UJM 8 (2) 2019
UNNES Journal of Mathematics
http://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/ujm

ENENTUAN NILAI EIGEN SUATU MATRIKS DENGAN METODE PANGKAT *(POWER METHOD)*

Benedikta Putri Herviani✉**, Isnarto, Rahayu Budhiati Veronica**

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Indonesia
Gedung D7 Lt. 1, Kampus Sekaran Gunungpati, Semarang 50229

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima Mei 2019
Disetujui Juli 2020
Dipublikasikan Agustus 2020

Keywords:
Nilai Eigen Dominan, Nilai Eigen Tak Dominan, Metode Pangkat.

Abstrak

Penelitian ini membahas mengenai penentuan nilai eigen dominan dan tak dominan suatu matriks dengan metode pangkat (*power method*). Metode penelitian yang digunakan adalah dengan kajian pustaka. Pada penelitian ini disimpulkan: 1) Nilai eigen dominan suatu matriks A dengan metode pangkat langsung ditentukan dengan langkah-langkah berikut. (i) Menentukan sebarang vektor taknol x_0. (ii) Mencari vektor $y_k = Ax_k$ untuk k = 0, dan vektor x_{k+1} untuk k = 0 yaitu membagi y_k dengan $\lambda^{(k+1)}$, elemen y_k dengan nilai mutlak terbesar. (iii) Mencari vektor y_k dan x_{k+1} untuk k dari 1 sampai n hingga $\lambda^{(k)}$ mendekati $\lambda^{(k+1)}$. (2) Nilai eigen tak dominan suatu matriks A dengan metode pangkat invers ditentukan dengan mencari nilai eigen dominan A invers dimisalkan λ_{invers}, dan nilai eigen tak dominan A adalah 1 dibagi λ_{invers}. (3) Nilai eigen tak dominan suatu matriks A dengan metode pangkat tergeser ditentukan dengan mencari nilai eigen dominan A yang digeser dimisalkan $\lambda_{shifted}$ dengan nilai geseran s, dan nilai eigen tak dominan A adalah $\lambda_{shifted}$ ditambah s. (4) Nilai eigen dominan suatu matriks A dengan metode pangkat invers tergeser ditentukan dengan mencari nilai eigen dominan A yang diinvers dan digeser dimisalkan $\lambda_{shiftedinvers}$ dengan nilai s dan nilai eigen dominan A adalah 1 dibagi $\lambda_{shiftedinvers}$ ditambah s.

Abstract

This study discusses how to determine dominant eigenvalue and non-dominant eigenvalue of a matrix using power method. Research method that used is study literature. In this study concluded: (1) Dominant eigenvalue of any matrix A using power method can be determined by the following steps. (i) Set a non-zero vector x_0. (ii) Find vector $y_k = Ax_k$ for k = 0, and vector x_{k+1} for k = 0 with divided y_k by $\lambda^{(k+1)}$, $\lambda^{(k+1)}$ is y_k element that have largest absolute value. (iii) Find vector y_k and x_{k+1} for every k from 1 to n until $\lambda^{(k)} \approx \lambda^{(k+1)}$. (2) Non-dominant eigenvalue of any matrix A using inverse power method can be determined by find dominant eigenvalue of A^{-1} supposed λ_{invers}, then non-dominant eigenvalue of A is 1 divided λ_{invers}. (3) Non-dominant eigenvalue of any matrix A using shifted power method can be determined by find dominant eigenvalue of shifted A supposed $\lambda_{shifted}$ with shift value s, then non-dominant eigenvalue of A is $\lambda_{shifted}$ plus s. (4) Dominant eigenvalue of any matrix A using shifted inverse power method can be determined by find dominant eigenvalue of inverse shifted A supposed $\lambda_{shiftedinvers}$ with shift value s, then dominant eigenvalue of A is 1 divided $\lambda_{shiftedinvers}$ plus s.

How to cite:

Herviani, B.P, Isnarto, Veronica, B.V. (2019). Penentuan Nilai Eigen Suatu Matriks dengan Metode Pangkat (*Power Method*). *Unnes Journal of Mathematics* 8(2):69-78.

✉Alamat korespondensi:
E-mail: benediktaph@gmail.com

p-ISSN 2252-6943
e-ISSN 2460-5859

PENDAHULUAN

Permasalahan dalam kehidupan sehari-hari dapat dibawa ke dalam model matematika untuk memperoleh solusi. Permasalahan-permasalahan yang riil tersebut diubah ke dalam model matematika untuk diselesaikan dan kemudian dikembalikan ke bentuk riil semula dan diaplikasikan ke kehidupan sehari-hari.Beberapa permasalahan dapat diambil sebagai contoh adalah masalah nilai eigen.

Suatu skalar λ disebut nilai eigen atau nilai karakteristik (*characteristic value*) dari suatu matriks A jika terdapat suatu vektor taknol $\boldsymbol{x}$, sehingga $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. Vektor $\boldsymbol{x}$ disebut vektor eigen atau vektor karakteristik dari λ.

Menurut Leon (2001), nilai eigen adalah suatu hal yang wajar dalam kehidupan sehari-hari, dimana ada getaran di situ ada nilai eigen yaitu frekuensi alami dari getaran tersebut. Dalam fisika, nilai eigen tak dominan yaitu nilai eigen dengan nilai mutlak terkecil berhubungan dengan struktur melengkungnya suatu batang. Jika sebuah batang diberikan gaya pada salah satu ujungnya maka batang akan melengkung ketika beban mencapai nilai kritis. Nilai-nilai eigen berperan juga dalam penyelesaian sistem persamaan diferensial linear, seperti pada campuran beberapa cairan seperti air dan larutan garam dalam dua buah tangki yang dipompa dengan suatu kecepatan juga pada gerak harmonik suatu pegas.

Selain itu nilai eigen dominan yaitu nilai eigen dengan nilai mutlak terbesar berperan dalam memprediksi jumlah dan laju pertumbuhan suatu populasi. Untuk memprediksi jumlah dan laju pertumbuhan suatu populasi, dalam pendekatan matematika dapat menggunakan Matriks Leslie. Menurut Pratama et al (2013), jika nilai eigen dominan suatu matriks Leslie lebih dari 1 maka laju pertumbuhan populasi cenderung meningkat, jika nilai kurang dari 1 maka laju pertumbuhan populasi cenderung menurun, dan jika nilai sama dengan 1 maka laju pertumbuhan populasi cenderung tetap.

Untuk memperoleh nilai eigen ada beberapa metode yang dapat digunakan, diantaranya adalah menggunakan persamaan karakteristik dan metode pangkat. Dalam penggunaannya metode pangkat dirasa lebih efisien untuk mencari nilai eigen dari sebuah matriks dengan ordo yang besar.

Menurut Arif et al (2015), metode pangkat merupakan metode iterasi yang digunakan untuk mencari hampiran nilai eigen suatu matriks. Metode pangkat menghasilkan sebuah aproksimasi terhadap nilai eigen dengan nilai mutlak terbesar dan vektor eigen yang bersesuaian dan mendekati nilai eigen sebenarnya. Pada penelitian sebelumnya Chandra et al (2016) telah sedikit dibahas mengenai beberapa bentuk metode pangkat yaitu metode pangkat langsung, metode pangkat invers, metode pangkat yang tergeser, dan metode pangkat invers tergeser. Metode pangkat langsung dan metode pangkat invers tergeser dapat digunakan untuk mencari nilai eigen dominan, sedangkan metode pangkat invers dan metode pangkat yang tergeser dapat digunakan untuk mencari nilai eigen tak dominan.

Di bidang teknik mesin, konsep metode pangkat dapat diterapkan pada beberapa masalah praktis. Menurut Panza (2018), beberapa masalah yang dapat dikaitkan dengan konsep metode pangkat adalah dinamika translasi dan rotasi, keseimbangan energi termal, kontinuitas fluida, sistem kendali umpan balik (*feedback control*).

Penelitian ini, terbatas pada pencarian nilai eigen dominan yaitu nilai eigen yang memiliki nilai mutlak paling besar dan nilai eigen tak dominan yaitu nilai eigen yang memiliki nilai mutlak paling kecil. Metode yang digunakan untuk mencari nilai eigen tersebut adalah metode pangkat.

Adapun tujuan penelitian ini adalah mengetahui cara menentukan nilai eigen dominan dengan metode pangkat langsung dan metode pangkat invers tergeser, juga mengetahui cara menentukan nilai eigen tak dominan dengan metode pangkat invers dan metode pangkat tergeser.

Definisi 1

Jika A adalah matriks $n \times n$ maka vektor taknol $\boldsymbol{x}$ di $\mathbb{R}^n$ disebut vektor eigen dari A jika $A\boldsymbol{x}$ adalah kelipatan skalar dari $\boldsymbol{x}$ yakni

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

untuk suatu skalar λ. Skalar λ disebut nilai eigen dari A dan $\boldsymbol{x}$ disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan λ. (Anton, 2000: 338)

Definisi 2

Nilai eigen dari sebuah matriks A dinamakan nilai eigen dominan (*dominant eigenvalue*) A jika nilai mutlaknya lebih besar dari nilai-nilai mutlak dari nilai-nilai eigen yang selebihnya. Sedangkan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen dominan dinamakan vektor eigen dominan (*dominant eigen vector*) A. (Anton, 1987: 372)

Definisi 3
Nilai eigen dari sebuah matriks A dinamakan nilai eigen tak dominan dari A jika nilai mutlaknya lebih kecil dari nilai-nilai mutlak nilai-nilai eigen yang selebihnya. (Andriani, 2011:9).

Definisi 4
Matriks Persegi A dinamakan dapat didiagonalisasi (*diagonalizable*) jika terdapat matriks P yang dapat dibalik sehingga $P^{-1}AP$ diagonal; P dikatakan mendiagonalisasi A. (Anton, 2000:347).

Misalkan A adalah matriks $n \times n$ yang dapat didiagonalisasi dengan nilai eigen dominan. Jika x_0 adalah sebarang vektor taknol dalam R^n maka vektor

$$A^p x_0$$

adalah aproksimasi yang baik terhadap vektor eigen dominan A bila eksponen tersebut besar. Hal ini yang mendasari adanya metode pangkat untuk mencari nilai eigen dominan.

METODE

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi pustaka. Langkah awal adalah dengan mengidentifikasi masalah dengan mengumpulkan sumber-sumber berupa jurnal kemudian mempelajari permasalahannya, selanjutnya merumuskan masalah untuk memperjelas masalah yang diperoleh saat mempelajari materi dari sumber-seumber yang didapat, kemudian melakukan kajian pustaka dengan mengumpulkan sumber-sumber berupa buku dan jurnal untuk memecahkan masalah, dan melakukan penarikan kesimpulan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Metode Pangkat Langsung

Teorema 1
Andaikan A matriks $n \times n$ mempunyai n nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ yang berlainan yang diurutkan menurun dalam nilai mutlaknya yaitu

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

Bila sebarang x_0 dipilih maka barisan $\left\{\boldsymbol{x}_k = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right)^T\right\}$ dan $\{c_k\}$ yang dibentuk secara rekursif dengan

$$\boldsymbol{y}_k = A\boldsymbol{x}_k$$

dan

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \frac{1}{c_{k+1}}\boldsymbol{y}_k$$

dimana

$$c_{k+1} = y_j^{(k)} = \max_{1\leq i\leq n}\left\{\left|y_i^{(k)}\right|\right\}$$

akan konvergen berturut-turut ke vektor eigen dominan $\boldsymbol{v}_1$ dan nilai eigen dominan λ_1 yaitu

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \boldsymbol{v}_1 \text{ dan } \lim_{k\to\infty} c_k = \lambda_1$$

(Mathews et al, 2004:601)

Bukti:

Karena A mempunyai n nilai eigen berlainan, terdapat n vektor eigen yang bersesuaian $\boldsymbol{v}_j$ untuk $j = 1,2,\dots,n$ yang membentuk sebuah basis R^n. Sebarang vektor $\boldsymbol{x}_0 = (x_{(j)})$ untuk $j = 1,2,\dots,n$ dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\boldsymbol{x}_0 = b_1\boldsymbol{v}_1 + b_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + b_n\boldsymbol{v}_n$$

Asumsikan $\boldsymbol{x}_0$ dipilih dengan $b_1 \neq 0$. Koordinat $\boldsymbol{x}_0$ terhadap sebuah basis $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ adalah

$$[x_0]_S = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Bagi koordinat $\boldsymbol{x}_0$ dengan elemen $\boldsymbol{x}_0$ yang memiliki nilai mutlak terbesar, misal $x_{(i)}$ untuk suatu $i = 1,2,\dots,n$. Jika koordinat $\boldsymbol{x}_0$ dibagi $x_{(i)}$ maka akan diperoleh

$$\boldsymbol{x}_0 = \frac{b_1}{x_{(i)}}\boldsymbol{v}_1 + \frac{b_2}{x_{(i)}}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \frac{b_n}{x_{(i)}}\boldsymbol{v}_n$$

sehingga $\max_{1\leq j\leq n}\left\{\left|x_{(j)}\right|\right\} = 1$. Karena $\boldsymbol{v}_j$ untuk $j = 1,2,\dots,n$ adalah vektor eigen dari A, perkalian $A\boldsymbol{x}_0$ diikuti dengan normalisasi menghasilkan

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_0 &= A\boldsymbol{x}_0 \\
&= A(b_1\boldsymbol{v}_1 + b_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + b_n\boldsymbol{v}_n) \\
&= b_1A\boldsymbol{v}_1 + b_2A\boldsymbol{v}_2 + \cdots + b_nA\boldsymbol{v}_n \\
&= b_1\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + b_2\lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + b_n\lambda_n\boldsymbol{v}_n \\
&= \lambda_1\left(b_1\boldsymbol{v}_1 + b_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + b_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)\boldsymbol{v}_n\right)
\end{aligned}$$

Karena $\boldsymbol{x}$ dibentuk secara rekursif maka

$$\boldsymbol{x}_1 = \frac{\lambda_1}{c_1}\left(b_1\boldsymbol{v}_1 + b_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + b_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)\boldsymbol{v}_n\right)$$

Kemudian dilanjutkan

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{y}_1 \\
&= A\boldsymbol{x}_1 \\
&= A\frac{\lambda_1}{c_1}\left(b_1\boldsymbol{v}_1 + b_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + b_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)\boldsymbol{v}_n\right) \\
&= \frac{\lambda_1}{c_1}\left(b_1A\boldsymbol{v}_1 + b_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)A\boldsymbol{v}_2 + \cdots + b_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)A\boldsymbol{v}_n\right) \\
&= \frac{\lambda_1}{c_1}\left(b_1\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + b_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + b_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)\lambda_n\boldsymbol{v}_n\right) \\
&= \frac{{\lambda_1}^2}{c_1}\left(b_1\boldsymbol{v}_1 + b_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + b_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^2\boldsymbol{v}_n\right)
\end{aligned}$$

sehingga

$$\boldsymbol{x}_2 = \frac{{\lambda_1}^2}{c_1c_2}\left(b_1\boldsymbol{v}_1 + b_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + b_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^2\boldsymbol{v}_n\right)$$

Setelah k iterasi diperoleh

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_{k-1} &= A\boldsymbol{x}_{k-1}\\ &= A\frac{{\lambda_1}^{k-1}}{c_1c_2\ldots c_{k-1}}\left(b_1\boldsymbol{v}_1 + b_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k-1}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + b_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{k-1}\boldsymbol{v}_n\right)\\ &= \frac{{\lambda_1}^{k-1}}{c_1c_2\ldots c_{k-1}}\left(b_1A\boldsymbol{v}_1 + b_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k-1}A\boldsymbol{v}_2 + \cdots + b_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{k-1}A\boldsymbol{v}_n\right)\\ &= \frac{{\lambda_1}^{k-1}}{c_1c_2\ldots c_{k-1}}\left(b_1\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + b_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k-1}\lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + b_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{k-1}\lambda_n\boldsymbol{v}_n\right)\\ &= \frac{{\lambda_1}^{k}}{c_1c_2\ldots c_{k-1}}\left(b_1\boldsymbol{v}_1 + b_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + b_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{k}\boldsymbol{v}_n\right)\end{aligned}$$

dan

$$\boldsymbol{x}_k = \frac{{\lambda_1}^{k}}{c_1c_2\ldots c_{k}}\left(b_1\boldsymbol{v}_1 + b_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + b_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{k}\boldsymbol{v}_n\right) \quad \ldots (1)$$

Karena $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$ maka $\left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right| < 1$ untuk setiap $j = 2, \ldots, n$ sehingga diperoleh

$$\lim_{k\to\infty} b_j\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k\boldsymbol{v}_j = 0 \quad \ldots (2)$$

Substitusi (2) ke (1), diperoleh

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k = \lim_{k\to\infty}\frac{b_1{\lambda_1}^k}{c_1c_2\ldots c_k}\boldsymbol{v}_1$$

Karena vektor $\boldsymbol{x}_k$ dan $\boldsymbol{v}_1$ ternormalisasi dan komponen terbesarnya adalah 1, maka limit vektor di ruas kiri juga ternormalisasi dengan komponen terbesarnya adalah 1. Berakibat limit skalar kelipatan dari $\boldsymbol{v}_1$ pada ruas kanan ada dan

$$\lim_{k\to\infty}\frac{b_1{\lambda_1}^k}{c_1c_2\ldots c_k} = 1$$

sehingga

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{v}_1$$

Kemudian dengan mengganti k dengan $k-1$ pada limit skalar kelipatan dari $\boldsymbol{v}_1$, diperoleh

$$\lim_{k\to\infty}\frac{b_1{\lambda_1}^{k-1}}{c_1c_2\ldots c_{k-1}} = 1$$

dan

$$\lim_{k\to\infty}\frac{b_1{\lambda_1}^k}{c_1c_2\ldots c_k}$$

dibagi dengan

$$\lim_{k\to\infty}\frac{b_1{\lambda_1}^{k-1}}{c_1c_2\ldots c_{k-1}}$$

diperoleh

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{b_1{\lambda_1}^k}{c_1c_2\ldots c_k}}{\frac{b_1{\lambda_1}^{k-1}}{c_1c_2\ldots c_{k-1}}} = \frac{1}{1} \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}\frac{\lambda_1}{c_k} = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}\lambda_1 = \lim_{k\to\infty}c_k$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lim_{k\to\infty}c_k$$

$$\Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}c_k = \lambda_1$$

Berdasarkan teorema (1), dapat dituliskan algoritma pencarian nilai eigen dominan suatu matriks A berordo $n \times n$ dengan metode pangkat langsung sebagai berikut:

1. Tentukan sebarang vektor taknol $\boldsymbol{x}_0$ berukuran $n \times 1$
2. Carilah $\boldsymbol{y}_k$ yang memenuhi $\boldsymbol{y}_k = A\boldsymbol{x}_k$ untuk $k = 0$.
3. Kemudian bagi $\boldsymbol{y}_k$ dengan elemen $\boldsymbol{y}_k$ yang memiliki nilai mutlak terbesar yaitu $\lambda^{(k+1)}$ sehingga diperoleh $\boldsymbol{x}_{k+1} = \frac{1}{\lambda^{(k+1)}}\boldsymbol{y}_k$.
4. Ulangi langkah 2 dan 3 untuk $k = 1,2,\ldots$ sampai diperoleh nilai $\lambda^{(k)} \approx \lambda^{(k+1)}$. Nilai $\lambda^{(k+1)}$ yang diperoleh merupakan nilai eigen dominan dari matriks A.

Contoh 1

Anggaplah suatu populasi hewan dapat dibagi menjadi dua kelas umur dan mempunyai matriks Leslie

$$L = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Hitung nilai eigen dominan dari L dan vektor eigen yang bersesuaian.

(Anton, 1987:153)

Penyelesaian:

Tentukan $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

Kemudian dilakukan iterasi dengan metode pangkat untuk mendapatkan nilai eigen dominan dari matriks L.

$$\boldsymbol{y}_0 = L\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

diperoleh $\lambda^{(1)} = \frac{10}{3} = 3{,}333$ sehingga $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{10} \end{bmatrix}$,

$$\boldsymbol{y}_1 = L\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

diperoleh $\lambda^{(2)} = \frac{6}{5} = 1{,}2$ sehingga $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{5}{12} \end{bmatrix}$,

$$\boldsymbol{y}_2 = L\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{5}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{23}{18} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

diperoleh $\lambda^{(3)} = \frac{23}{18} = 1{,}278$ sehingga $\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{9}{23} \end{bmatrix}$,

$$\boldsymbol{y}_3 = L\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{9}{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{29}{23} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

diperoleh $\lambda^{(4)} = \frac{29}{23} = 1{,}261$ sehingga $\boldsymbol{x}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{23}{58} \end{bmatrix}$,

$$\boldsymbol{y}_4 = L\boldsymbol{x}_4 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{23}{58} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{110}{87} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

diperoleh $\lambda^{(5)} = \frac{110}{87} = 1{,}264$ sehingga $\boldsymbol{x}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{87}{220} \end{bmatrix}$,

$$\boldsymbol{y}_5 = L\boldsymbol{x}_5 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{87}{220} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{139}{110} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

diperoleh $\lambda^{(6)} = \frac{139}{110} = 1{,}26364$ sehingga $x_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{55}{139} \end{bmatrix}$,

$$\boldsymbol{y}_6 = L\boldsymbol{x}_6 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{55}{139} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{527}{417} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

diperoleh $\lambda^{(7)} = \frac{527}{417} = 1{,}26379$ sehingga $\boldsymbol{x}_7 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{417}{1054} \end{bmatrix}$,

$$\boldsymbol{y}_7 = L\boldsymbol{x}_7 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{417}{1054} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{666}{527} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

diperoleh $\lambda^{(8)} = \frac{666}{527} = 1{,}26376$ sehingga $\boldsymbol{x}_8 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{527}{1332} \end{bmatrix}$.

Hingga iterasi ke 8 nilai $\lambda \approx 1{,}26376$. Sehingga aproksimasi nilai eigen dominan dari L adalah $\lambda \approx 1{,}26376$ dan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ adalah

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{527}{1332} \end{bmatrix}.$$

Metode Pangkat Invers

Teorema 2 (Nilai Eigen Invers)

Misalkan λ dan $\boldsymbol{v}$ adalah pasangan nilai eigen dan vektor eigen matriks persegi A. Bila $\lambda \neq 0$ maka $\frac{1}{\lambda}$ dan $\boldsymbol{v}$ merupakan pasangan nilai eigen dan vektor eigen matriks persegi A^{-1}.

(Mathews et al, 2004:604)

Bukti:

Karena λ dan $\boldsymbol{v}$ adalah pasangan nilai eigen dan vektor eigen matriks persegi A, berdasarkan definisi nilai eigen

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}.$$

Karena $\lambda \neq 0$ diperoleh $\frac{1}{\lambda} \neq 0$.

Akan dibuktikan $A^{-1}\boldsymbol{v} = \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{v}$

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} &\Leftrightarrow A^{-1}A\boldsymbol{v} = A^{-1}\lambda\boldsymbol{v} \\ &\Leftrightarrow I\boldsymbol{v} = A^{-1}\lambda\boldsymbol{v} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}I\boldsymbol{v} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}\lambda\boldsymbol{v} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{v} = \frac{1}{\lambda}\lambda A^{-1}\boldsymbol{v} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{v} = A^{-1}\boldsymbol{v} \\ &\Leftrightarrow A^{-1}\boldsymbol{v} = \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{v} \end{aligned}$$

Jadi $\frac{1}{\lambda}$ dan $\boldsymbol{v}$ adalah nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian dengan matriks A^{-1}.

Misalkan A adalah matriks $n \times n$ yang dapat didiagonalisasi dan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai-nilai eigen yang bersesuaian dengan A dan anggap

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots > |\lambda_n|$$

sehingga

$$\frac{1}{|\lambda_1|} \leq \frac{1}{|\lambda_2|} \leq \cdots < \frac{1}{|\lambda_n|} \Leftrightarrow \frac{|1|}{|\lambda_1|} \leq \frac{|1|}{|\lambda_2|} \leq \cdots < \frac{|1|}{|\lambda_n|}$$
$$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{\lambda_1}\right| \leq \left|\frac{1}{\lambda_2}\right| \leq \cdots < \left|\frac{1}{\lambda_n}\right|.$$

Karena nilai mutlak $\frac{1}{\lambda_n}$ paling besar maka $\frac{1}{\lambda_n}$ adalah nilai eigen dominan dari matriks A^{-1}. Lebih lanjut misalkan λ_{invers} adalah nilai eigen dominan dari matriks A^{-1} diperoleh

$$\lambda_{invers} = \frac{1}{\lambda_n} \Leftrightarrow \lambda_n = \frac{1}{\lambda_{invers}}$$

dimana λ_n adalah nilai eigen tak dominan dari A.

Berdasarkan teorema (2), dapat dituliskan algoritma pencarian nilai eigen tak dominan suatu matriks A berordo $n \times n$ dengan metode pangkat invers sebagai berikut:

1. Tentukan sebarang vektor taknol $\boldsymbol{x}_0$ berukuran $n \times 1$
2. Carilah matriks A^{-1}
3. Carilah $\boldsymbol{y}_k$ yang memenuhi $\boldsymbol{y}_k = A^{-1}\boldsymbol{x}_k$ untuk $k = 0$
4. Kemudian bagi $\boldsymbol{y}_k$ dengan elemen $\boldsymbol{y}_k$ yang memiliki nilai mutlak terbesar yaitu $\lambda^{(k+1)}$ sehingga diperoleh $\boldsymbol{x}_{k+1} = \frac{1}{\lambda^{(k+1)}}\boldsymbol{y}_k$.
5. Ulangi langkah 2 dan 3 untuk $k = 1,2,\dots$ sampai diperoleh nilai $\lambda^{(k)} \approx \lambda^{(k+1)}$. Nilai $\lambda^{(k+1)}$ yang diperoleh merupakan nilai eigen dominan dari matriks A^{-1}.

6. Nilai eigen matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen dominan dari matriks A^{-1} adalah $\lambda = \frac{1}{\lambda_{invers}}$ dimana λ merupakan nilai eigen tak dominan matriks A.

Contoh 2

Carilah nilai eigen tak dominan dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Tentukan $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} Adj\, A$$
$$= \frac{1}{6.3 - 2.2} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{18 - 4} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,21 & -0,14 \\ -0,14 & 0,43 \end{bmatrix}$$

Kemudian dilakukan iterasi dengan metode pangkat untuk mendapatkan nilai eigen dominan dari matriks A^{-1}

$$\boldsymbol{y}_0 = A^{-1}\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 0,21 & -0,14 \\ -0,14 & 0,43 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,07 \\ 0,29 \end{bmatrix}$$

diperoleh $\lambda^{(1)} = 0,29$ sehingga $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 0,24 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$$\boldsymbol{y}_1 = A^{-1}\boldsymbol{x}_1$$
$$= \begin{bmatrix} 0,21 & -0,14 \\ -0,14 & 0,43 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,24 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -0,09 \\ 0,4 \end{bmatrix}$$

diperoleh $\lambda^{(2)} = 0,4$ sehingga $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} -0,225 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$$\boldsymbol{y}_2 = A^{-1}\boldsymbol{x}_2$$
$$= \begin{bmatrix} 0,21 & -0,14 \\ -0,14 & 0,43 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,225 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -0,18 \\ 0,46 \end{bmatrix}$$

diperoleh $\lambda^{(3)} = 0,46$ sehingga $\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} -0,39 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$$\boldsymbol{y}_3 = A^{-1}\boldsymbol{x}_3$$
$$= \begin{bmatrix} 0,21 & -0,14 \\ -0,14 & 0,43 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,39 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -0,22 \\ 0,48 \end{bmatrix}$$

diperoleh $\lambda^{(4)} = 0,48$ sehingga $\boldsymbol{x}_4 = \begin{bmatrix} -0,46 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$$\boldsymbol{y}_4 = A^{-1}\boldsymbol{x}_4$$
$$= \begin{bmatrix} 0,21 & -0,14 \\ -0,14 & 0,43 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,46 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -0,23 \\ 0,49 \end{bmatrix}$$

diperoleh $\lambda^{(5)} = 0,49$ sehingga $\boldsymbol{x}_5 = \begin{bmatrix} -0,47 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$$\boldsymbol{y}_5 = A^{-1}\boldsymbol{x}_5$$
$$= \begin{bmatrix} 0,21 & -0,14 \\ -0,14 & 0,43 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,47 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -0,24 \\ 0,496 \end{bmatrix}$$

diperoleh $\lambda^{(6)} = 0,496$ sehingga $\boldsymbol{x}_6 = \begin{bmatrix} -0,48 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Hingga iterasi ke 6 nilai $\lambda_{invers} \approx 0,5$. Sehingga aproksimasi nilai eigen tak dominan dari A adalah $\lambda = \frac{1}{\lambda_{invers}} \approx \frac{1}{0,5} = 2$ dan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ adalah

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -0,48 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Metode Pangkat Tergeser

Teorema 3 (Nilai Eigen yang Digeser)

Misalkan λ dan $\boldsymbol{v}$ adalah pasangan nilai eigen dan vektor eigen matriks persegi A. Bila α konstanta sembarang maka $\lambda - \alpha$ dan $\boldsymbol{v}$ merupakan pasangan nilai eigen dan vektor eigen matriks persegi $A - \alpha I$.

(Mathews et al, 2004: 604)

Bukti:

Karena λ dan $\boldsymbol{v}$ adalah pasangan nilai eigen dan vektor eigen matriks persegi *A*, berdasarkan definisi nilai eigen

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}.$$

Jika dipilih sembarang konstanta α maka akan dibuktikan $(A - \alpha I)\boldsymbol{v} = (\lambda - \alpha)\boldsymbol{v}$

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} \Leftrightarrow A\boldsymbol{v} - \alpha\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} - \alpha\boldsymbol{v}$$
$$\Leftrightarrow A\boldsymbol{v} - \alpha I\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} - \alpha\boldsymbol{v}$$
$$\Leftrightarrow (A - \alpha I)\boldsymbol{v} = (\lambda - \alpha)\boldsymbol{v}$$

Jadi $(\lambda - \alpha)$ dan $\boldsymbol{v}$ adalah nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian dengan matriks $(A - \alpha I)$.

Misalkan A adalah matriks $n \times n$ dan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai-nilai eigen dari A dan anggap

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots > |\lambda_n|$$

Jika semua nilai λ positif maka

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$$

kemudian dipilih suatu konstanta s dimana $s \approx \lambda_1$ dan $s < \lambda_2$ diperoleh

$$\lambda_1 - s > \lambda_2 - s > \cdots > \lambda_n - s$$
$$\Leftrightarrow |\lambda_1 - s| \leq |\lambda_2 - s| \leq \cdots < |\lambda_n - s|.$$

Selain itu, jika semua nilai λ negatif maka

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$$

kemudian dipilih suatu konstanta s dimana $s \approx \lambda_1$ dan $s < \lambda_2$ diperoleh

$$\lambda_1 - s < \lambda_2 - s < \cdots < \lambda_n - s$$
$$\Leftrightarrow |\lambda_1 - s| \leq |\lambda_2 - s| \leq \cdots < |\lambda_n - s|.$$

Karena nilai mutlak $\lambda_n - s$ paling besar maka $\lambda_n - s$ adalah nilai eigen dominan dari matriks $A - sI$. Lebih lanjut jika $\lambda_{shifted}$ adalah nilai eigen dominan dari matriks $A - sI$, diperoleh $\lambda_{shifted} = \lambda_n - s \Leftrightarrow \lambda_n = \lambda_{shifted} + s$ dimana λ_n adalah nilai eigen tak dominan dari A.

Untuk menentukan nilai s yang mendekati nilai eigen dominan dari A, digunakan teorema Gerschgorin.

Teorema 4 (Teorema Gerschgorin)

Misalkan $A = (a_{ij})$ matriks kompleks $n \times n$.

$$R_i = \sum_{j\neq i, j=1}^{n} |a_{ij}|$$

adalah jumlah nilai mutlak dari semua entri tak diagonal utama matriks A pada baris ke-i. Jika $D = (a_{ii}, R_i) \subseteq \mathbb{C}$ adalah daerah tertutup dengan pusat a_{ii} dan radius R_i, maka setiap nilai eigen dari A berada didalam beberapa daerah Gerschgorin $D = (a_{ii}, R_i)$.

(Jacob, 1990: 240)

Bukti:

Berdasarkan definisi nilai eigen jika λ dan $\boldsymbol{x}$ adalah nilai eigen dan vektor eigen dari A maka

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}.$$

Misalkan $\boldsymbol{x} = (x_j)$ untuk $j = 1,2,\dots,n$ dan x_i untuk suatu $i = 1,2,\dots,n$ adalah $\max_{1\leq j\leq n}\{|x_j|\}$, diperoleh komponen baris ke-i dari Ax

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \lambda x_i \Leftrightarrow \sum_{j\neq i, j=1}^{n} a_{ij}x_j + a_{ii}x_i = \lambda x_i$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j\neq i, j=1}^{n} a_{ij}x_j = \lambda x_i - a_{ii}x_i$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j\neq i, j=1}^{n} a_{ij}x_j = (\lambda - a_{ii})x_i$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j\neq i, j=1}^{n} a_{ij}\frac{x_j}{x_i} = \lambda - a_{ii}$$

$$\Leftrightarrow \lambda - a_{ii} = \sum_{j\neq i, j=1}^{n} a_{ij}\frac{x_j}{x_i}$$

Dengan menerapkan ketidaksamaan segitiga, berdasarkan Bartle et al (1994:38) diperoleh

$$|\lambda - a_{ii}|$$

$$= \left|\sum_{j\neq i, j=1}^{n} a_{ij}\frac{x_j}{x_i}\right| \leq \sum_{j\neq i, j=1}^{n} |a_{ij}|\left|\frac{x_j}{x_i}\right| \leq \sum_{j\neq i, j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$= R_i$$

Jadi $|\lambda - a_{ii}| \leq R_i$.

Berdasarkan teorema (3) dan (4), dapat dituliskan algoritma pencarian nilai eigen tak dominan suatu matriks A berordo $n \times n$ dengan metode pangkat tergeser sebagai berikut:

1. Tentukan sebarang vektor taknol $\boldsymbol{x}_0$ berukuran $n \times 1$
2. Menentukan nilai geseran (*shifted*) s dengan teorema Gerschgorin. Nilai s dipilih dari daerah nilai eigen dominan.
3. Carilah matriks A yang digeser yaitu $(A - sI)$
4. Carilah $\boldsymbol{y}_k$ yang memenuhi $\boldsymbol{y}_k = (A - sI)\boldsymbol{x}_k$ untuk $k = 0$.
5. Kemudian bagi $\boldsymbol{y}_k$ dengan elemen $\boldsymbol{y}_k$ yang memiliki nilai mutlak terbesar yaitu $\lambda^{(k+1)}$ sehingga diperoleh $\boldsymbol{x}_{k+1} = \frac{1}{\lambda^{(k+1)}}\boldsymbol{y}_k$
6. Ulangi langkah 2 dan 3 untuk $k = 1,2,\dots$ sampai diperoleh nilai $\lambda^{(k)} \approx \lambda^{(k+1)}$. Nilai $\lambda^{(k+1)}$ yang diperoleh merupakan nilai eigen dominan dari matriks $(A - sI)$.
7. Nilai eigen matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen dominan dari matriks$(A - sI)$adalah $\lambda = \lambda_{shifted} + s$, dimana λ merupakan nilai eigen tak dominan matriks A.

Contoh 3

Carilah nilai eigen tak dominan dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Tentukan $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Dengan teorema Gerschgorin diperoleh daerah nilai eigen sebagai berikut

$|\lambda - 6| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq \lambda - 6 \leq 2 \Leftrightarrow 4 \leq \lambda \leq 8$

$|\lambda - 3| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq \lambda - 3 \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq \lambda \leq 5$

Diketahui daerah nilai eigen semuanya positif, sehingga dapat dipilih nilai s dari daerah nilai eigen dominan yaitu $4 \leq \lambda \leq 8$.

Dipilih $s = 7$.

$$A - sI = A - 7I$$
$$= \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Kemudian dilakukan iterasi dengan metode pangkat untuk mendapatkan nilai eigen dominan dari matriks $A - sI$

$$\boldsymbol{y}_0 = (A - sI)\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Diperoleh $\lambda^{(1)} = -2$ sehingga $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{y}_1 = (A - sI)\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Diperoleh $\lambda^{(2)} = -3$ sehingga $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} -0{,}5 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{y}_2 = (A - sI)\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0{,}5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Diperoleh $\lambda^{(3)} = -5$ sehingga $\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} -0{,}5 \\ 1 \end{bmatrix}$

Hingga iterasi ke 3 diperoleh vektor $\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_2$, berakibat iterasi selanjutnya akan menghasilkan $\boldsymbol{y}_k$ yang sama sehingga nilai $\lambda_{shifted} = -5$. Jadi nilai eigen tak dominan dari A adalah $\lambda = \lambda_{shifted} + s = -5 + 7 = 2$ dan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ adalah

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -0,5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Metode Pangkat Invers Tergeser
Teorema 5 (Nilai Eigen Invers yang Digeser)
Misalkan λ dan $\boldsymbol{v}$ adalah pasangan nilai eigen dan vektor eigen matriks persegi A. Bila $\alpha \neq \lambda$, maka $\frac{1}{(\lambda-\alpha)}$ dan $\boldsymbol{v}$ merupakan pasangan nilai eigen dan vektor eigen matriks persegi $(A - \alpha I)^{-1}$.

(Mathews et al, 2004: 605)

Bukti:
Karena λ dan $\boldsymbol{v}$ adalah pasangan nilai eigen dan vektor eigen matriks persegi A maka berdasarkan definisi nilai eigen

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}.$$

Karena $\alpha \neq \lambda$ diperoleh $\lambda - \alpha \neq 0$ dan $\frac{1}{\lambda-\alpha} \neq 0$. Berdasarkan teorema nilai eigen yang digeser diperoleh $(A - \alpha I)\boldsymbol{v} = (\lambda - \alpha)\boldsymbol{v}$, kemudian

$$(A - \alpha I)\boldsymbol{v} = (\lambda - \alpha)\boldsymbol{v}$$
$$\Leftrightarrow (A - \alpha I)^{-1}(A - \alpha I)\boldsymbol{v} = (A - \alpha I)^{-1}(\lambda - \alpha)\boldsymbol{v}$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{Iv} = (A - \alpha I)^{-1}(\lambda - \alpha)\boldsymbol{v}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda - \alpha}\boldsymbol{Iv} = \frac{1}{\lambda - \alpha}(A - \alpha I)^{-1}(\lambda - \alpha)\boldsymbol{v}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda - \alpha}\boldsymbol{v} = (A - \alpha I)^{-1}\boldsymbol{v}$$
$$\Leftrightarrow (A - \alpha I)^{-1}\boldsymbol{v} = \frac{1}{\lambda - \alpha}\boldsymbol{v}$$

Jadi $\frac{1}{\lambda-\alpha}$ dan $\boldsymbol{v}$ adalah nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian dengan matriks $(A - \alpha I)^{-1}$.

Misalkan A adalah matriks $n \times n$ dan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai-nilai eigen dari A dan anggap

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

Jika semua nilai λ positif maka

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$$

kemudian pilih suatu konstanta s dimana $s \approx \lambda_1$ dan $s < \lambda_2$ diperoleh

$$\lambda_1 - s > \lambda_2 - s > \cdots > \lambda_n - s$$
$$\Leftrightarrow |\lambda_1 - s| < |\lambda_2 - s| \leq \cdots \leq |\lambda_n - s|$$

sehingga

$$\frac{1}{|\lambda_1 - s|} > \frac{1}{|\lambda_2 - s|} \geq \cdots \geq \frac{1}{|\lambda_n - s|}$$
$$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{\lambda_1 - s}\right| > \left|\frac{1}{\lambda_2 - s}\right| \geq \cdots \geq \left|\frac{1}{\lambda_n - s}\right|.$$

Selain itu, jika semua nilai λ negatif maka

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$$

kemudian pilih suatu konstanta s dimana $s \approx \lambda_1$ dan $s < \lambda_2$ diperoleh

$$\lambda_1 - s < \lambda_2 - s < \cdots < \lambda_n - s$$
$$\Leftrightarrow |\lambda_1 - s| < |\lambda_2 - s| \leq \cdots \leq |\lambda_n - s|$$

Sehingga

$$\frac{1}{|\lambda_1 - s|} > \frac{1}{|\lambda_2 - s|} \geq \cdots \geq \frac{1}{|\lambda_n - s|}$$
$$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{\lambda_1 - s}\right| > \left|\frac{1}{\lambda_2 - s}\right| \geq \cdots \geq \left|\frac{1}{\lambda_n - s}\right|.$$

Jadi karena nilai mutlak $\frac{1}{\lambda_1-s}$ paling besar diperoleh $\frac{1}{\lambda_1-s}$ adalah nilai eigen dominan dari matriks $(A - sI)^{-1}$. Lebih lanjut misalkan $\lambda_{shiftedinvers}$ adalah nilai eigen dominan dari matriks $(A - sI)^{-1}$ diperoleh

$$\lambda_{shiftedinvers} = \frac{1}{\lambda_1 - s}$$
$$\Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{1}{\lambda_{shiftedinvers}} + s$$

dimana λ_1 adalah nilai eigen dominan dari A.

Berdasarkan teorema (5), dapat dituliskan algoritma pencarian nilai eigen dominan suatu matriks A berordo $n \times n$ dengan metode pangkat invers tergeser sebagai berikut:

1. Tentukan sebarang vektor taknol $\boldsymbol{x}_0$ berukuran $n \times 1$
2. Menentukan nilai geseran (*shifted*) dengan teorema Gerschgorin. Nilai s dipilih dari daerah nilai eigen dominan
3. Carilah matriks $(A - sI)^{-1}$
4. Carilah $\boldsymbol{y}_k$ yang memenuhi $\boldsymbol{y}_k = (A - sI)^{-1}\boldsymbol{x}_k$ untuk $k = 0$.
5. Kemudian bagi $\boldsymbol{y}_k$ dengan elemen $\boldsymbol{y}_k$ yang memiliki nilai mutlak terbesar yaitu $\lambda^{(k+1)}$ sehingga diperoleh $\boldsymbol{x}_{k+1} = \frac{1}{\lambda^{(k+1)}}\boldsymbol{y}_k$.
6. Ulangi langkah 2 dan 3 untuk $k = 1,2, \dots$ sampai diperoleh nilai $\lambda^{(k)} \approx \lambda^{(k+1)}$. Nilai $\lambda^{(k+1)}$ yang diperoleh merupakan nilai eigen dominan dari matriks $(A - sI)^{-1}$.
7. Nilai eigen matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen dominan dari matriks $(A - sI)^{-1}$adalah $\lambda = \frac{1}{\lambda_{shiftedinvers}} + s$ dimana λ merupakan nilai eigen dominan matriks A.

Contoh 4
Anggaplah suatu populasi hewan dapat dibagi menjadi dua kelas umur dan mempunyai matriks Leslie

$$L = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Hitung nilai eigen dominan dari L dan vektor eigen yang bersesuaian.

(Anton, 1987:153)

Penyelesaian:
Tentukan $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Dengan teorema Gerschgorin diperoleh daerah nilai eigen sebagai berikut

$$|\lambda - 1| \le \frac{2}{3} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \le \lambda - 1 \le \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \le \lambda \le \frac{5}{3}$$

$$|\lambda - 0| \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le \lambda \le \frac{1}{2}$$

Daerah nilai eigen dominannya yaitu $\frac{1}{3} \le \lambda \le \frac{5}{3}$.

Dipilih $s = \frac{5}{3}$.

$$A - sI = A - \frac{5}{3}I$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

Kemudian cari matriks $(A - sI)^{-1}$.

$$(A - sI)^{-1} = \frac{1}{\det\ (A - sI)} Adj\ (A - sI)$$

$$= \frac{1}{\frac{10}{9} - \frac{1}{3}} \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\frac{7}{9}} \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{9}{7} \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{15}{7} & -\frac{6}{7} \\ -\frac{9}{14} & -\frac{6}{7} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2{,}14 & -0{,}86 \\ -0{,}64 & -0{,}86 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dilakukan iterasi dengan metode pangkat langsung untuk mendapatkan nilai eigen dominan dari matriks $(A - sI)^{-1}$

$$\boldsymbol{y}_0 = (A - sI)^{-1}\boldsymbol{x}_0$$

$$= \begin{bmatrix} -2{,}14 & -0{,}86 \\ -0{,}64 & -0{,}86 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 \\ -1{,}5 \end{bmatrix}$$

Diperoleh $\lambda^{(1)} = -3$ sehingga $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{y}_1 = (A - sI)^{-1}\boldsymbol{x}_1$$

$$= \begin{bmatrix} -2{,}14 & -0{,}86 \\ -0{,}64 & -0{,}86 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2{,}57 \\ -1{,}07 \end{bmatrix}$$

Diperoleh $\lambda^{(2)} = -2{,}57$ sehingga $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}42 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{y}_2 = (A - sI)^{-1}\boldsymbol{x}_2$$

$$= \begin{bmatrix} -2{,}14 & -0{,}86 \\ -0{,}64 & -0{,}86 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}42 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2{,}5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Diperoleh $\lambda^{(3)} = -2{,}5$ sehingga $\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}4 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{y}_3 = (A - sI)^{-1}\boldsymbol{x}_3$$

$$= \begin{bmatrix} -2{,}14 & -0{,}86 \\ -0{,}64 & -0{,}86 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2{,}484 \\ -0{,}984 \end{bmatrix}$$

Diperoleh $\lambda^{(4)} = -2{,}484$ sehingga $\boldsymbol{x}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}396 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{y}_4 = (A - sI)^{-1}\boldsymbol{x}_4$$

$$= \begin{bmatrix} -2{,}14 & -0{,}86 \\ -0{,}64 & -0{,}86 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}396 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2{,}48 \\ -0{,}98 \end{bmatrix}$$

Diperoleh $\lambda^{(5)} = -2{,}48$ sehingga $\boldsymbol{x}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}395 \end{bmatrix}$

Hingga iterasi ke 5 diperoleh nilai $\lambda_{shiftedinvers} \approx -2{,}48$. Jadi nilai eigen dominan dari A adalah

$$\lambda = \frac{1}{\lambda_{shiftedinvers}} + s$$

$$\approx \frac{1}{-2{,}48} + \frac{5}{3}$$

$$= -0{,}403 + 1{,}667$$

$$\approx 1{,}264$$

dan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ adalah

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}395 \end{bmatrix}$$

PENUTUP

Menentukan nilai eigen dominan dengan metode pangkat langsung dapat dilakukan dengan menentukan sebarang vektor taknol $\boldsymbol{x}_0$ berukuran $n \times 1$. Kemudian cari $\boldsymbol{y}_k$ yang memenuhi $\boldsymbol{y}_k = A\boldsymbol{x}_k$ untuk $k = 0$. Selanjutnya bagi $\boldsymbol{y}_k$ dengan elemen $\boldsymbol{y}_k$ yang memiliki nilai mutlak terbesar yaitu $\lambda^{(k+1)}$ sehingga diperoleh $\boldsymbol{x}_{k+1} = \frac{1}{\lambda^{(k+1)}}\boldsymbol{y}_k$. Ulangi mencari $\boldsymbol{y}_k$ dan $\boldsymbol{x}_{k+1}$ untuk $k = 1,2,\ldots$ sampai diperoleh nilai $\lambda^{(k)} \approx \lambda^{(k+1)}$. Nilai $\lambda^{(k+1)}$ yang diperoleh merupakan nilai eigen dominan dari matriks A.

Menentukan nilai eigen tak dominan dengan metode pangkat invers dilakukan dengan mencari nilai eigen dominan dari matriks A^{-1} menggunakan metode pangkat langsung terlebih dahulu. Nilai eigen matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen dominan dari matriks A^{-1} merupakan nilai eigen tak dominan matriks A yakni $\lambda = \frac{1}{\lambda_{invers}}$.

Menentukan nilai eigen tak dominan dengan metode pangkat tergeser dilakukan dengan mencari nilai eigen dominan dari matriks A yang digeser yakni $(A - sI)$ menggunakan metode pangkat langsung, dimana nilai geseran atau s diperoleh dari daerah nilai eigen dominan menggunakan teorema Gerschgorin. Nilai eigen matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen dominan dari matriks $(A - sI)$ merupakan nilai eigen tak dominan matriks A yakni $\lambda = \lambda_{shifted} + s$.

Menentukan nilai eigen dominan dengan metode pangkat invers tergeser dilakukan dengan mencari nilai eigen dominan matriks $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{sI})^{-1}$ dengan metode pangkat langsung. Nilai eigen matriks $\boldsymbol{A}$ yang bersesuaian dengan nilai eigen dominan dari matriks$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{sI})^{-1}$merupakan nilai eigen dominan matriks $\boldsymbol{A}$ yakni $\boldsymbol{\lambda} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda_{shiftedinvers}}} + \boldsymbol{s}$.

DAFTAR PUSTAKA

Andriani, Y. 2011. Menentukan Nilai Eigen Tak Dominan Suatu Matriks Definit Negatif Menggunakan Metode Kuasa Invers dengan Shifted. *Jurnal Penelitian Sains* 14.1:8-12.

Anton, H. 1987. *Edisi Kelima Aljabar Linear Elementer*. Diterjemahkan oleh: Pantur Silaban. Jakarta: Erlangga.

Anton, H. 2000. *Elementary Linear Algebra 8th Ed*. USA: Anton Textbooks, Inc.

Arif, Wahyuni, dan Azisah, T. 2015. Metode Pangkat dan Metode Deflasi dalam Menentukan Nilai Eigen dan Vektor Eigen dari Matriks. *Jurnal MSA* 3.2: 64-74.

Bartle, R. G dan Sherbert D. R. 1994. *Introduction to Real Analysis.* Second Edition. Singapore: John Wiley & Sons Inc.

Chandra, N. E dan Kusniati W. 2016. Aplikasi Metode Pangkat dalam Mengapoksimasi Nilai Eigen Kompleks Pada Matriks. *Jurnal UJMC* 2.1:36-40.

Jacob, B. 1990. *Linear Algebra*. USA: W.H Freeman and Company.

Leon, S. J. 2001. *Aljabar Linear dan Aplikasinya*. Edisi kelima. Diterjemahkan oleh: Alit Bondan. Jakarta: Erlangga.

Mathews, J. H dan Fink, K. D. 2004. *Numerical Methods using MATLAB.* Fourth Edition. USA: Prentice-Hall Inc.

Panza, M. J. 2018. Application of Power Method and Dominant Eigenvector/ Eigenvalue Concept for Approximate Eigenspace Solutions to Mechanical Engineering Algebraic Systems. *American Journal of Mechanical Engineering* 6.3:98-113.

Pratama, Y., Prihandono, B., dan Kusumastuti, N. 2013. Aplikasi Matriks Leslie untuk Memprediksikan Jumlah dan Laju Pertumbuhan Suatu Populasi. *Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster)* 2.3 :163-172.