



NILAI KETAKTERATURAN SISI TOTAL PADA GRAF AMALGAMASI SUBDIVISI GRAF DOVETAIL

Eka Nurdini[✉], Isnaini Rosyida, Mulyono

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Indonesia
Gedung D7 Lt. 1, Kampus Sekaran Gunungpati, Semarang 50229

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima Februari 2019
Disetujui Juni 2020
Dipublikasikan Juni 2020

Keywords:

Irregular total labeling, Graph labeling, irregularity strength, total edge irregularity strength, dovetail graph

Abstrak

Misal sebuah graf $G(V, E)$ dengan himpunan titik V tak kosong dan himpunan sisi E . Pelabelan total $\lambda: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ disebut pelabelan total tak teratur sisi jika untuk setiap sisi berbeda maka bobot sisinya berbeda. Bobot sisi e pada pelabelan total λ adalah jumlah dari label sisi e dan semua label titik yang berkaitan dengan e . Dengan kata lain, $w(xy) = \lambda(xy) + \lambda(x) + \lambda(y)$. Nilai ketakteraturan sisi total (*total edge irregularity strength*) graf G yang dinotasikan dengan $tes(G)$ adalah minimum label terbesar yang digunakan untuk melabeli titik dan sisi graf G dengan pelabelan total tak teratur sisi. Pada artikel ini, penulis menyelidiki nilai ketakteraturan sisi total graf amalgamasi subdivisi graf dovetail dengan titik pendaran dan graf sikel $(SD_n^n, x) * (C_{3n-3}, z)$. Hasil dari penelitian ini adalah $tes((SD_n^n, x) * (C_{3n-3}, z)) = \left\lceil \frac{9n-3}{3} \right\rceil$.

Abstract

*Given a graph $G(V, E)$ with a non-empty set V of vertices and a set E of edges. A total labelling $\lambda: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ is called an edge irregular total labelling if the weight of every edge is distinct. The weight of an edge e , under the total labelling λ , is the sum of label of edge e and all labels of vertices that are incident to e . In other words, $w(xy) = \lambda(xy) + \lambda(x) + \lambda(y)$. The total edge irregularity strength of G , denoted by $tes(G)$ is the minimum k used to label graph G with the edge irregular total labelling. In this paper, authors investigate the total edge irregularity strength of Amalgamation between Subdivision of Dovetail graph with pendant vertices and cycle graph $(SD_n^n, x) * (C_{3n-3}, z)$. The results of this research are $tes((SD_n^n, x) * (C_{3n-3}, z)) = \left\lceil \frac{9n-3}{3} \right\rceil$.*

How to cite:

Nurdini, E., Rosyida, Isnaini., & Mulyono. (2018). Nilai Ketakteraturan Sisi Total pada Graf Amalgamasi Subdivisi Graf Dovetail dengan Titik Pendaran dan Graf Sikel. *UNNES Journal of Mathematics*. 9(1) : 1-5.

PENDAHULUAN

Beberapa situasi dunia nyata dapat digambarkan dengan mudah melalui diagram yang terdiri dari sekumpulan titik dan garis yang menghubungkan pasangan tertentu dari titik-titik ini. Misalnya, titik-titik dapat mewakili orang, dan garis mewakili hubungan antar teman; atau titik-titiknya mungkin pusat komunikasi, dengan garis yang mewakili hubungan komunikasi. Perhatikan bahwa dalam diagram semacam itu dua titik yang diberikan belum tentu terhubung dengan garis. Abstraksi matematis situasi semacam ini memunculkan konsep graf (Bondy and Murty, 1976).

Makalah yang ditulis oleh Leonhard Euler tentang tujuh Jembatan Königsberg yang berjudul *Solutio Problematis Ad Geometriam Situs Pertinentis* dan diterbitkan pada 1736 dianggap sebagai tulisan pertama dalam sejarah teori graf. Rumus Euler yang berhubungan dengan jumlah sisi, titik, dan permukaan dari polyhedron convex dipelajari dan digeneralisasikan oleh Cauchy dan L'Huillier dan mewakili awal dari cabang matematika yang dikenal sebagai topologi.

Pelabelan pertama kali diperkenalkan oleh Sadlák pada tahun 1964, Sadlák mendefinisikan pelabelan *magic* pada graf adalah pelabelan sisi dengan daerah hasil bilangan real, sehingga jumlah label sisi yang terkait pada suatu titik sama dengan jumlah label sisi yang terkait pada titik yang lain, meskipun setiap titik pada graf tersebut derajatnya berbeda. Gagasan pelabelan total *magic* sisi diperkenalkan kembali oleh Kotzig dan Rosa pada tahun 1970 dengan nama berbeda yaitu graf dengan bobot *magic*. Pada tahun 1996, Ringel dan Llado mendefinisikan kembali jenis pelabelan ini dengan nama pelabelan *magic* sisi. Setelah itu Wallis dkk. menemukan konsep baru untuk membedakan dengan pelabelan *magic* sebelumnya (Nurdin, dkk., 2018).

Menurut Wallis (2001), pelabelan pada suatu graf adalah pemetaan yang memasangkan unsur-unsur graf (titik/sisi) dengan bilangan bulat positif atau bilangan bulat non negatif. Jika domain dari fungsi (pemetaan) adalah titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik (*vertex labeling*), jika domainnya adalah sisi maka disebut pelabelan sisi (*edge labeling*), jika domainnya titik dan sisi maka disebut pelabelan total (*total labeling*). Ada beberapa jenis pelabelan, diantaranya pelabelan gracefull, pelabelan harmoni, pelabelan tak teratur, pelabelan ajaib, dan pelabelan anti ajaib. Wallis

jug menjelaskan bobot (*weight*) dari graf adalah jumlah dari semua label yang berhubungan dengan elemen graf tersebut. Bobot dari titik v dengan pelabelan λ adalah $w(v) = \lambda(v) + \sum_{uv \in E} \lambda(uv)$, dan bobot dari sisi uv adalah $w(uv) = \lambda(u) + \lambda(uv) + \lambda(v)$.

Pelabelan total tak teratur diperkenalkan oleh Martin Baća dkk.(2007). Mereka memperkenalkan dua jenis pelabelan total tak teratur, yaitu pelabelan total tak teratur titik dan pelabelan total tak teratur sisi. Pelabelan total tak teratur sisi sudah banyak diteliti oleh para ilmuwan sebelumnya yang tertera di buku Gallian (2011). Diantaranya Marzuki dkk. (2013) yang meneliti tentang nilai ketakteraturan total graf sikel dan graf *path*. Indriati dkk. (2015) yang meneliti tentang nilai ketakteraturan sisi total graf web dan graf-graf terkait. Ivančo dan Jendroľ (2006) yang meneliti tentang nilai ketakteraturan sisi total graf pohon. Nurdin, Baskoro, M, & Gaos. (2010) yang meneliti tentang nilai ketakteraturan titik total graf pohon. Rosyida, Widodo, & Indriati (2018) yang meneliti tentang nilai ketakteraturan graf *caterpillar* dengan dua titik pendar pada setiap titik internal.

Berdasarkan definisi bobot sisi, Baća dkk. mendefinisikan suatu jenis pelabelan yang disebut pelabelan- k total tak teratur sisi dengan domain himpunan titik dan sisi sebagai berikut: Suatu pelabelan $\lambda: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ dikatakan pelabelan- k total tak teratur sisi jika setiap dua sisi $e = u_1v_1$ dan $f = u_2v_2$ yang berbeda di G memenuhi $w(e) \neq w(f)$, dengan $w(e) = \lambda(u_1) + \lambda(e) + \lambda(v_1)$ dan $w(f) = \lambda(u_2) + \lambda(f) + \lambda(v_2)$.

Nilai ketakteraturan sisi total (*total edge irregularity strength*) graf G yang dinotasikan dengan $\text{tes}(G)$ adalah minimum label terbesar yang digunakan untuk melabeli titik dan sisi graf G dengan pelabelan total tak teratur sisi (Baca, 2007).

Teorema 1

Misalkan $G = (V(G), E(G))$ graf dengan himpunan titik V dan himpunan tak kosong E , maka

$$\left\lceil \frac{|E(G)|+2}{3} \right\rceil \leq \text{tes}(G) \leq |E(G)| \dots \dots (1)$$

(Baca, Jendrol, Miller, & Ryan, 2007)

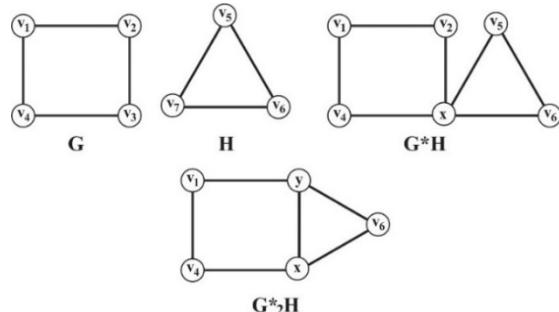
Seiring perkembangan zaman, kajian terhadap pelabelan mengalami perkembangan yang pesat. Salah satu perkembangan dari pelabelan adalah pelabelan total tak teratur total yang diperkenalkan oleh Marzuki, Salman dan

Miller dalam makalahnya yang berjudul *On Total Irregularity Strength on Cycles and Paths*.

Operasi amalgamasi titik dari pasangan titik graf (G, u) bersama (H, v) adalah graf yang diperoleh dengan menggabungkan titik u dan v menjadi satu titik. Sedangkan operasi amalgamasi sisi atau *edge* apabila diambil dua titik yang saling adjacent dari masing-masing graf. Notasi yang digunakan untuk menyatakan operasi amalgamasi adalah “*” untuk amalgamasi titik karena hanya diambil satu titik dari masing-masing graf sedangkan “*_2” untuk amalgamasi sisi karena diambil dua titik dari masing-masing graf (Khan, Poshni, & Gross, 2010).

Selanjutnya, diberikan graf G dan H sebagaimana pada Gambar 1., jika dilakukan amalgamasi dari simpul v_3 dan v_7 , maka operasi amalgamasi dinotasikan dengan

$(G, v_3) * (H, v_7) = (R, x)$,
dengan R adalah graf baru yang terbentuk dan $x \in V(R)$ yang diperoleh dari hasil amalgamasi titik.



Gambar 1. Operasi amalgamasi titik $G * H$ dan operasi amalgamasi sisi $G *_2 H$

Menurut Arockiamary (2016), graf dovetail D_n adalah graf $P_n + K_1, n \geq 2$. Graf dovetail memiliki $(n + 1)$ titik dan $(2n - 1)$ sisi.



Gambar 3. Graf D_2

Pada artikel ini akan dibahas pelabelan total tak teratur sisi, khususnya menentukan nilai ketakteraturan sisi total dari graf amalgamasi subdivisi graf dovetail dengan titik pendan dan graf sikel $(SD_n^n, x) * (C_{3n-3}, z)$.

METODE

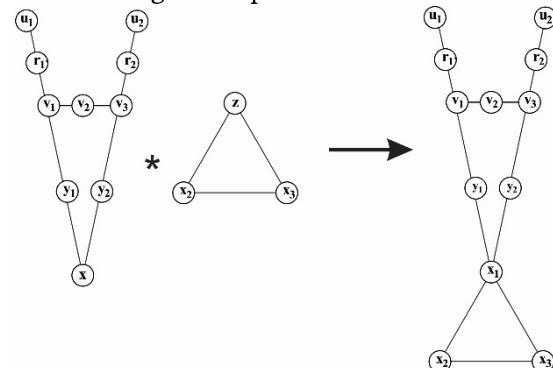
Metode yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah studi literatur, dengan cara mengumpulkan referensi yang dapat mendukung pembahasan.

Oleh karena itu, untuk mencapai tujuan penulisan, diambil langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menentukan batas bawah berdasarkan teorema :
Untuk sebarang graf $G = (V(G), E(G))$, yaitu sebagai berikut:
$$\left\lceil \frac{|E(G)|+2}{3} \right\rceil \leq \text{tes}(G) \leq |E(G)|.$$
2. Memeriksa batas atas dengan mengonstruksi pelabelan total tak teratur sisi $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ dengan $k = \text{batas bawah pada 1}$.
- 2.a. Simulasi pelabelan total dimulai dari graf yang sederhana sampai diperoleh pola pelabelan yang tetap.
- 2.b. Menentukan batas tes untuk setiap simulasi pelabelan
3. Nilai eksak tes diperoleh jika $k \leq \text{tes}(G) \leq k$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Graf amalgamasi subdivisi graf dovetail dengan titik pendan SD_n^n dan graf sikel C_{3n-3} , disimbolkan $(SD_n^n, x) * (C_{3n-3}, z)$, $n \geq 2$. Graf amalgamasi graf subdivisi graf dovetail dengan titik pendan SD_n^n dan graf sikel C_{3n-3} mempunyai $8n - 4$ titik dan $9n - 5$ sisi. Lebih lanjut, berikut ini diberikan teorema mengenai nilai ketakteraturan sisi total dari subdivisi graf dovetail dengan titik pendan.



Gambar 4. Graf $(SD_n^n, x) * (C_{3n-3}, z)$

Teorema 3.1 Jika $(SD_n^n, x) * (C_{3n-3}, z), n \geq 2$ adalah graf amalgamasi subdivisi graf dovetail dengan titik pendan dan graf sikel, maka $\text{tes}((SD_n^n, x) * (C_{3n-3}, z)) = \left\lceil \frac{9n-3}{3} \right\rceil$.

Bukti. Berdasarkan batas bawah (1), diperoleh batas bawah tes $((SD_n^n, x) * (C_{3n-3}, z)) \geq \lceil \frac{|E(CSD_n^n)|+2}{3} \rceil = \lceil \frac{9n-3}{3} \rceil$ untuk $n \geq 2$.

Akan dibuktikan u_i ($i = 1, 2, \dots, n$) titik-titik pendar yang terkait pada setiap titik di P_n , v_i ($i = 1, 3, 5, \dots, 2n-1$) titik-titik pada P_n , x_1 titik hasil amalgamasi dari graf $(SD_n^n, x) * (C_{3n-3}, z)$, r_i ($i = 1, 2, \dots, n$) titik-titik subdivisi pada sisi $u_i v_j$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n, j = 1, 3, 5, \dots, 2n-1$), v_j ($j = 2, \dots, 2n-2$) titik-titik subdivisi pada sisi $v_i v_{i+2}$ ($i = 1, 3, 5, \dots, n$), y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) titik-titik subdivisi pada sisi $v_i x_1$ ($i = 1, 3, 5, \dots, n$) dan x_i ($i = 2, \dots, 3n-3$) titik-titik pada graf sikel C_{3n-3} pada graf $(SD_n^n, x) * (C_{3n-3}, z)$.

Diperoleh batas atas tes $((SD_n^n, x) * (C_{3n-3}, z)) \geq \lceil \frac{|E(D_n^n)|+2}{3} \rceil = \lceil \frac{9n-3}{3} \rceil$ dengan mengonstruksi pelabelan- k total tak teratur sisi $f : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ dengan $k = \lceil \frac{9n-3}{3} \rceil$ sebagai berikut:

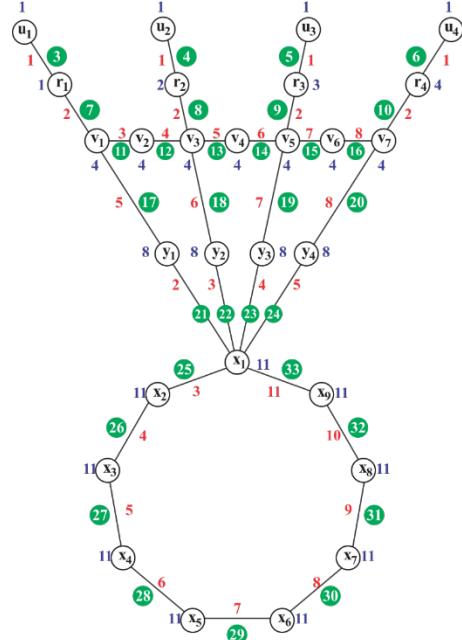
$$\begin{aligned} f(u_i) &= 1, \forall i = 1, 2, \dots, n \\ f(r_i) &= i, \forall i = 1, 2, \dots, n \\ f(v_i) &= n, \text{ untuk } n \geq 2, n \text{ menyatakan banyak titik di } P_n, \forall i = 1, 2, \dots, 2n-1 \\ f(y_i) &= 2n, \text{ untuk } n \geq 2, \forall i = 1, 2, \dots, n \\ f(x_i) &= \lceil \frac{9n-3}{3} \rceil, \text{ untuk } n \geq 2, \forall i = 1, 2, \dots, n \\ f(u_i r_i) &= 1, \forall i = 1, 2, \dots, n \\ f(r_i v_{2i-1}) &= 2, i = 1, 2, 3, \dots, n \\ f(v_1 v_2) &= 3 \\ f(v_i v_{i+1}) &= f(v_{i-1} v_i) + 1, i = 2, 3, \dots, n-1 \\ f(v_1 y_1) &= n+1, \text{ untuk } n \geq 2 \\ f(v_{2i-1} y_i) &= f(v_{2i-3} y_{i-1}) + 1, i = 2, 3, 4, \dots, n \\ f(y_1 x_1) &= 2 \\ f(y_i x_1) &= f(y_{i-1} x_1) + 1, i = 2, 3, \dots, n \\ f(x_1 x_2) &= 3 \\ f(x_i x_{i+1}) &= f(x_{i-1} x_i) + 1, i = 2, 3, \dots, 3n-4 \\ f(x_1 x_{3n-3}) &= \lceil \frac{9n-3}{3} \rceil, \text{ untuk } n \geq 2 \end{aligned}$$

Karena label titik dan sisi yang diperoleh kurang dari sama dengan $k = \lceil \frac{9n-3}{3} \rceil$, maka pelabelan f adalah pelabelan- k total.

Kemudian ditunjukkan setiap sisi graf $(SD_n^n, x) * (C_{3n-3}, z)$ mempunyai bobot yang berbeda sebagai berikut :

$$\begin{aligned} w(u_i r_i) &= i+2, \forall i = 1, 2, \dots, n \\ w(r_i v_{2i-1}) &= i+2+n, \text{ untuk } n \geq 2, i = 1, 2, 3, \dots, n \\ w(v_i v_{i+1}) &= i+2+2n, \text{ untuk } n \geq 2, i = 1, 2, 3, \dots, n \\ w(v_{2i-1} y_i) &= i+4n, \text{ untuk } n \geq 2, i = 1, 2, 3, \dots, n \\ w(y_i x_1) &= i+5n, \text{ untuk } n \geq 2, i = 1, 2, 3, \dots, n \\ w(x_i x_{i+1}) &= i+6n, \text{ untuk } n \geq 2, i = 1, 2, 3, \dots, n \end{aligned}$$

Oleh karena f merupakan pelabelan- k total dan untuk setiap dua sisi berbeda, bobot sisinya juga berbeda, artinya f merupakan pelabelan- k total tak teratur sisi, dengan label terbesarnya adalah $\lceil \frac{9n-3}{3} \rceil$. Jadi, terbukti bahwa untuk $n \geq 2$, tes $((SD_n^n, x) * (C_{3n-3}, z)) = \lceil \frac{9n-3}{3} \rceil$. Berikut disajikan contoh pelabelan-11 total tak teratur sisi dari graf $(SD_4^4, x) * (C_{3n-3}, z)$ pada Gambar 5.



- Baca, M., Jendrol, S., Miller, M., & Ryan, J. (2007). On Irregular Total Labellings. *Discrete Mathematics* 307, 1378-1388
- Bondy, J. A., & Murty, U. S. (1976). *Graph Theory with Applications*. Ontario: Departement of Combinatorics and Optimization, University of Waterloo
- Budayasa, I. K. (2007). *Teori Graf dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press
- Chartrand, G. (1986). *Introductory Graph Theory*. New York: Dover Publications Inc
- Chartrand, G., & Lesniak, L. (1996). *Graph and Digraph Third Edition*. Florida: Chapman and Hall/CRC
- Chartrand, G., & Oellermann, O. R. (1993). *Applied and Algorithmic Graph Theory*. New York: McGraw-Hill Inc
- Gallian, J. A. (2011). *A Dynamic Survey of Graph Labeling*. Minnesota: Department of Mathematics and Statistics, University of Minnesota Duluth
- Harary, F. (1994). *Graph Theory*. Michigan: Addison-Wesley Publishing Company
- Indriati, D., dodo, W., jayanti, I. E., Sugeng, K. A., & Baća, M. (2015). On Total Edge Irregularity Strength of Generalized Web Graphs and Related Graphs. *Mathematics in Computer Science*
- Ivančo, J., & Jendroľ, S. (2006). Total edge irregularity strength of trees. *Discussiones Math. Graph Theory*(26), 449-456
- Johnsonbaugh, R. (2001). *Discrete Mathematics. Fifth edition*. New Jersey: Prentice Hall
- Khan, I. F., Poshni, M. I., & Gross, J. L. (2010). Genus distribution of graph amalgamations: Pasting when one root has arbitrary degree. *ARS MATHEMATICA CONTEMPORANEA* 3, 121-138
- Marzuki, C. C., Salman, A. N., & Miller, M. (2013). On The Total Irregularity Strength of Cycles and Paths. *Far East J. Math. Sci.*, 1-21
- Nurdin, Baskoro, E. T., M, A. N., & Gaos, N. N. (2010). On the total vertex irregularity strength of trees. *Discrete Math* 310, 3043-3048
- Rosen, K. H. (2013). *Global Edition Discrete Mathematics and Its Applications Seventh Edition*. New York: McGraw-Hill
- Rosyida, I., Widodo, & Indriati, D. (2018). On total irregularity strength of caterpillar graphs with two leaves on each internal vertex. *J of Phys: Conference Series* 1008(1), 12046
- Vasudev, C. (2006). *Graph Theory with Applications*. New Delhi: New age international publisher
- Wallis, W. D. (2001). *Magic Graph*. Boston: Birkhauser