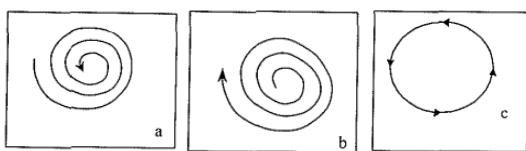


Gambar 1 Bentuk umum kestabilan titik tetap untuk tipe nilai eigen real

(a. Stabil, b. Tak stabil, c. Sadel)

Bentuk umum kestabilan tipe nilai eigen kompleks adalah:

- Jika setiap orbit mendekati titik tetap secara spiral, maka titik tetap tersebut merupakan titik tetap spiral stabil, tipe ini ditunjukkan oleh Gambar 2a.
- Jika setiap orbit menjauhi titik tetap secara spiral, maka titik tetap tersebut merupakan titik tetap spiral tak stabil, tipe ini ditunjukkan oleh Gambar 2b.
- Jika orbit-orbit bergerak mengelilingi titik tetap sehingga membentuk kurva tertutup, maka titik tetap tersebut merupakan titik tetap netral, tipe ini ditunjukkan oleh Gambar 2c.



Gambar 2 Bentuk umum kestabilan titik tetap untuk tipe nilai eigen kompleks
 a. Spiral stabil,
 b. Spiral tak stabil,
 c. Stabil netral
 (Hasibuan, K.M., 1989)

METODE

Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah studi literatur atau kajian pustaka dengan tahap-tahap: (1) penentuan masalah, (2) perumusan masalah, (3) studi pustaka, (4) analisis dan pemecahan masalah, (5) penarikan kesimpulan.

Pemilihan dan perumusan masalah diperlukan untuk membatasi permasalahan sehingga diperoleh bahan kajian yang jelas. Sehingga akan lebih mudah untuk menentukan langkah dalam memecahkan masalah tersebut.

Tahap studi pustaka dilakukan dengan mengkaji sumber-sumber pustaka sehingga diperoleh gambaran umum dan populasinya, model matematika, model epidemik SIR, sistem persamaan diferensial, titik ekuilibrium, nilai eigen dan vektor eigen, analisis kestabilan titik ekuilibrium dan simulasi model dengan software Maple.

Dalam pembahasan masalah dilakukan beberapa langkah pokok yaitu sebagai berikut. (1) Membangun model matematika pada penyebaran penyakit HIV/AIDS dengan kelas *Treatment*, (2) Mencari titik kesetimbangan dari model matematika, (3) Menentukan bilangan reproduksi dasar (R_0), (4) Menganalisis kestabilan titik kesetimbangan, (5) Menginterpretasikan solusi model matematika.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dari hasil penelitian diperoleh model matematika pada penyebaran penyakit HIV/AIDS dengan *treatment*. Dalam penelitian ini dianalisa dinamika penyebaran penyakit pertusis dalam dua keadaan yang berbeda, yaitu ketika $R_0 < 1$ dan ketika $R_0 > 1$. Dalam penelitian ini untuk mengetahui pengaruh nilai ψ_1 dan nilai γ_1 , maka dalam penelitian ini dalam simulasi akan merubah nilai nilai ψ_1 dan nilai γ_1 . Untuk mempertimbangkan pengaruh laju *treatment* pada individu yang positif HIV tahap awal, dianalisa ketika dinamika populasi $\psi_1 = 0,001, 0,09, 0,2, 0,5, 0,73, 0,9$.

Selanjutnya untuk mempertimbangkan pengaruh laju perubahan dari HIV tahap awal menuju HIV tahap lanjut (*pre-AIDS*), dianalisa

ketika dinamika populasi dianalisa untuk kasus endemik ($R_0 > 1$) dengan nilai $\gamma_1 = 0,01, \gamma_1 = 0,3, p = 0,5$ dan untuk kasus non endemik ($R_0 < 1$) dengan nilai $\gamma_1 = 0,7, \gamma_1 = 0,9$.

Dalam pembentukan model matematika yang dibentuk, terdapat variabel-variabel dan parameter-parameter yang digunakan dalam model, variabel-variabel dan parameter-parameter dapat dilihat pada Tabel 1 dan Tabel 2.

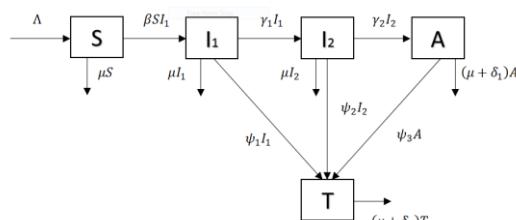
Tabel 1 Daftar Variabel-variabel

Variabel	Keterangan
$S(t)$	Banyak individu rentan per satuan waktu t
$I_1(t)$	Banyak individu terinfeksi dalam stadium <i>seroconversion</i> dan <i>asymptomatic</i> per satuan waktu t
$I_2(t)$	Banyak individu terinfeksi dalam stadium <i>pre-AIDS</i> per satuan waktu t
$A(t)$	Banyak individu terinfeksi dalam stadium AIDS per satuan waktu t
$T(t)$	Banyak individu yang menjalani <i>treatment</i> per satuan waktu t

Tabel 2 Daftar Parameter-parameter

Parameter	Nilai	Keterangan
Λ	0.55	Laju individu yang masuk kelas rentan
β	0.03	Laju keefektifan kontak
γ_1	$0 \leq \gamma_1 \leq 1$	Laju progres penyakit
γ_2	0.4	
ψ_1	$0 \leq \psi_1 \leq 1$	Laju <i>treatment</i> HIV tahap awal
ψ_2	0.3	Laju <i>treatment pre-AIDS</i>
ψ_3	0.4	Laju <i>treatment</i> individu AIDS
δ_1	0.47	Angka kematian karena HIV/AIDS pada individu AIDS
δ_2	0.04	Angka kematian karena HIV/AIDS pada individu yang menjalani <i>treatment</i>
μ	0.025	Angka kematian bukan karena HIV/AIDS

Model matematika proses penyebaran penyakit HIV/AIDS dengan kelas *Treatment* dalam suatu populasi dapat disajikan dengan diagram transfer seperti pada Gambar 3.



Gambar 3 Diagram Transfer Penyebaran Penyakit HIV/AIDS dengan kelas Treatment

Dari Gambar 3 diperoleh model matematika seperti di bawah ini:

$$S = \frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta SI_1 - \mu S,$$

$$I_1 = \frac{dI_1}{dt} = \beta SI_1 - \gamma_1 I_1 - \psi_1 I_1 - \mu I_1,$$

$$I_2 = \frac{dI_2}{dt} = \gamma_1 I_1 - \gamma_2 I_2 - \psi_2 I_2 - \mu I_2, \quad (6)$$

$$A = \frac{dA}{dt} = \gamma_2 I_2 - \psi_3 A - (\mu + \delta_1) A,$$

$$T = \frac{dT}{dt} = \psi_1 I_1 + \psi_2 I_2 + \psi_3 A - (\mu + \delta_2) T.$$

Dari Sistem persamaan (6) dapat dicari titik kesetimbangannya dengan membuat nol ruas kanan sistem persamaan tersebut, sehingga diperoleh Sistem persamaan (7) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \Lambda - \beta S I_1 - \mu S &= 0, \\ \beta S I_1 - \gamma_1 I_1 - \psi_1 I_1 - \mu I_1 &= 0, \\ \gamma_1 I_1 - \gamma_2 I_2 - \psi_2 I_2 - \mu I_2 &= 0, \\ \gamma_2 I_2 - \psi_3 A - (\mu + \delta_1) A &= 0, \\ \psi_1 I_1 + \psi_2 I_2 + \psi_3 A - (\mu + \delta_2) T &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Persamaan 1 dari Sistem persamaan (7) menjadi,

$$\begin{aligned} \Lambda - \beta S I_1 - \mu S &= 0 \\ \Leftrightarrow \beta S I_1 + \mu S &= \Lambda \\ \Leftrightarrow S(\beta I_1 + \mu) &= \Lambda \\ \Leftrightarrow S &= \frac{\Lambda}{\beta I_1 + \mu}. \end{aligned}$$

Persamaan 2 dari Sistem persamaan (7) menjadi,

$$\begin{aligned} \beta S I_1 - \gamma_1 I_1 - \psi_1 I_1 - \mu I_1 &= 0 \\ \Leftrightarrow I_1(\beta S - \gamma_1 - \psi_1 - \mu) &= 0 \\ \Leftrightarrow I_1 = 0 \vee S &= \frac{\gamma_1 + \psi_1 + \mu}{\beta}. \end{aligned}$$

Kasus $I = 0$:

Persamaan 1 dari Sistem persamaan (7) menjadi,

$$\begin{aligned} S &= \frac{\Lambda}{\beta I_1 + \mu} \\ \Leftrightarrow S &= \frac{\Lambda}{\mu}. \end{aligned}$$

Persamaan 3 dari Sistem persamaan (7) menjadi,

$$\begin{aligned} -\gamma_2 I_2 - \psi_2 I_2 - \mu I_2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\gamma_2 + \psi_2 + \mu) I_2 &= 0 \\ \Leftrightarrow I_2 &= 0. \end{aligned}$$

Subtitusikan $I_1, I_2 = 0$ ke persamaan 4 dari Sistem Persamaan (7) menjadi,

$$\begin{aligned} -\psi_3 A - (\mu + \delta_1) A &= 0 \\ \Leftrightarrow (\psi_3 + \mu + \delta_1) A &= 0 \\ \Leftrightarrow A &= 0. \end{aligned}$$

Subtitusikan $I_1, I_2, A = 0$ ke persamaan 5 dari Sistem Persamaan (7) menjadi,

$$\begin{aligned} \psi_1 I_1 + \psi_2 I_2 + \psi_3 A - (\mu + \delta_2) T &= 0 \\ \Leftrightarrow (\mu + \delta_2) T &= \psi_1 I_1 + \psi_2 I_2 + \psi_3 A \\ \Leftrightarrow T &= 0. \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit ($R_0 < 1$) sebagai berikut,

$$P_0 = (S, I_1, I_2, A, T) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0, 0 \right).$$

Kasus $I \neq 0$:

Misalkan $P_1 = (S^*, I_1^*, I_2^*, A^*, T^*)$, sehingga Sistem persamaan (7) menjadi:

$$\begin{aligned} \Lambda - \beta S^* I_1^* - \mu S^* &= 0, \\ \beta S^* I_1^* - \gamma_1 I_1^* - \psi_1 I_1^* - \mu I_1^* &= 0, \\ \gamma_1 I_1^* - \gamma_2 I_2^* - \psi_2 I_2^* - \mu I_2^* &= 0, \\ \gamma_2 I_2^* - \psi_3 A^* - (\mu + \delta_1) A^* &= 0, \\ \psi_1 I_1^* + \psi_2 I_2^* + \psi_3 A^* - (\mu + \delta_2) T^* &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Jelas untuk kasus $I \neq 0$, maka dari persamaan (7) nilai $S^* = \frac{\gamma_1 + \psi_1 + \mu}{\beta}$.

Persamaan 1 dari Sistem persamaan (8) menjadi,

$$\begin{aligned} \Lambda - \beta S^* I_1^* - \mu S^* &= 0 \\ \Leftrightarrow I_1^* &= \frac{\Lambda - \mu S^*}{\beta S^*} \\ \Leftrightarrow I_1^* &= \frac{\Lambda - \mu \left(\frac{\gamma_1 + \psi_1 + \mu}{\beta} \right)}{\beta \left(\frac{\gamma_1 + \psi_1 + \mu}{\beta} \right)} \\ \Leftrightarrow I_1^* &= \frac{\Lambda \beta - \mu (\gamma_1 + \psi_1 + \mu)}{(\gamma_1 + \psi_1 + \mu) \beta}. \end{aligned} \quad (9)$$

Subtitusikan persamaan (9) ke persamaan 3 dari Sistem persamaan (8) menjadi,

$$\begin{aligned} \gamma_1 I_1^* - \gamma_2 I_2^* - \psi_2 I_2^* - \mu I_2^* &= 0 \\ \Leftrightarrow (\gamma_2 + \psi_2 + \mu) I_2^* &= \gamma_1 \frac{\Lambda \beta - \mu (\gamma_1 + \psi_1 + \mu)}{(\gamma_1 + \psi_1 + \mu) \beta} \\ \Leftrightarrow I_2^* &= \frac{\gamma_1 \frac{\Lambda \beta - \mu (\gamma_1 + \psi_1 + \mu)}{(\gamma_1 + \psi_1 + \mu) \beta}}{(\gamma_2 + \psi_2 + \mu)} \\ \Leftrightarrow I_2^* &= \frac{\gamma_1 [\Lambda \beta - \mu (\gamma_1 + \psi_1 + \mu)]}{(\gamma_2 + \psi_2 + \mu)(\gamma_1 + \psi_1 + \mu) \beta}. \end{aligned} \quad (10)$$

Subtitusikan persamaan (10) ke persamaan 4 dari Sistem persamaan (8) menjadi,

$$\begin{aligned} \gamma_2 I_2^* - \psi_3 A^* - (\mu + \delta_1) A^* &= 0 \\ \Leftrightarrow (\psi_3 + \mu + \delta_1) A^* &= \gamma_2 I_2^* \\ \Leftrightarrow A^* &= \frac{\gamma_2 I_2^*}{\psi_3 + \mu + \delta_1} \\ \Leftrightarrow A^* &= \frac{\gamma_2 \frac{\gamma_1 [\Lambda \beta - \mu (\gamma_1 + \psi_1 + \mu)]}{(\gamma_2 + \psi_2 + \mu)(\gamma_1 + \psi_1 + \mu) \beta}}{(\psi_3 + \mu + \delta_1)} \\ \Leftrightarrow A^* &= \frac{\gamma_2 \gamma_1 [\Lambda \beta - \mu (\gamma_1 + \psi_1 + \mu)]}{(\psi_3 + \mu + \delta_1)(\gamma_2 + \psi_2 + \mu)(\gamma_1 + \psi_1 + \mu) \beta}. \end{aligned} \quad (11)$$

Subtitusikan persamaan (9),(10) dan (11) ke persamaan 5 dari Sistem persamaan (8) menjadi,

$$\begin{aligned} \psi_1 I_1^* + \psi_2 I_2^* + \psi_3 A^* - (\mu + \delta_2) T^* &= 0 \\ \Leftrightarrow (\mu + \delta_2) T^* &= \psi_1 I_1^* + \psi_2 I_2^* + \psi_3 A^* \\ \Leftrightarrow T^* &= \left[\frac{\Lambda \beta - \mu (\gamma_1 + \psi_1 + \mu)}{[(\mu + \delta_2)(\gamma_1 + \psi_1 + \mu) \beta]} \right] \left(\psi_1 + \frac{\psi_2 \gamma_1}{(\gamma_2 + \psi_2 + \mu)} + \frac{\psi_3 \gamma_2 \gamma_1}{(\psi_3 + \mu + \delta_1)(\gamma_2 + \psi_2 + \mu)} \right). \end{aligned}$$

Mengingat syarat dari titik kesetimbangan yang menyatakan bahwa setiap titik harus positif maka nilai $I_1^* > 0$, sehingga diperoleh sistem pertidaksamaan sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda\beta - \mu(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)}{(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)\beta} &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\mu}{\beta} \left(\frac{\Lambda\beta}{\mu(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)} - 1 \right) &> 0. \end{aligned}$$

Sehingga I_1^* bernilai positif apabila $\frac{\Lambda\beta}{\mu(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)} > 1$.

Jadi diperoleh titik kesetimbangan endemik $P_1 = (S^*, I_1^*, I_2^*, A^*, T^*)$ dengan

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{\gamma_1 + \psi_1 + \mu}{\beta}, \quad I_1^* = \frac{\Lambda\beta - \mu(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)}{(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)\beta}, \\ I_2^* &= \frac{\gamma_1[\Lambda\beta - \mu(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)]}{(\gamma_2 + \psi_2 + \mu)(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)\beta}, \\ A^* &= \frac{\gamma_2\gamma_1[\Lambda\beta - \mu(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)]}{(\psi_3 + \mu + \delta_1)(\gamma_2 + \psi_2 + \mu)(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)\beta}, \\ T^* &= \left[\frac{\Lambda\beta - \mu(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)}{(\mu + \delta_2)(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)\beta} \right] \left(\psi_1 + \frac{\psi_2\gamma_1}{(\gamma_2 + \psi_2 + \mu)} + \frac{\psi_3\gamma_2\gamma_1}{(\psi_3 + \mu + \delta_1)(\gamma_2 + \psi_2 + \mu)} \right). \end{aligned}$$

Untuk menganalisis P_1 diperlukan bilangan reproduksi dasar (R_0), angka rasio reproduksi dasar ditentukan dengan mencari kondisi yang menjamin $I_1^* > 0$. Dari proses di atas telah ditunjukkan $I_1^* > 0$ apabila $\frac{\Lambda\beta}{\mu(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)} > 1$, sehingga dapat didefinisikan $R_0 = \frac{\Lambda\beta}{\mu(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)}$.

Jadi diperoleh titik kesetimbangan endemik $P_1 = (S^*, I_1^*, I_2^*, A^*, T^*)$ dengan

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{\gamma_1 + \psi_1 + \mu}{\beta}, \quad I_1^* = \frac{\mu}{\beta}(R_0 - 1), \quad I_2^* = \frac{\gamma_1\mu(R_0 - 1)}{(\gamma_2 + \psi_2 + \mu)\beta}, \\ A^* &= \frac{\gamma_2\gamma_1\mu(R_0 - 1)}{(\psi_3 + \mu + \delta_1)(\gamma_2 + \psi_2 + \mu)\beta}, \\ T^* &= \frac{\mu(R_0 - 1)[\psi_1(\psi_3 + \mu + \delta_1)(\gamma_2 + \psi_2 + \mu) + \psi_2\gamma_1(\psi_3 + \mu + \delta_1) + \psi_3\gamma_2\gamma_1]}{(\mu + \delta_2)(\psi_3 + \mu + \delta_1)(\gamma_2 + \psi_2 + \mu)\beta}. \end{aligned}$$

Berdasarkan analisa yang telah dilakukan diperoleh Teorema 1 sebagai berikut,

Teorema 1

$$\text{Dipunyai } R_0 = \frac{\Lambda\beta}{\mu(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)}$$

Dari Sistem persamaan (6) berdasarkan nilai R_0 tersebut diperoleh

1. Apabila $R_0 \leq 1$ maka Sistem persamaan (6) hanya mempunyai 1 titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas peyakit (P_0) dengan $(S, I_1, I_2, A, T) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0, 0 \right)$.
2. Apabila $R_0 > 1$ maka Sistem persamaan (6) mempunyai 2 titik kesetimbangan

yaitu titik kesetimbangan bebas peyakit (P_0) dengan $(S, I_1, I_2, A, T) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0, 0 \right)$ dan titik kesetimbangan endemik (P_1) dengan

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{\gamma_1 + \psi_1 + \mu}{\beta}, \quad I_1^* = \frac{\mu}{\beta}(R_0 - 1), \\ I_2^* &= \frac{\gamma_1\mu(R_0 - 1)}{(\gamma_2 + \psi_2 + \mu)\beta}, \quad A^* = \frac{\gamma_2\gamma_1\mu(R_0 - 1)}{(\psi_3 + \mu + \delta_1)(\gamma_2 + \psi_2 + \mu)\beta}, \\ T^* &= \frac{\mu(R_0 - 1)[\psi_1(\psi_3 + \mu + \delta_1)(\gamma_2 + \psi_2 + \mu) + \psi_2\gamma_1(\psi_3 + \mu + \delta_1) + \psi_3\gamma_2\gamma_1]}{(\mu + \delta_2)(\psi_3 + \mu + \delta_1)(\gamma_2 + \psi_2 + \mu)\beta}. \end{aligned}$$

Kestabilan kedua titik kesetimbangan yang diperoleh dari masing-masing sistem dianalisis dengan menggunakan nilai eigen dari matriks Jacobian Sistem persamaan (6).

Berikut ini merupakan analisis kestabilan titik kesetimbangan Sistem persamaan (6). Pada mulanya dibentuk matriks Jacobian dari Sistem persamaan (6) sehingga diperoleh

$$J^*(P_0) = \begin{pmatrix} -\beta i_1 - \mu & -\beta s & 0 & 0 & 0 \\ \beta i_1 & \beta s - \gamma_1 - \psi_1 - \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & -\gamma_2 - \psi_2 - \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 & -\psi_3 - (\mu + \delta_1) & 0 \\ 0 & \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & -\mu - \delta_2 \end{pmatrix}$$

Kemudian berdasarkan matriks Jacobian, dianalisis pada kedua titik ekuilibrium. Sehingga diperoleh matriks Jacobian pada titik nonendemik P_0 sebagai berikut.

$$J^*(P_0) = \begin{pmatrix} -\mu & -\beta \frac{\Lambda}{\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta \frac{\Lambda}{\mu} - \gamma_1 - \psi_1 - \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & -\gamma_2 - \psi_2 - \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 & -\psi_3 - (\mu + \delta_1) & 0 \\ 0 & \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & -(\mu + \delta_2) \end{pmatrix}$$

Dari matriks Jacobian titik ekuilibrium P_0 diperoleh nilai eigen sebagai berikut,

$$\lambda_1 = -(\mu + \delta_2); \quad \lambda_2 = -\psi_3 - (\mu + \delta_1);$$

$$\lambda_3 = -\gamma_2 - \psi_2 - \mu; \quad \lambda_4 = -\mu;$$

$$\lambda_5 = (\gamma_1 + \psi_1 + \mu)(R_0 - 1).$$

Jelas $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ bernilai negatif, $\lambda_5 < 0$ apabila $R_0 < 1$, $\lambda_5 = 0$ apabila $R_0 = 1$, dan $\lambda_5 > 0$ apabila $R_0 > 1$. Saat $R_0 = 1$, terdapat nilai eigen yang bernilai nol sehingga titik ekuilibrium P_0 tidak hiperbolik. Hal ini berakibat kestabilan P_0 hanya dilihat saat $R_0 \neq 1$. Jadi diperoleh titik ekuilibrium P_0 stabil asimtotik lokal apabila $R_0 < 1$ dan tidak stabil apabila $R_0 > 1$.

Selanjutnya dianalisis matriks Jacobian untuk mengetahui kestabilan titik ekuilibrium endemik P_1

$$J'(P_1) = \begin{pmatrix} -\beta i_1 - \mu & -\beta s & 0 & 0 & 0 \\ \beta i_1 & \gamma_1 - \psi_1 - \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_2 - \psi_2 - \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 & -\psi_3 - (\mu + \delta_1) & 0 \\ 0 & \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & -\mu - \delta_2 \end{pmatrix}$$

hanya dilakukan saat $R_0 > 1$.

Diperoleh nilai eigen sebagai berikut,

$$\lambda_1 = -(\mu + \delta_2); \lambda_2 = -\psi_3 - (\mu + \delta_1); \\ \lambda_3 = -\gamma_2 - \psi_2 - \mu;$$

Perhatikan persamaan berikut,

$$\lambda^2 + \mu R_0 \lambda + (\gamma_1 + \psi_1 + \mu)(\mu(R_0 - 1)) = 0 \quad (12)$$

Didefinisikan $a_0 = 1$, $a_1 = \mu R_0$ dan a_2

$$= (\gamma_1 + \psi_1 + \mu)(\mu(R_0 - 1)).$$

$$\text{Dipunyai } R_0 = \frac{\Lambda\beta}{\mu(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)}.$$

$$\text{Jelas } a_1 = \mu R_0 = \mu \frac{\Lambda\beta}{\mu(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)} > 0.$$

$a_2 = (\gamma_1 + \psi_1 + \mu)(\mu(R_0 - 1)) > 1$ apabila $R_0 > 1$.

$$\text{Jelas } a_1^2 - 4a_0a_2 < a_1^2$$

Dari pertidaksamaan diperoleh

$$\lambda_{4,5} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{D}}{2a_0}$$

$$\lambda_{4,5} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0} \\ = \frac{-\mu R_0 \pm \sqrt{\mu^2 R_0^2 - 4(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)(\mu(R_0 - 1))}}{2}.$$

Untuk memeriksa apakah akar-akar persamaan (12) mempunyai bagian real negatif, digunakan Determinan untuk melihatnya dengan dua kasus

$$i) \mu R_0 > 4(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)$$

$$ii) \mu R_0 < 4(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)$$

Kasus i)

$$\text{Misal } \mu R_0 > 4(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)$$

$$\text{Jelas } \frac{\mu R_0}{4(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)} > 1$$

$$= \frac{\mu R_0}{4(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)} + \frac{\mu(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)}{\Lambda\beta} > 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\Lambda\beta)^2 R_0}{(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)^2} + 4\Lambda\beta > \frac{4(\Lambda\beta)^2}{\mu(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\Lambda\beta)^2 R_0}{(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)^2} - \frac{4(\Lambda\beta)^2}{\mu(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)} + 4\Lambda\beta > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mu^2 R_0^3 - 4\Lambda\beta R_0 + 4\Lambda\beta}{\mu R_0} > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\mu R_0^2 - \frac{4\Lambda\beta}{\mu} + \frac{4\Lambda\beta}{\mu R_0} \right) \mu > 0$$

$$\Leftrightarrow \mu^2 R_0^2 - 4\Lambda\beta + \frac{4\Lambda\beta}{R_0} > 0$$

$$\Leftrightarrow \mu^2 R_0^2 - 4(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)\mu R_0 + 4(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)\mu > 0$$

$$\Leftrightarrow \mu^2 R_0^2 - 4(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)(\mu(R_0 - 1)) > 0$$

$$\Leftrightarrow D > 0$$

Jadi $\mu R_0 > 4(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)$ menyebabkan

$$D > 0.$$

Kasus ii)

Misal $\mu R_0 < 4(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)$

$$\text{Jelas } \frac{\mu R_0}{4(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)} < 1$$

$$= \frac{\mu R_0}{4(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)} + \frac{\mu(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)}{\Lambda\beta} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\Lambda\beta)^2 R_0}{(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)^2} + 4\Lambda\beta < \frac{4(\Lambda\beta)^2}{\mu(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\Lambda\beta)^2 R_0}{(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)^2} - \frac{4(\Lambda\beta)^2}{\mu(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)} + 4\Lambda\beta < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mu^2 R_0^3 - 4\Lambda\beta R_0 + 4\Lambda\beta}{\mu R_0} < 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\mu R_0^2 - \frac{4\Lambda\beta}{\mu} + \frac{4\Lambda\beta}{\mu R_0} \right) \mu < 0$$

$$\Leftrightarrow \mu^2 R_0^2 - 4\Lambda\beta + \frac{4\Lambda\beta}{R_0} < 0$$

$$\Leftrightarrow \mu^2 R_0^2 - 4(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)\mu R_0 + 4(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)\mu < 0$$

$$\Leftrightarrow \mu^2 R_0^2 - 4(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)(\mu(R_0 - 1)) < 0$$

$$\Leftrightarrow D > 0$$

Jadi $\mu R_0 < 4(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)$ menyebabkan

$$D < 0.$$

Jadi nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ bernilai negatif dan bagian real nilai eigen λ_4, λ_5 bernilai negatif. Jadi titik ekuilibrium P_1 stabil asimtotik lokal apabila $R_0 > 1$.

Berdasarkan analisa yang telah dilakukan diperoleh Teorema 2 sebagai berikut,

Teorema 2

$$\text{Dipunyai } R_0 = \frac{\Lambda\beta}{\mu(\gamma_1 + \psi_1 + \mu)},$$

1. Titik ekuilibrium P_0 dengan $(S, I_1, I_2, A, T) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0, 0 \right)$ stabil asimtotik lokal apabila

$$R_0 < 1 \text{ dan tidak stabil apabila} \\ R_0 > 1.$$

2. Titik ekuilibrium endemik

$$P_1 = (S^*, I_1^*, I_2^*, A^*, T^*) \text{ dengan}$$

$$S^* = \frac{\gamma_1 + \psi_1 + \mu}{\beta}, I_1^* = \frac{\mu}{\beta}(R_0 - 1),$$

$$I_2^* = \frac{\gamma_1 \mu(R_0 - 1)}{(\gamma_2 + \psi_2 + \mu)\beta}, A^* = \frac{\gamma_2 \gamma_1 \mu(R_0 - 1)}{(\psi_3 + \mu + \delta_1)(\gamma_2 + \psi_2 + \mu)\beta},$$

$$T^* = \frac{\mu(R_0 - 1)[\psi_1(\psi_3 + \mu + \delta_1)(\gamma_2 + \psi_2 + \mu) + \psi_2 \gamma_1(\psi_3 + \mu + \delta_1) + \psi_3 \gamma_2 \gamma_1]}{(\mu + \delta_2)(\psi_3 + \mu + \delta_1)(\gamma_2 + \psi_2 + \mu)\beta}$$

stabil asimtotik lokal apabila $R_0 > 1$.

Selanjutnya dilakukan interpretasi model ke dalam bentuk simulasi berbantuan *software Maple*. Simulasi diawali dengan memberikan nilai awal pada parameter-parameter sesuai dengan kondisi nilai R_0 dalam teorema-teorema yang telah diberikan di atas. Simulasi ini diberikan untuk memberikan gambaran geometris dari teorema eksistensi dan

kestabilan dari titik-titik kesetimbangan model epidemi SIAT ini.

Dalam penelitian ini dianalisa dinamika penyebaran penyakit HIV/AIDS dalam dua keadaan yang berbeda, yaitu ketika $R_0 < 1$ dan ketika $R_0 > 1$. Untuk mempertimbangkan pengaruh laju *treatment* pada individu yang positif HIV tahap awal, dianalisa ketika dinamika populasi $\psi_1 = 0.001, 0.09, 0.2, 0.38, 0.57, 0.62, 0.71, 0.85, 0.92$. Untuk mempertimbangkan pengaruh laju progres individu yang menjadi HIV tahap lanjut dari individu HIV tahap awal, dinamika populasi dianalisa untuk kasus endemik ($R_0 > 1$) dengan nilai $\gamma_1 = 0.01, \gamma_1 = 0.3$ dan untuk kasus non endemik ($R_0 < 1$) dengan nilai $\gamma_1 = 0.7, \gamma_1 = 0.9$.

Selanjutnya akan dianalisa pengaruh laju treatment pada populasi HIV tahap awal dengan memperhatikan nilai $\gamma_1 = 0.7$ dengan variasi parameter ψ_1 yang beragam. Berikut tabel variasi ψ_1 dengan nilai R_0 .

Tabel 3 Nilai $R_0 < 1$ dengan variasi ψ_1

ψ_1	R_0
0.1	0.8
0.2	0.71
0.3	0.64
0.4	0.59
0.5	0.54
0.6	0.5
0.7	0.46
0.8	0.43
0.9	0.41

Dari Tabel 3 maka menghasilkan nilai R_0 yang berbeda-beda. Selanjutnya akan

ditunjukkan grafik dari masing-masing kelas pada Gambar 4.

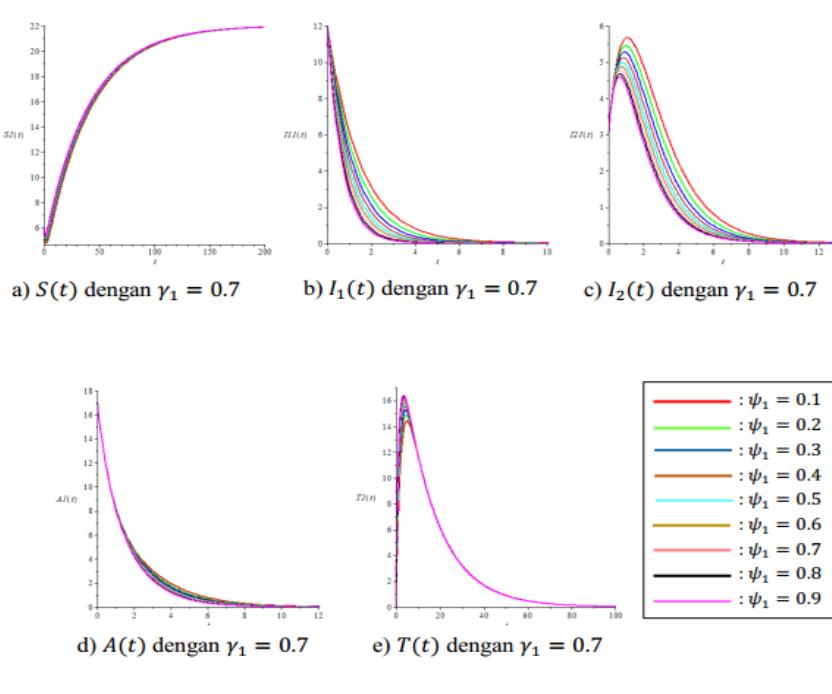
Pada Gambar 4 dapat dilihat bahwa dengan nilai $\gamma_1 = 0.7$ dan nilai ψ_1 yang berbeda diperoleh grafik yang beragam pula. Gambar 4 a) merepresentasikan grafik $S(t)$ dengan berbagai nilai ψ_1 langsung menuju titik kesetimbangan bebas penyakit, dimana grafik $S(t)$ akan turun terlebih dahulu dikarenakan kematian murni dari individu yang ada pada kelas populasi rentan tersebut.

Gambar 4 b) merepresentasikan grafik $I_1(t)$ yang langsung turun menuju titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu 0. Grafik $I_1(t)$ turun dikarenakan populasi HIV tahap awal menuju populasi HIV tahap lanjut (*pre-AIDS*), sebagian populasi lagi menjalani treatment dan sebagian lagi meninggal.

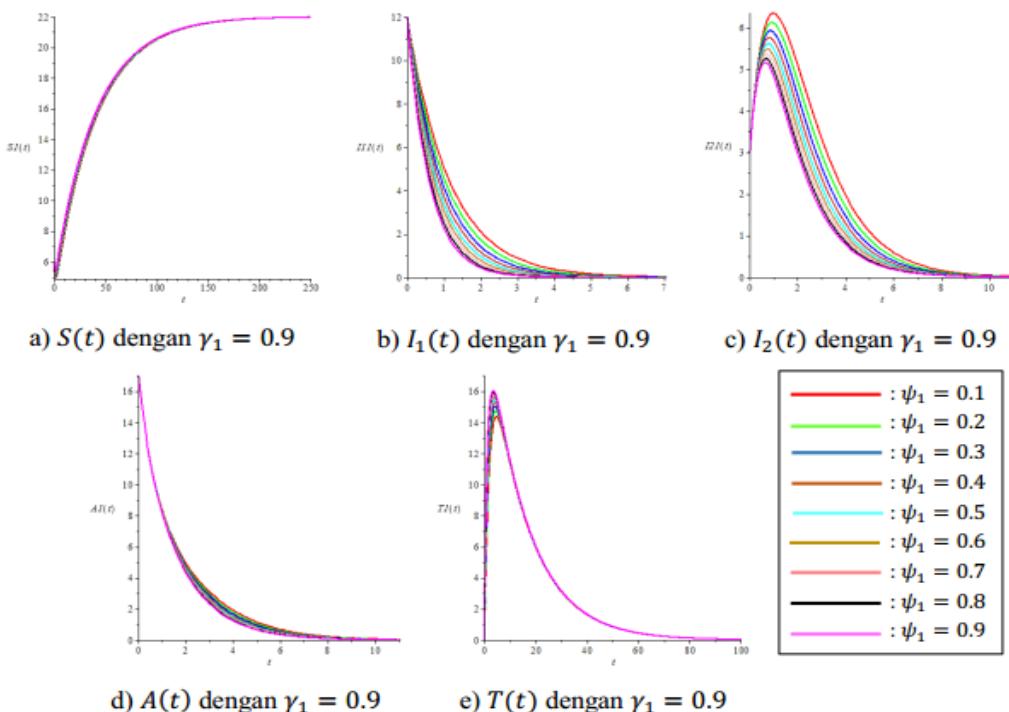
Gambar 4 c) merepresentasikan grafik $I_2(t)$ sebagai populasi HIV tahap lanjut (*pre-AIDS*) naik terlebih dahulu dikarenakan nilai γ_1 yang tinggi kemudian turun menuju titik kesetimbangan bebas penyakit. Turunnya grafik $I_2(t)$ disebabkan kematian alami dan sebagian individu mengikuti treatment.

Gambar 4 d) direpresentasikan sebagai grafik $A(t)$ yaitu populasi positif AIDS, dimana grafik $A(t)$ langsung turun menuju titik kesetimbangan bebas penyakit disebabkan populasi yang ada menjalani treatment dan sebagian meninggal dikarenakan virus HIV-AIDS saat terdiagnosa AIDS, dan sebagian lagi disebabkan kematian murni.

Gambar 4 e) direpresentasikan sebagai grafik $T(t)$ yaitu kelas *Treatment* yang naik dikarenakan banyaknya individu yang menjalani treatment dari kelas HIV tahap awal, HIV tahap lanjut dan kelas AIDS. Kemudian



Gambar 4 Dinamika populasi a) $S(t)$, b) $I_1(t)$, c) $I_2(t)$, d) $A(t)$, e) $T(t)$ terhadap waktu t pada kasus non endemik ($R_0 < 1$) dengan $\gamma_1 = 0.7$



Gambar 5 Dinamika populasi a) $S(t)$, b) $I_1(t)$, c) $I_2(t)$, d) $A(t)$, e) $T(t)$ terhadap waktu t pada kasus non endemik ($R_0 < 1$) dengan $\gamma_1 = 0.9$

grafik $T(t)$ turun dikarenakan kematian murni dan kematian yang disebabkan virus HIV-AIDS dari individu ketiga kelas tersebut.

Selanjutnya akan dianalisa pengaruh laju treatment pada populasi HIV tahap awal dengan memperhatikan nilai $\gamma_1 = 0.9$ dengan variasi parameter ψ_1 yang beragam. Berikut tabel variasi ψ_1 dengan nilai R_0 .

Tabel 4 Nilai $R_0 < 1$ dengan variasi ψ_1

ψ_1	R_0
0.1	0.64
0.2	0.59
0.3	0.54
0.4	0.5
0.5	0.46
0.6	0.43
0.7	0.41
0.8	0.38
0.9	0.36

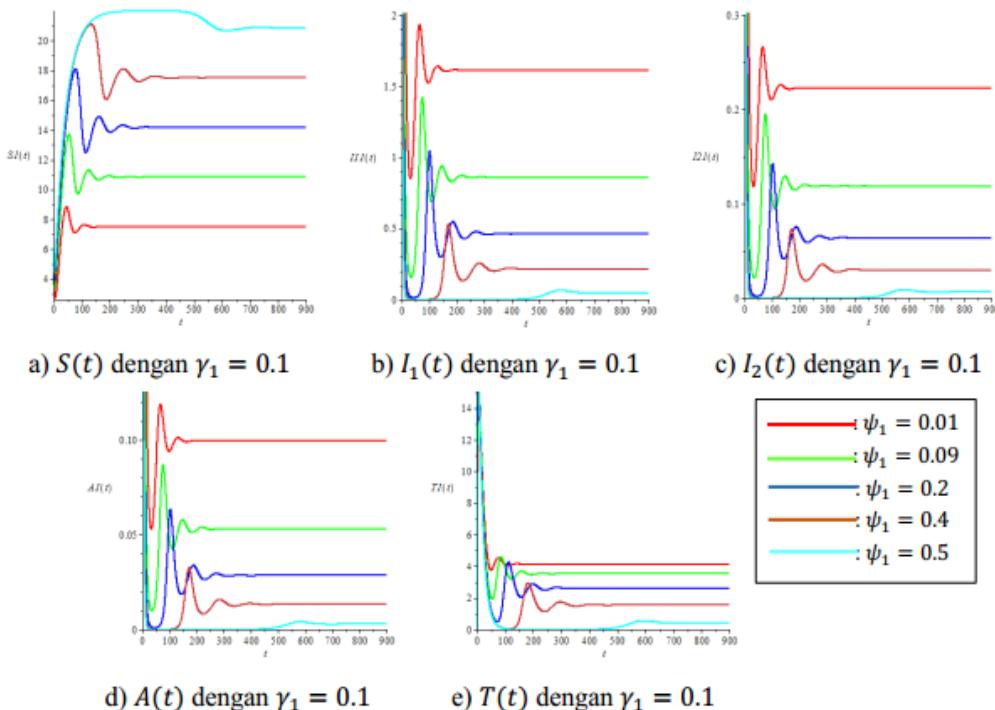
Dari Tabel 4 maka menghasilkan nilai R_0 yang berbeda-beda. Selanjutnya akan ditunjukkan grafik dari masing-masing kelas pada Gambar 5. Setelah dilakukan analisis perubahan nilai ψ_1 kasus non endemik ($R_0 < 1$), diperoleh hasil yang tersaji dalam Gambar 5.

Pada Gambar 5 dapat dilihat bahwa dengan nilai $\gamma_1 = 0.9$ dan nilai ψ_1 yang berbeda diperoleh grafik yang beragam pula. Gambar 5 a) merepresentasikan grafik $S(t)$ dengan berbagai nilai ψ_1 langsung menuju titik kesetimbangan bebas penyakit, dimana grafik $S(t)$ akan turun terlebih dahulu dikarenakan kematian murni dari individu yang ada pada kelas populasi rentan tersebut.

Gambar 5 b) merepresentasikan grafik $I_1(t)$ yang langsung turun menuju titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu 0. Grafik $I_1(t)$ turun dikarenakan populasi HIV tahap awal menuju populasi HIV tahap lanjut (pre-AIDS), sebagian populasi lagi menjalani treatment dan sebagian lagi meninggal.

Gambar 5 c) merepresentasikan grafik $I_2(t)$ sebagai populasi HIV tahap lanjut (pre-AIDS) naik terlebih dahulu dikarenakan nilai γ_1 yang tinggi kemudian turun menuju titik kesetimbangan bebas penyakit. Turunnya grafik $I_2(t)$ disebabkan kematian alami dan sebagian individu mengikuti treatment.

Gambar 5 d) direpresentasikan sebagai grafik $A(t)$ yaitu populasi positif AIDS, dimana grafik $A(t)$ langsung turun menuju titik kesetimbangan bebas penyakit disebabkan populasi yang ada menjalani treatment dan sebagian meninggal dikarenakan virus HIV-AIDS saat terdiagnosa AIDS, dan sebagian lagi disebabkan kematian murni.



Gambar 6 Dinamika populasi a) $S(t)$, b) $I_1(t)$, c) $I_2(t)$, d) $A(t)$, e) $T(t)$ terhadap waktu t pada kasus non endemik ($R_0 < 1$) dengan $\gamma_1 = 0.1$

Gambar 5 e) direpresentasikan sebagai grafik $T(t)$ yaitu kelas *Treatment* yang naik dikarenakan banyaknya individu yang menjalani *treatment* dari kelas HIV tahap awal, HIV tahap lanjut dan kelas AIDS. Kemudian grafik $T(t)$ turun dikarenakan kematian murni dan kematian yang disebabkan virus HIV-AIDS dari individu ketiga kelas tersebut.

Selanjutnya akan dianalisa pengaruh laju treatment pada populasi HIV tahap awal dengan memperhatikan nilai $\gamma_1 = 0.1$ dengan variasi parameter ψ_1 yang beragam. Berikut tabel variasi ψ_1 dengan nilai R_0 .

Tabel 5 Nilai $R_0 > 1$ dengan variasi ψ_1

ψ_1	R_0
0.001	5.24
0.09	3.07
0.2	2.03
0.34	1.42
0.5	1.06

Dari Tabel 5 maka menghasilkan nilai R_0 yang berbeda-beda. Selanjutnya akan ditunjukkan grafik dari masing-masing kelas pada Gambar 6.

Setelah dilakukan analisis perubahan nilai ψ_1 kasus endemik ($R_0 > 1$), diperoleh hasil yang tesaji dalam Gambar 6.

Gambar 6 dapat dilihat bahwa dengan nilai $\gamma_1 = 0.1$ dan nilai ψ_1 yang berbeda diperoleh grafik yang beragam pula. Gambar 6 a) merepresentasikan grafik $S(t)$ dengan berbagai nilai ψ_1 akan turun terlebih dahulu dikarenakan kematian murni dari individu yang ada pada kelas populasi rentan tersebut, dan sebagian menuju sub populasi HIV tahap awal dikarenakan kontak dengan penderita HIV tingkat awal. Kemudian grafik $S(t)$ naik menuju titik kesetimbangan endemik.

Gambar 6 b) merepresentasikan grafik $I_1(t)$ yang turun dikarenakan populasi HIV tahap awal menuju populasi HIV tahap lanjut (*pre-AIDS*), sebagian populasi lagi menjalani treatment dan sebagian lagi meninggal. Kemudian grafik $I_1(t)$ naik dikarenakan ada individu baru yang positif HIV tahap awal.

Gambar 6 c) merepresentasikan grafik $I_2(t)$ sebagai populasi HIV tahap lanjut (*pre-AIDS*) turun dahulu dikarenakan nilai γ_1 yang kecil kemudian naik menuju titik kesetimbangan endemik. Turunnya grafik $I_2(t)$ disebabkan kematian alami, sebagian individu mengikuti treatment dan sebagian lagi menjadi individu dengan AIDS.

Gambar 6 d) direpresentasikan sebagai grafik $A(t)$ yaitu populasi positif AIDS, dimana grafik $A(t)$ turun terlebih dahulu kemudian naik

dan turun lagi menuju titik kesetimbangan endemik. Grafik $A(t)$ turun disebabkan populasi yang ada menjalani treatment dan sebagian meninggal dikarenakan virus HIV-AIDS saat terdiagnosa AIDS, dan sebagian lagi disebabkan kematian murni.

Gambar 6 e) direpresentasikan sebagai grafik $T(t)$ yaitu kelas *Treatment* yang naik dikarenakan banyaknya individu yang menjalani *treatment* dari kelas HIV tahap awal, HIV tahap lanjut dan kelas AIDS. Kemudian grafik $T(t)$ turun dikarenakan kematian murni dan kematian yang disebabkan virus HIV-AIDS dari individu ketiga kelas tersebut. Kemudian naik kembali hingga turun menuju titik kesetimbangan endemik.

Semakin besar nilai ψ_1 maka akan semakin besar pula kemungkinan sistem menuju titik kesetimbangan bebas penyakit. Selanjutnya akan dianalisa pengaruh laju treatment pada populasi HIV tahap awal dengan memperhatikan nilai $\gamma_1 = 0.3$ dengan variasi parameter ψ_1 yang beragam. Berikut tabel variasi ψ_1 dengan nilai R_0 .

Tabel 6 Nilai $R_0 > 1$ dengan variasi ψ_1

ψ_1	R_0
0.001	2.02
0.09	1.59
0.2	1.26

Dari Tabel 5 maka menghasilkan nilai R_0 yang berbeda-beda. Selanjutnya akan

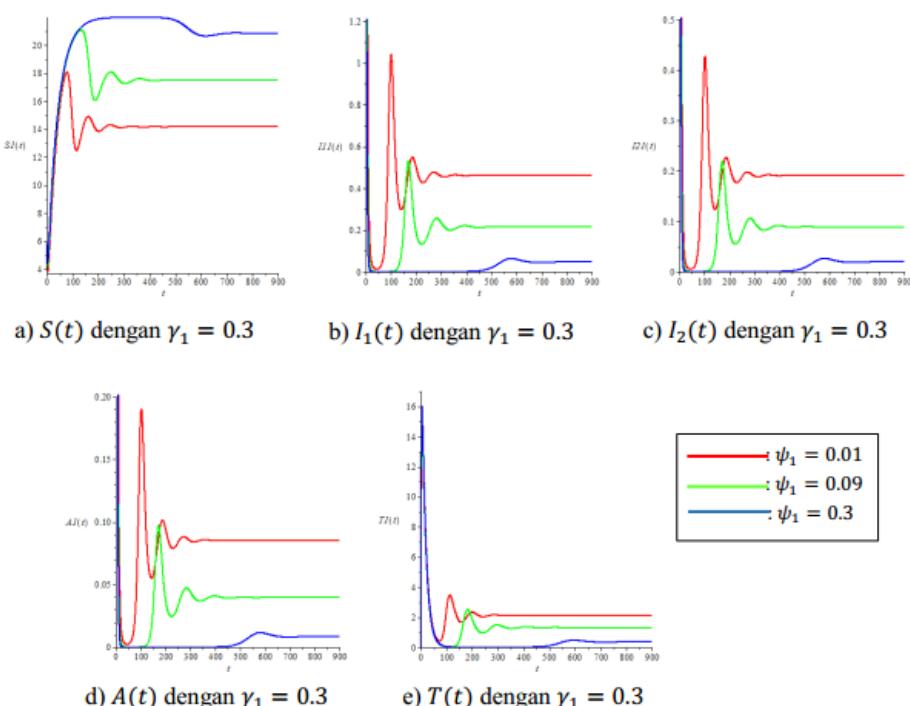
ditunjukkan grafik dari masing-masing kelas pada Gambar 7.

Pada Gambar 7 dapat dilihat bahwa dengan nilai $\gamma_1 = 0.3$ dan nilai ψ_1 yang berbeda diperoleh grafik yang beragam pula. Gambar 7 a) merepresentasikan grafik $S(t)$ dengan berbagai nilai ψ_1 akan turun terlebih dahulu dikarenakan kematian murni dari individu yang ada pada kelas populasi rentan tersebut, dan sebagian menuju sub populasi HIV tahap awal dikarenakan kontak dengan penderita HIV tingkat awal. Kemudian grafik $S(t)$ naik menuju titik kesetimbangan endemik.

Gambar 7 b) merepresentasikan grafik $I_1(t)$ yang turun dikarenakan populasi HIV tahap awal menuju populasi HIV tahap lanjut (*pre-AIDS*), sebagian populasi lagi menjalani treatment dan sebagian lagi meninggal. Kemudian grafik $I_1(t)$ naik dikarenakan ada individu baru yang positif HIV tahap awal.

Gambar 7 c) merepresentasikan grafik $I_2(t)$ sebagai populasi HIV tahap lanjut (*pre-AIDS*) turun dahulu dikarenakan nilai γ_1 yang kecil kemudian naik menuju titik kesetimbangan endemik. Turunnya grafik $I_2(t)$ disebabkan kematian alami, sebagian individu mengikuti treatment dan sebagian lagi menjadi individu dengan AIDS.

Gambar 7 d) direpresentasikan sebagai grafik $A(t)$ yaitu populasi positif AIDS, dimana grafik $A(t)$ turun terlebih dahulu kemudian naik dan turun lagi menuju titik kesetimbangan endemik. Grafik $A(t)$ turun disebabkan populasi yang ada menjalani treatment dan sebagian meninggal dikarenakan virus HIV-AIDS saat terdiagnosa AIDS, dan sebagian lagi



Gambar 7 Dinamika populasi a) $S(t)$, b) $I_1(t)$, c) $I_2(t)$, d) $A(t)$, e) $T(t)$ terhadap waktu t pada kasus non endemik ($R_0 < 1$) dengan $\gamma_1 = 0.3$

disebabkan kematian murni.

Gambar 7 e) direpresentasikan sebagai grafik $T(t)$ yaitu kelas *Treatment* yang naik dikarenakan banyaknya individu yang menjalani *treatment* dari kelas HIV tahap awal, HIV tahap lanjut dan kelas AIDS. Kemudian grafik $T(t)$ turun dikarenakan kematian murni dan kematian yang disebabkan virus HIV-AIDS dari individu ketiga kelas tersebut. Kemudian naik kembali hingga turun menuju titik kesetimbangan endemik. Semakin besar nilai ψ_1 maka akan semakin besar pula kemungkinan sistem menuju titik kesetimbangan bebas penyakit.

SIMPULAN

Dari penelitian diperoleh model matematika SIAT untuk penyebaran penyakit HIV/AIDS pada populasi manusia konstan. Analisis kedua model menghasilkan Teorema 1, Teorema 2 mengenai R_0 , titik kesetimbangan endemik dan nonendemik dan analisis kestabilan titik kesetimbangan endemik dan nonendemik.

Selanjutnya, untuk mengilustrasikan model tersebut maka dilakukan simulasi model menggunakan *software Maple* menghasilkan beberapa fakta, yaitu semakin besar nilai laju treatment dari populasi HIV tahap awal (ψ_1) dan semakin besar laju progres hiv tahap awal menjadi HIV tahap lanjut (γ_1) akan memperkecil jumlah penderita.

SARAN

Dalam penulisan ini, penulis membahas model matematika untuk model kestabilan SIA pada proses penyebaran penyakit HIV/AIDS dengan treatment pada populasi manusia tak konstan. Dalam penelitian ini belum diteliti secara detail mode matematika penyebaran HIV/AIDS pada sebagian penderita yang meninggal karena virus pada populasi yang terinveksi HIV. Oleh karena itu, penulis menyarankan kepada pembaca yang tertarik pada masalah ini untuk mengembangkan model penyebaran penyakit HIV/AIDS dengan treatment dengan memperhatikan kenyataan bahwa orang dapat meninggal akibat virus pada populasi yang terinveksi HIV.

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H., C. Rorres, J. Wiley, & Sons, Inc. 2005. *Aljabar Linier Elementer Ninth Edition*. Drexel University : Pensylvania.
- Bayarama, F. Mugisha, J. Y. T.. Luboobi, L. S. 2006. Mathematical Model for HIV/AIDS with Complacency in a Population with Declining Precalence. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, Vol. 7, No. I : 27-35.
- Dinas kesehatan Kota Semarang. 2011. *Profil kesehatan Kota Semarang*. Semarang: Dinas Kesehatan Kota Semarang, p.50-1.
- Haberman, R. 1977. *Mathematical models, An Introduction to Applied Mathematics*. Texas: Prentice-Hall, Inc.
- Hasibuan, K. M. 1989. *Dinamika populasi, Pemodelan Matematika didalam Biologi Populasi*. PAU IPB: Bogor.
- Hia, E. M.. Balatif, O.. Ferjouchia, H.. Labriji, E. H.. Rachik, M.. 2012. Modelling the Spread of HIV/AIDS in Morocco. *International Journal of Computer Science Issues*, Vol. 9, Issue 6, No 3 : 230-235.
- Huo, H. F.. Chen, R.. Wang, X. Y.. 2016. Modelling and Stability of HIV/AIDS Epidemic Model with Treatment. *Applied Mathematical Modelling*.
- Kartono. 2001. *Maple untuk Persamaan Diferensial*. Yogyakarta : Graha Ilmu.
- Kementrian Kesehatan RI. 2013. Laporan Situasi Perkembangan HIV dan AIDS di Indonesia Tahun 2013.
- Kementrian Kesehatan RI. 2011. Pedoman Nasional Tatalksana Klinis Infeksi HIV dan Terapi Antiretroviral pada Orang Dewasa.
- Kocak, H. & Hole J. K. 1991. *Dynamic and Bifurcation*. New York : Springer – Verlag.
- Komisi Penanggulangan AIDS Nasional, 2010. *Info HIV dan AIDS*. Jakarta : Komisi Penanggulangan AIDS Nasional
- Musekwa, S. D. H.. Nyabadza, F.. 2009. The Dynamics of an HIV/AIDS Model with Screened Disease Carriers. *Computional and Mathematical Methods in Medicine*, Vol. 10, No. 4, 287-305.
- Perko, L. 1991. *Differential Equations and Dynamical System*. New York : Springer – Verlag Berlin Heidelberg.
- Podder, C. N.. Sharomi, O.. Gumel, A. B.. Strawbridge, E.. 2011. Mathematical Analysis of a Model for Assessing the Impact of Antiretrovial Therapy, Voluntary Testing and Condom Use in Curtailing the Spread of HIV. *Differential Equation Dynamic System* 19(4) : 283-302.

- Rosella, Maylia. 2013. Faktor-faktor yang Berpengaruh terhadap Harapan Hidup 5 Tahun Pasien *Human Immunodeficiency (HIV)/ Acquired Immunodeficiency Syndrome (AIDS)* di RSUP Dr. Kariadi Semarang.
- Waluya, S. B. 2006. *Persamaan Diferensial*. Graha Ilmu: Yogyakarta.