UJM 2 (2) (2013)
Unnes Journal of Mathematics
http://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/ujm

MODEL MATEMATIKA WABAH FLU BURUNG PADA POPULASI UNGGAS DENGAN PENGARUH VAKSINASI

Frestika Setiani Sya'baningtyas, Moch Chotim, Muhammad Kharis

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Indonesia
Gedung D7 Lt.1, Kampus Sekaran Gunungpati, Semarang 50229

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima September 2013
Disetujui September 2013
Dipublikasikan Nopember 2013

Keywords:
SVI Epidemic
Avian Influenza
Equilibrium Point
Vaccination

Abstrak

Flu burung adalah penyakit pernafasan yang disebabkan oleh virus H5N1. Flu burung menular dari unggas ke unggas dan dari unggas kemanusia, melalui air liur, lendir dari hidung dan kotoran. Penyakit ini dapat menular melalui udara yang tercemar virus H5N1 yang berasal dari kotoran atau sekreta burung/unggas yang menderita flu burung. Virus ini merupakan jenis virus yang tidak stabil dan mempunyai banyak variasi serta mudah bermutasi. Dalam tulisan ini akan dikaji model matematika untuk penyebaran wabah flu burung dengan pengaruh vaksinasi. Model matematika yang digunakan berupa model SVI dengan pengaruh vaksinasi. Dalam model ini terdapat pula dua titik kesetimbangan, yakni titik bebas penyakit dan titik tak bebas penyakit. Analisa yang dilakukan terkait dengan kestabilan titik kesetimbangan tersebut. Simulasi model dengan nilai-nilai parameter yang diberikan sebagai bentuk pengecekan terhadap hasil analisis. Vaksinasi yang dilakukan dapat mempengaruhi penyebaran wabah flu burung dalam populasi unggas.

Abstract

Avian influenza is a respiratory illness caused by the H5N1 virus. Bird flu spread from poultry to poultry and poultry from humanity, through saliva, mucus from the nose and dirt. This disease can be transmitted through contaminated air from the H5N1 virus or the secretary bird droppings / avian bird flu. This virus is a type of virus that is unstable and has many variations and easily mutate. In this paper will be studied mathematical models for the spread of bird flu with vaccination effect.Mathematical model which used is SVI epidemic model with birth rate is assumed equal to mortality rate. In this model there are two equilibrium points, they are disease-free point and point not disease-free. Analysis is done related to the stability of equilibrium point. Simulation model with parameter values given as a check form to the analysis result. Vaccination is done can affect the spread of avian influensa in the avian population..

Alamat korespondensi:
E-mail: fres_toeca@yahoo.co.id

ISSN 2252-6943

Pendahuluan

Berbagai macam ilmu dikaji dan diterapkan untuk membantu menyelesaikan berbagai permasalahan yang berkaitan dengan kehidupan sehari-hari. Matematika merupakan ilmu pengetahuan yang deduktif. Konsep-konsep yang ada di dalam matematika bersifat hirarkis, terstruktur, logis, dan sistematis dari konsep yang paling sederhana sampai konsep yang paling kompleks (Winatapura, 1993:124).

Penyebaran infeksi penyakit akibat virus merupakan ancaman dalam bidang kesehatan, sosial, dan ekonomi pada masyarakat. Flu burung merupakan contoh penyebaran infeksi penyakit yang berpotensi menjadi pandemik. Flu burung adalah penyakit pernafasan yang disebabkan oleh virus H5N1. Flu burung menular dari unggas ke unggas dan dari unggas kemanusia, melalui air liur, lendir dari hidung dan feces. Penyakit ini dapat menular melalui udara yang tercemar virus H5N1 yang berasal dari kotoran atau sekreta burung/unggas yang menderita flu burung. Virus ini merupakan jenis virus yang tidak stabil dan mempunyai banyak variasi serta mudah bermutasi.

Hal yang perlu dilakukan dengan munculnya penyakit ini adalah dengan merumuskan model untuk mengontrol penyebaran virus sehingga dapat diminimalkan. Model matematika untuk epidemik merupakan suatu alat yang dapat digunakan untuk mempertimbangkan strategi-strategi untuk mengendalikan penyebaran penyakit.

Model matematika tidak pernah merupakan pernyataan akurat secara lengkap dari situasi fisik, akan tetapi merupakan pengidealan. Model yang baik menyederhanakan kenyataan sekedar untuk memungkinkan, namun kalkulasi matematika cukup akurat untuk memberikan kesimpulan yang berharga. Penting untuk menyadari keterbatasan model (Susila & Gunawan, 2007:27).

Dari latar belakang tersebut, maka penulis merumuskan beberapa permasalahan yaitu bagaimana menurunkan model matematika wabah flu burung pada populasi unggas dengan pengaruh vaksinasi, bagaimana menentukan titik kesetimbangan dan analisis kestabilan model matematika wabah flu burung pada populasi unggas dengan pengaruh vaksinasi, dan bagaimana simulasi model matematika wabah flu burung pada populasi unggas dengan pengaruh vaksinasi menggunakan program Maple.

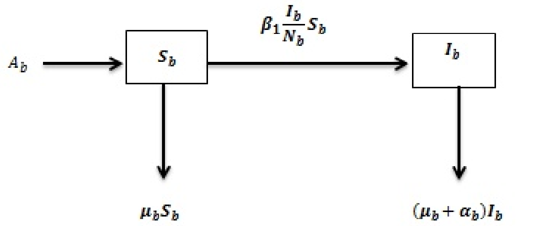
Sejalan dengan rumusan masalah, tujuan penulisan ini adalah untuk mengetahui penurunan model matematika wabah flu burung pada populasi unggas dengan pengaruh vaksinasi, mengetahui titik kesetimbangan dan analisis kestabilan model matematika wabah flu burung pada populasi unggas dengan pengaruh vaksinasi, dan mengetahui simulasi model matematika wabah flu burung pada populasi unggas dengan pengaruh vaksinasi menggunakan program Maple.

Metode

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode studi pustaka, yaitu melakukan kajian pustaka dari berbagai sumber yang berkaitan dengan permasalahan sehingga didapat suatu ide mengenai bahan dasar pengembangan upaya pemecahan masalah. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah kajian pustaka. Kajian pustaka merupakan penelaah sumber pustaka relevan yang digunakan untuk mengumpulkan data maupun informasi yang diperlukan dalam penulisan ini. Kajian pustaka diawali dengan pengumpulan sumber pustaka yaitu buku referensi dan jurnal-jurnal. Definisi-definisi dan teorema-teorema dalam referensi dikaji ulang, kemudian dirumuskan dalam perumusan masalah, selanjutnya dikaji dalam pembahasan. Pada pemecahan masalah dilakukan langkah-langkah sebagai berikut: (1) Memodelkan wabah flu burung pada populasi unggas dengan pengaruh vaksinasi, (2) Menyelesaikan atau menentukan solusi dari model yang telah dibentuk, dan (3) Bagaimana aplikasi modek Maple untuk masalah tersebut.

Pembahasan

Penyebaran flu burung pada populasi unggas adalah penyebaran flu burung yang hanya melibatkan unggas saja tanpa melibatkan manusia dalam penyebarannya. Pada jurnal sebelumnya telah dibentuk model flu burung pada unggas adalah SI. Diagram kompartemennya dapat dilihat pada Gambar 1



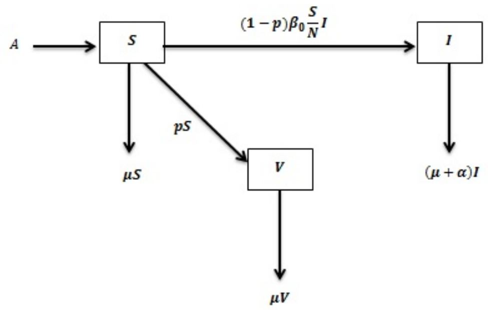
Gambar 1. Kompartemen Penyebaran Flu Burung pada Populasi Unggas

Dengan asumsi recruitment pada unggas berupa kelahiran atau imigrasi yang dinyatakan dengan A_b. Unggas terinfeksi flu burung pada saat melakukan kontak dengan unggas infective sebesar β_1. Unggas susceptible dapat mengalami kematian secara alami atau emigrasi yang dinyatakan dengan μ_b. Namun pada unggas infective selain mengalami kematian secara alami atau emigrasi, unggas tersebut juga mengalami kematian karena flu burung yang dinyatakan dengan α_b. .

Dengan melihat jurnal sebelumnya diperoleh asumsi-asumsi penyebaran flu burung pada populasi unggas dengan pengaruh vaksinasi adalah pada penyebaran flu burung, populasi unggas dibagi menjadi dua kelompok. Yang pertama adalah unggas susceptible, yaitu unggas yang sehat namun rentan terhadap penyakit. Jumlah unggas susceptible ini dinyatakan dengan S. Kedua adalah unggas infective, yaitu unggas yang telah terinfeksi flu burung dan dapat menularkan penyakitnya. Jumlah unggas infective ini dinyatakan dengan I, sehingga jumlah unggas dalam suatu populasi adalah N=S+I.

Recruitment pada unggas berupa kelahiran atau imigrasi yang dinyatakan dengan A. Unggas terinfeksi flu burung pada saat melakukan kontak dengan unggas infective sebesar β_0. . p adalah proporsi vaksinasi yang sukses pada kelahiran. Unggas susceptible dapat mengalami kematian secara alami atau emigrasi yang dinyatakan dengan . Namun pada unggas infective selain mengalami kematian secara alami atau emigrasi, unggas tersebut juga mengalami kematian karena flu burung yang dinyatakan dengan α.

Dari asumsi-asumsi tersebut didapat model flu burung untuk unggas adalah tipe SI karena unggas yang terinfeksi diasumsikan mati (tidak dapat disembuhkan), sehingga didapat model kompartemen seperti pada gambar 2.



Gambar 2. Model Matematika Wabah Flu Burung pada Populasi Unggas dengan Pengaruh Vaksinasi

Dari gambar 2 diperoleh model dalam bentuk sistem persamaan differensial berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= A - (1-p)\beta_0 \frac{S}{N} I - pS - \mu S, \\ \frac{dV}{dt} &= pS - \mu V, dan \\ \frac{dI}{dt} &= (1-p)\beta_0 \frac{S}{N} I - (\mu+\alpha) I. \end{aligned} \quad (1)$$

Dengan S(t),V(t), dan I(t) masing-masing menyatakan jumlah individu yang suspectibles, vaksinasi, infeksi dan sembuh saat t. Dari sistem (1) diperoleh $\frac{dN}{dt} = 0$ sehingga N(t)=k untuk k bilangan real. Karena N(t) konstan, sistem (1) dapat diskala dengan total populasi N untuk menyederhanakan sistem (1) dan memudahkan analisis yang dilakukan. Proporsi banyaknya individu pada masing-masing kelompok dapat dinyatakan

$$s = \frac{S}{N}, v = \frac{V}{N}, dan\ i = \frac{I}{N}. \quad (2)$$

Dari persamaan (2), diperoleh

$$n + v + i = \frac{S}{N} + \frac{V}{N} + \frac{I}{N} = 1\ dan.$$

$$S = N - (V + I) \Leftrightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{dN}{dt} - \frac{dV}{dt} - \frac{dI}{dt}.$$

Oleh karena itu, sistem (1) ekivalen dengan sistem berikut

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= A - \mu N - \alpha I \\ \frac{dV}{dt} &= p(N - V - I) - \mu V \\ \frac{dI}{dt} &= (1-p)\beta \frac{(N - V - I)}{N} I - (\mu + \alpha) I \end{aligned} \quad (3)$$

Sistem (3) merupakan sistem persamaan diferensial nonlinear yang lebih sederhana dari sistem (1) yang mempresentasikan model matematika wabah flu burung pada populasi unggas dengan pengaruh vaksinasi.

Analisa Model

Titik kesetimbangan diperoleh dengan menjadikan persamaan dari sistem (3) sama dengan nol. Saat I=0 diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu

$$E_0 = (N, V, I) = \left(\frac{A}{\mu}, \frac{pA}{\mu(p+\mu)}, 0\right)$$

dan untuk I≠0 diperoleh titik kesetimbangan

$$E_1 = (N^*, V^*, I^*)$$
$$= \left(\frac{AR_0(1-p)}{\mu R_0(1-p)+\alpha(R_0-1)}, \frac{pAR_0}{\mu\beta(R_0-1)+\mu R_0(p+\mu)}, \frac{A\mu\beta(R_0-1)}{\mu^2\beta R_0(1-p)+\alpha\mu\beta(R_0-1)}\right)$$

Selengkapnya diberikan dalam teorema berikut ini:

Teorema 1

Dipunyai

Dari sistem persamaan (3) diatas. Berdasarkan nilai R_0 tersebut diperoleh

1. Jika R_0<1 maka sistem persamaan (3) hanya mempunyai 1 titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit

$$E_0 = (N, V, I) = \left(\frac{A}{\mu}, \frac{pA}{\mu(p+\mu)}, 0\right)$$

2. Jika R_0>1 maka sistem persamaan (3) mempunyai 2 titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit

$$E_0 = (N, V, I) = \left(\frac{A}{\mu}, \frac{pA}{\mu(p+\mu)}, 0\right)$$

dan titik kesetimbangan tidak bebas penyakit

$$E_1 = (N^*, V^*, I^*)$$
$$= \left(\frac{AR_0(1-p)}{\mu R_0(1-p)+\alpha(R_0-1)}, \frac{pAR_0}{\mu\beta(R_0-1)+\mu R_0(p+\mu)}, \frac{A\mu\beta(R_0-1)}{\mu^2\beta R_0(1-p)+\alpha\mu\beta(R_0-1)}\right)$$

Teorema 2

1. Jika R_0<1 maka titik kesetimbangan E_0 stabil asimtotik lokal dengan syarat $p\beta(1-p) < \mu$

2. Jika R_0>1 maka titik kesetimbangan E_0 tidak stabil dan titik kesetimbangan endemik E_1 stabil asimtotik lokal dengan syarat

$\alpha > \beta$ dan $\beta p > \mu$.

Matriks jacobian model matematika wabah flu burung pada populasi unggas dengan pengaruh vaksinasi adalah

$$J(E) = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & -\alpha \\ p & -(p+\mu) & -p \\ \frac{(1-p)(V-I)\beta_0 I}{N^2} & \frac{(1-p)\beta_0 I}{N} & (1-p)\beta_0\left(1-\frac{V-2I}{N}\right)-(\mu+\alpha) \end{bmatrix}$$

untuk

$E_0 = (N, V, I) = \left(\frac{A}{\mu}, \frac{pA}{\mu(p+\mu)}, 0\right)$ dan

$$E_1 = (N^*, V^*, I^*)$$
$$= \left(\frac{AR_0(1-p)}{\mu R_0(1-p)+\alpha(R_0-1)}, \frac{pAR_0}{\mu\beta(R_0-1)+\mu R_0(p+\mu)}, \frac{A\mu\beta(R_0-1)}{\mu^2\beta R_0(1-p)+\alpha\mu\beta(R_0-1)}\right)$$

Untuk kasus E_0, diperoleh semua nilai eigen negatif apabila R_0<1 dan ada satu nilai eigen yang positif apabila R_0>1. Dengan kata lain jika R_0<1 maka titik kesetimbangan E_0 stabil asimtotik lokal dan jika R_0>1 maka titik kesetimbangan E_0 tidak stabil. Untuk kasus diperoleh persamaan karakteristiknya

$$c_0\lambda^3 + c_1\lambda^2 + c_2\lambda + c_3 = 0$$

dengan

$$c_0 = -\mu\beta(-1+p),$$

$$c_1 = -\beta(-1+p)(-\alpha p - \beta p\mu - \alpha\mu + \mu^2 + \mu\beta),$$

$$\begin{aligned} c_2 = {} & \alpha^2p^2\beta - 4\beta^2p\mu^2 + 2\beta^2\mu^2 - \beta\mu^3 + 3\beta\mu\alpha p^2 + 4\beta\mu^2\alpha p + \alpha\beta^2\mu - \beta p\alpha^2 \\ & +\beta p^2\mu^2 - 3\beta p\alpha\mu + 2\mu\alpha^2 p + \alpha\beta^2p^2\mu - 2\alpha\beta^2\mu p + 2\beta p\alpha^2\mu + \beta p\mu^3 \\ & +2\beta^2p^2\mu^2 + \alpha\mu^3 + \alpha^3 p + \alpha^3\mu - 4\beta\mu^2\alpha - \beta p\mu^2 - 2\beta\alpha^2\mu + 2\mu^2\alpha^2 \\ & +\mu^2\alpha p, \text{ dan} \end{aligned}$$

$$c_3 = (\mu+\alpha)(-\beta\mu + \beta p\mu + \mu p + \mu^2 + \alpha p + \alpha\mu)(-\mu\beta + \mu p\beta + \alpha\mu + \alpha p).$$

Jelas nilai c_0,c_1 positif dan c_2,c_1,c_1c_2-c_0c_3 positif saat R_0>1. Dengan menggunakan kriteria Ruth Hurwizt untuk polinom pangkat 3 diperoleh simpulan bahwa $c_0\lambda^3 + c_1\lambda^2 + c_2\lambda + c_3 = 0$ mempunyai akar-akar dengan bagian real negatif. Maka titik kesetimbangan endemik E_1 stabil asimtotik lokal.

Simulasi Model

Simulasi dilakukan dengan memberikan nilai-nilai untuk masing-masing parameter sesuai dengan kondisi nilai R_0 dalam teorema-teorema yang telah diberikan di atas. Simulasi ini diberikan untuk memberikan gambaran geometris dari teorema eksistensi dan kestabilan dari titik-titik kesetimbangan model epidemi SVI ini.

Berdasarkan penjelasan makna nilai-nilai parameter, A menyatakan laju kelahiran unggas, p menyatakan proporsi vaksinasi yang sukses pada kelahiran, β menyatakan laju kontak unggas yang telah α. terinfeksi, menyatakan rata-rata usia hidup unggas akibat virus flu burung, μ dan menyatakan rata-rata usai hidup unggas.

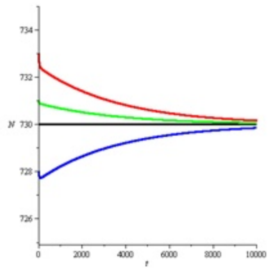
Jika diasumsikan nilai artinya satu telur yang menetas dari lima telur dalam sekali proses, $A = \frac{1}{5}$ artinya keberhasilan proses vaksinasi pada satu unggas adalah 30 hari, $p = \frac{1}{30}$ artinya dalam satu kali penularan unggas memerlukan waktu 5 hari dari 30 hari, $\beta = \frac{5}{30}$ artinya rata-rata usia hidup unggas akibat virus flu burung adalah lima hari dari 30 hari, dan $\mu = \frac{1}{3650}$ artinya rata-rata usia hidup satu unggas adalah 10 tahun yaitu 3650 hari.

Nilai-nilai parameter yang diberikan untuk membuat simulasi dari model matematika virus flu burung pada populasi unggas dengan pengaruh vaksinasi, disajikan dalam Tabel 1.

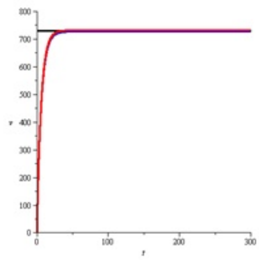
Tabel 1 Nilai Parameter untuk Simulasi Model

Parameter	Nilai
A	$\frac{1}{5}$
p	$\frac{1}{6}$
β	$\frac{1}{30}$
α	$\frac{1}{30}$
μ	$\frac{1}{3650}$

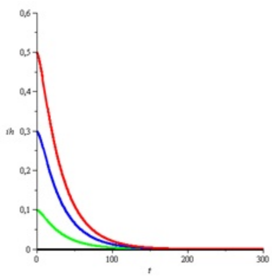
Dari nilai parmeter tersebut di dapat kurva seperti di bawah ini



Gambar 3 Simulasi $R_0 < 1$ untuk N



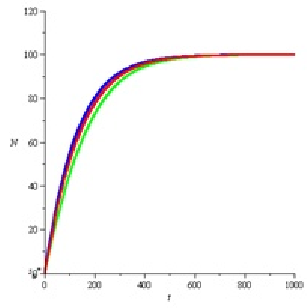
Gambar 4 Simulasi $R_0 < 1$ untuk V



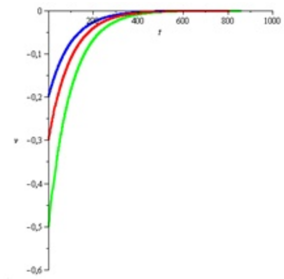
Gambar 5 Simulasi $R_0 < 1$ untuk I

Tabel 2 Nilai Parameter untuk Simulasi Model $R_0 > 1$

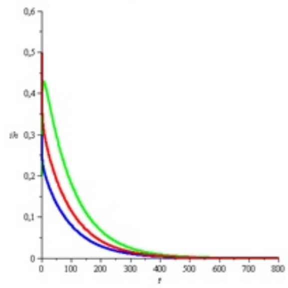
Parameter	Nilai
A	0,9999
p	0,00000001
β	0,9999
α	0,9999
μ	0,01



Gambar 6 Simulasi $R_0 > 1$ untuk N^*



Gambar 7 Simulasi $R_0 > 1$ untuk V^*



Gambar 8 Simulasi $R_0 > 1$ untuk I^*

Simpulan

Dari pembahasan yang telah dilakukan, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

1. Berdasarkan asumsi-asumsi yang dibuat diperoleh model matematika wabah flu burung pada populasi burung dengan pengaruh vaksinasi yang diekspresikan sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = A - (1-p)\beta \frac{S}{N} I - pS - \mu S,$$

$$\frac{dV}{dt} = pS - \mu V, dan$$

$$\frac{dI}{dt} = (1-p)\beta \frac{S}{N} I - (\mu + \alpha) I.$$

2. Dari model matematika wabah flu burung pada populasi burung dengan pengaruh vaksinasi, diperoleh angka rasio reproduksi dasar $R_0 = \frac{\mu\beta}{\mu p\beta + \mu p + \mu^2 + \alpha p + \alpha\mu}$

Model tersebut mempunyai dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0 = (N, V, I) = \left(\frac{A}{\mu}, \frac{pA}{\mu(p+\mu)}, 0\right)$ dan titik kesetimbangan tidak bebas penyakit

$$E_1 = (N^*, V^*, I^*)$$

$$= \left(\frac{AR_0(1-p)}{\mu R_0(1-p) + \alpha(R_0 - 1)}, \frac{pAR_0}{\mu\beta(R_0-1) + \mu R_0(p+\mu)}, \frac{A\mu\beta(R_0-1)}{\mu^2\beta R_0(1-p) + \alpha\mu\beta(R_0-1)}\right)$$

Hasil analisis kestabilan pada titik kesetimbangan diperoleh E_0 akan stabil asimtotis lokal untuk $R_0<1$. Sedangkan E_1 akan stabil asimtotis lokal untuk $R_0>1$.

3. Berdasarkan angka

$$R_0 = \frac{\mu\beta}{\mu p\beta + \mu p + \mu^2 + \alpha p + \alpha\mu}$$

jika semakin tinggi tingkat vaksinasi maka rasio reproduksi dasar R_0 akan semakin menurun. Semakin besar tingkat vaksinasi maka semakin cepat penyakit menghilang dari populasi.

Daftar Pustaka

Finizio, N. And Ladas, G. 1998. Persamaan Differensial Biasa dengan Penerapan Modern. Jakarta: Erlangga.

Gantmacher, F.R. 1959. The Theory of Matrices. New York: Chelsea Publishing Company.

Hanh, W. 1967. Stability of Motion. New York: Springer-Verlag.

Hardiningsih, Arisma Yuni. 2010. Kajian Model Epidemik SIR Deterministik Dan Stokastik Pada Waktu Diskrit. Surabaya: Jurusan Matematika ITS.

Kartono. 2001. Maple untuk Persamaan Diferensial. Yogyakarta: J&J Learning.

Kharis,M.2012.Bahan Ajar Pemodelan Matematika. Semarang:Universitas Negeri Semarang.

Nagle, R.E & E.B. Saff. 1996. Fundamentals of Differential Equation and Boundary Value Problems. New York: Addison-wesley Publishing Company.

Perko, Lawrence. 1991. Differential Equations and Dynamical System. Spinger: USA.

Susila, N dan Gunawan, H. 2001. Kalkulus. Jakarta: Erlangga.

Verhlust, F. 1990. Nonlinear Differential Equation and Dynamical System. Springer-Verlag. Heidelberg, Germany.

Waluya, S.B. 2006. Persamaan Diferensial. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Widowati dan Sutimin. 2007. Buku Ajar Pemodelan Matematika. Semarang:Universitas Diponegoro.