UJM 9 (1) 2020

UNNES Journal of Mathematics

http://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/ujm

PENENTUAN HARGA OPSI JUAL MENGUNAKAN METODE ELEMEN DI BURSA EFEK INDONESIA

Mela Widyaningrum✉, Muh. Fajar Safaatullah

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Indonesia
Gedung D7 Lt. 1, Kampus Sekaran Gunungpati, Semarang 50229

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima: September 2019
Disetujui Juni 2020
Dipublikasikan Juni 2020

Keywords:
put option, exercise boundary, Finite Element Method

Abstrak

Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui harga saham yang mendasari opsi, harga opsi jual dan batas eksekusi opsi tipe Amerika menggunakan metode elemen hingga, dan mengetahui kondisi yang tepat untuk membeli atau menjual opsi serta mengetahui keputusan yang sebaiknya diambil investor untuk mengeksekusi atau menahan opsi. Hasil penelitian menunjukkan bahwa pada PT Charoen Pokphand Indonesia Tbk diperoleh harga opsi jual Rp8169,159071 dengan harga saham yang mendasari opsi Rp832,1622846 dan batas eksekusi opsi Rp799,7865949. Dalam hal ini, karena nilai payoff yang diperoleh kurang dari harga opsi (8169,159071 < 8167,837715) dan diketahui harga saham yang mendasari opsi lebih dari batas eksekusi, maka tindakan eksekusi opsi akan menyebabkan kerugian, sehingga investor lebih baik menjual opsi kepada pihak lain..

Abstract

The purpose of this study is to determine the price of the stock that underlies options, the price of put options and the exercise boundary of type American options using the finite element method, and knowing the right conditions for buying or selling options and knowing the decisions that investors should take to exercise or hold options. The results showed that at company of Charoen Pokphand Indonesia Tbk obtained a put option price of Rp8169,159071 with a share price underlying the option of Rp832.1622846 and an option exercise boundary of Rp799,7865949. In this case, because the payoff value obtained is less than the option price (8169,159071 < 8167,837715) and it is known that the stock price underlying the option is more than the execution limit, then the option execution action will cause a loss, so investors are better off selling the option to other party.

How to cite:

Widyaningrum, M., & Safaatullah, M.F. 2019. Penentuan Harga Opsi Jual tipe Amerika menggunakan Metode Elemen Hingga pada Perusahaan-Perusahaan Industri Dasar dan Bahan Kimia di Bursa Efek Indonesia. *UNNES Journal of Mathematics*.9(1):58-68.

✉Alamat korespondensi:
E-mail: melawidya85@gmail.com

p-ISSN 2252-6943
e-ISSN 2460-5859

PENDAHULUAN

Investasi pada hakikatnya merupakan penempatan sejumlah dana pada saat ini dengan harapan untuk memperoleh keuntungan di masa mendatang. Perkembangan dunia investasi tidak saja ditunjukkan dengan adanya peningkatan jumlah uang yang diinvestasikan maupun dengan banyaknya jumlah investor yang berinvestasi, tetapi juga ditunjukkan oleh semakin banyaknya alternatif instrumen investasi yang bisa dijadikan pilihan investor untuk berinvestasi. Instrumen investasi yang telah banyak digunakan investor adalah saham (Hadi, 2013).

Kegiatan jual beli saham memungkinkan investor untuk mendapatkan *return* atau keuntungan (*capital gain*) dalam waktu singkat. Sudah sewajarnya jika investor mengharapkan *return* setinggi-tingginya dari investasi yang dilakukannya, namun juga harus mempertimbangkan risiko yang ditanggung dari investasi tersebut (Tandelilin, 2001). Untuk meminimalkan risiko yang terjadi, investor dapat melakukan transaksi jual beli instrumen derivatif. Instrumen derivatif adalah instrumen yang nilainya diturunkan atau berasal dari produk yang menjadi acuan pokok. Salah satu instrumen derivatif yaitu opsi saham (Irawan *et al.* 2017).

Opsi adalah suatu jenis kontrak antara dua pihak yang mana pihak yang satu memberikan hak kepada pihak lain untuk menjual atau membeli efek tertentu (saham) dengan harga tertentu dan periode waktu tertentu. Berdasarkan jenis hak yang diberikan, opsi dibedakan menjadi opsi beli dan opsi jual. Berdasarkan periode waktu penggunaannya, opsi dibedakan atas opsi tipe Amerika dan opsi tipe Eropa (Hull, 2002).

Di Indonesia, kontrak opsi ditransaksikan di Bursa Efek Indonesia. Opsi di Bursa Efek Indonesia masih terbatas pada opsi yang berhubungan dengan saham saja, sehingga disebut sebagai kontrak opsi saham. Kontrak opsi saham yang ditransaksikan di Bursa Efek Indonesia adalah opsi saham tipe Amerika (Hartono, 2016). Hal ini disebabkan karena fleksibilitas waktu penggunan opsi tipe Amerika sehingga memungkinkan investor memperoleh keuntungan lebih. Kunci untuk memperoleh keuntungan dari opsi saham tipe Amerika adalah ketetapan penentuan harga opsi dan batas eksekusi opsi saham (Binatari *et al.*, 2013).

Solusi yang dapat digunakan dalam menentukan harga wajar dari opsi yaitu penggunaan model matematika berdasarkan persamaan diferensial parsial. Model yang sangat umum digunakan adalah model *Black-Scholes* (Golbabai *et al.*, 2013). Model *Black Scholes* bermanfaat bagi investor dalam menilai apakah harga opsi di pasar sudah merupakan harga yang dianggap wajar bagi opsi tersebut. Model *Black Scholes* adalah model yang dikembangkan untuk menentukan harga opsi tipe Eropa berupa persamaan diferensial parsial berorde dua (Hull, 2002). Model *Black Scholes* dirumuskan sebagai sebagai berikut

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0 \qquad (1)$$

(Benbow, 2005)

Menurut Sudhakar & Srikanth (2016) model *Black Scholes* didasarkan pada beberapa asumsi yang perlu analisis secara cermat sebelum menerapkan model *Black Scholes* dalam kehidupan nyata. Model ini mengasumsikan bahwa volatilitas aset yang mendasarinya bersifat konstan, perubahan harga saham bergerak secara acak, tingkat bunga yang digunakan dalam perhitungan harga opsi harus konstan selama periode opsi, tidak ada biaya transaksi dan komisi dalam perdagangan baik opsi maupun aset yang mendasarinya, tidak ada peluang arbitrase bebas risiko dan aset yang mendasari opsi tidak membayar dividen. Sangat sulit untuk memegang asumsi bahwa aset yang mendasari opsi tidak membayar dividen, karena sebagian besar opsi yang ada di pasar modal pada kenyataannya membayar dividen. Setalah dilakukan modifikasi, diperoleh persamaan model *Black Scholes* dengan pembagian dividen

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+(r-q)S\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0 \qquad (2)$$

(Benbow, 2005)

Menurut Cassimon *et al.*, (2007) penentuan harga opsi tipe Amerika secara komputasi jauh lebih rumit dibandingkan dengan opsi tipe Eropa karena pada opsi tipe Amerika memungkinkan pelaksanaan atau eksukusi opsi di awal (*early exercise*), sehingga tidak mengherankan jika opsi tipe Amerika menerima banyak perhatian dalam ekonomi keuangan.

Opsi tipe Amerika adalah opsi yang dapat dilakukan atau dieksekusi kapan saja sebelum waktu jatuh tempo, sangat penting untuk mengetahui tidak hanya harga dari suatu opsi tetapi juga waktu terbaik untuk mengeksekusinya. Kurva waktu terbaik untuk mengeksekusi opsi tipe Amerika disebut kurva batas eksekusi optimal (Kim, 1990).

Hal tersebut mengarah ke pemisahan domain $\{S\in(-\infty,+\infty), t\in[0,\infty)\}$ menjadi dua bagian batas eksekusi opsi yaitu jika $S\le S_p(t)$, maka opsi harus segera dieksekusi atau dilaksanakan dan sebaliknya jika $S>S_p(t)$, maka opsi tidak dieksekusi atau tidak dilaksanakan, dengan S adalah harga saham yang mendasari opsi dan $S_p(t)$ adalah batas eksekusi untuk opsi jual (Goodman & Ostrov, 2002). Suatu opsi dikatakan mempunyai batas eksekusi optimal jika S kurang dari atau sama dengan $S_p(t)$ (Cheng, 2010). Batas eksekusi dicari untuk melaksanakan atau mengeksekusi opsi, yaitu dengan cara melihat persinggungan atau perpotongan antara harga opsi dengan nilai fungsi *payoff* (Gultom et al., 2015).

Penentuan harga opsi tipe Amerika cukup sulit jika ditentukan dengan menggunakan model Black Scholes, karena adanya batas eksekusi yang mengakibatkan suatu kendala dalam penentuan harga opsi tipe Amerika. Kendala tersebut disebabkan belum adanya solusi analitik pada model Black Scholes yang memuat batas eksekusi (Gultom et al., 2015). Dalam menyelesaikan model *Black Scholes* yang memuat batas eksekusi, metode numerik sangat dibutuhkan.

Penyelesaian solusi numerik persamaan diferensial parsial dapat menggunakan metode beda hingga maupun metode elemen hingga (Smith, 2008). Metode beda hingga dan metode elemen hingga keduanya sama-sama menggunakan prinsip pendiskritan variabel-variabelnya. Perbedaan kedua metode adalah pada proses pendiskritan, di mana metode beda hingga membagi domain variabel menjadi berhingga persegi, sedangkan pada metode elemen hingga membagi domain tidak harus dengan bentuk persegi (Asih *et al.* 2018).

Beberapa penelitian yang menggunakan metode numerik untuk menentukan harga opsi tipe Amerika telah dilakukan oleh Kim (1990) dalam penelitiannya membahas tentang opsi beli dan opsi jual tipe Amerika dengan pembagian dividen. Dalam penelitiannya Kim (1990) menyajikan algoritma numerik metode elemen hingga berdasarkan skema tiga level untuk menghitung harga dan batas eksekusi opsi tipe Amerika. Algoritma ini dirumuskan pada sistem persamaan Jamshidian untuk harga opsi dan batas eksekusi opsi tipe Amerika. Latif *et al.*, (2013) dan Binatari *et al.*, (2013) menerapkan metode elemen untuk menyelesaikan model *Black Scholes* untuk opsi tipe Amerika dengan pembagian dividen menggunakan *finite element method*, diperoleh hasil akhir berupa tahapan-tahapan dalam penentuan harga opsi dan batas eksekusi opsi tipe Amerika.

Metode numerik yang dapat digunakan menyelesaikan masalah opsi tipe Amerika dalam penelitian ini adalah metode elemen hingga. Secara umum metode elemen hingga adalah suatu teknik untuk mencari solusi hampiran dari masalah nilai awal dan syarat batas. Pada metode ini, langkah awal penentuan solusi adalah mengubah masalah nilai awal dan syarat batas ke bentuk *weak formulation*, kemudian dilanjutkan dengan membagi domain solusi menjadi sejumlah berhingga subdomain. Langkah diakhiri dengan mencari solusi hampiran pada setiap subdomain (Latif *et al.*, 2013). Metode elemen hingga yang diterapkan pada *weak formulation* memberikan hasil yang sangat baik dalam penilaian opsi tipe Amerika (Badea, 2004). Selain itu menurut Strang & Fix (2002) metode elemen hingga menawarkan solusi matematis yang setepat-tepatnya.

Berdasarkan uraian di atas, maka peneliti tertarik mengangkat topik yang berjudul "Penentuan Harga Opsi Jual Tipe Amerika menggunakan Metode Elemen Hingga pada Perusahaan-Perusahaan Industri Dasar dan Bahan Kimia di Bursa Efek Indonesia", alasan dipilih sektor Indutri Dasar dan Bahan Kimia sebagai masalah yang diteliti karena salah satu sektor di Bursa Efek Indonesia yang memiliki kinerja saham-saham tertinggi dibandingkan sektor lainnya sepanjang tahun 2018, yaitu sektor Industri Dasar dan Bahan Kimia (Bisnis.com, 2019).

Dalam menyelesaikan model Black Scholes opsi tipe Amerika diperlukan kajian lanjutan mengenai batas eksekusi dan daerah batas opsi tipe Amerika. Didefinisikan $P(S,t)$ sebagai harga opsi jual pada saat t dan harga saham S (Kang *et al.*, 2008). Batas eksekusi $S_p(t)$ opsi jual dapat didefinisikan sebagai

$$S_p(t) = \sup\{S \leq S_p(t^+) | P(S,t) = E - S\} \quad (3)$$

dengan t^+ menunjukkan batas di t dari sisi kanan.

Misalkan fungsi harga opsi V, disubstitusi dengan fungsi harga opsi jual P, sehingga harga opsi jual memiliki daerah asal D_v dengan domain $D_v = \{(S,t)|0 \leq t \leq T, 0 \leq S \leq \infty\}$. D_v dibagi ke dalam dua daerah batas eksekusi, yaitu

a. Daerah kelanjutan (*continuation region*)

Daerah kelanjutan $D_v = \{(S,t)|S > S_p(t)\}$ mempunyai batas awal eksekusi yang tidak optimal karena harga opsi jual lebih dari fungsi *payoff,* sehingga diperoleh persamaan *Black Scholes* homogen sebagai berikut,

$$P(S,t) > \text{maks}(E - S, 0)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + (r-q)S\frac{\partial P}{\partial S} - rP = 0 \quad (4)$$

b. Daerah eksekusi (*exercise region*)

Daerah eksekusi $D_v = \{(S,t)|S \leq S_p(t)\}$, mempunyai batas eksekusi yang optimal karena harga opsi jual sama dengan fungsi *payoff,* sehingga diperoleh persamaan *Black Scholes* nonhomogen sebagai berikut,

$$P(S,t) = E - S$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + (r-q)S\frac{\partial P}{\partial S} - rP = -(rE - qS) \quad (5)$$

Berdasarkan persamaan (4) dan (5) dipunyai persamaan Jamshidian untuk opsi jual tipe Amerika, yaitu

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + (r-q)S\frac{\partial P}{\partial S} - rP = -(rE - qS)\, H(S_P(t) - S) \quad (6)$$

untuk $(S,t) \in D_v$ dan H fungsi *heaviside*. Selain batas eksekusi, nilai awal dan syarat batas yang harus dipenuhi adalah sebagai berikut:

1) Pada saat tanggal kadaluwarsa, harga opsi jual memenuhi
$$P(S,T) = \text{maks}(E - S, 0), 0 \leq S \leq S_{max}$$
2) Pada saat harga saham sama dengan nol, maka harga opsi jual mencapai titik maksimal yakni sebesar harga eksekusi E.
$$P(0,t) = E, 0 \leq t \leq T$$
3) Pada saat harga saham mencapai harga maksimal, maka harga opsi jual sama dengan nol
$$P(S_{max}, t) = 0, 0 \leq t \leq T$$

dengan

P = opsi jual,
S_{max} = batas atas opsi saham,
T = waktu jatuh tempo,
t = waktu,
E = harga eksekusi.
(Kang *et al.*, 2008).

Penentuan harga opsi jual tipe Amerika dapat diselesaikan dengan melakukan transformasi model *Black Scholes* menggunakan metode elemen hingga, yaitu misalkan $(0, S_{max}) \in R$ dan $V = H_0^1(0, S_{max})$ adalah ruang Sobolev standar. Agar memenuhi syarat batas pada V, dilakukan transformasi pada harga opsi jual $P(S,t)$ sebagai berikut

$$W(S,t) = y(S) - P(S,t) \quad (7)$$

dengan $y(S) = \frac{S_{max} - S}{S_{max}}.E$

Substitusi $P(S,t)$ ke dalam persamaan (4), persamaan (5) dan kondisi batas opsi jual, memberikan sistem transformasi sebagai berikut

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 W}{\partial S^2} + (r-q)S\frac{\partial W}{\partial S} - rW = F(S, S_P(t)) \quad (8)$$

dengan

$$S_P(t) = \sup\{S \leq S_P(t^+) | W(S,t) = W(S,T)\}$$

dan t^+ menunjukkan batas di t dari sisi kanan. Dipunyai

$$F(S, S_P(t)) = q\left(\frac{S - S_{max}}{S_{max}}\right)E + (rE - qS)H(S_P(t) - S)$$

dengan kondisi batas

$$W(S,T) = y(S) - \text{maks}(E - S, 0), 0 \leq S \leq S_{max}$$

$$S_p(T) = E$$

$$W(0,t) = 0, 0 \leq t \leq T$$

$$W(S_{max}, t) = 0,\, 0 \leq t \leq T$$

Dengan menggunakan operator diferensial

$$\mathcal{L} \equiv \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + (r-q)S\frac{\partial}{\partial S} - rI \quad (9)$$

persamaan (8) dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{\partial W(S,t)}{\partial t} + \mathcal{L}W(S,t) = F(S, S_p(t) \quad (10)$$

Diberikan operasi hasil kali $\langle \cdot,\cdot \rangle$ dalam ruang $\mathcal{L}_2(0, S_M)$ yang didefinisikan dengan

$$\langle w, v \rangle = \langle w(S), v(S) \rangle_{[0, S_{\text{maks}}]} = \int_0^{S_{\text{maks}}} w(S)v(S)dS \quad (11)$$

mengalikan persamaan (8) dengan fungsi tes $v \in V$, diperoleh

$$\langle \frac{\partial W}{\partial t}, v \rangle + \langle \mathcal{L}W, v \rangle = \langle F, v \rangle \quad (12)$$

Pada masalah yang sepenuhnya diskret, diambil titik pusat yang sama untuk t dan S. Misalkan $N, M \in \mathbb{Z}^+$, domain t akan dibagi menjadi N subdomain dan domain S akan dibagi menjadi M subdomain. Misalkan ukuran tiap interval subdomain t adalah k dan ukuran tiap interval subdomain S adalah h, akibatnya diperoleh $k = T/_N$ dan $h = {S_{max}}/_M$. Dan misalkan

$t^j = jk$, untuk $j = N, N-1, \dots, 0$
$S_i = ih$, untuk $i = 0,1, \dots, M$

dipilih V_h sebagai subruang V yang terdiri dari polinominal-polinominal berderajat satu, kontinu sepotong-sepotong dan jumlahnya berhingga. Subruang V_h terdiri dari semua fungsi v yang memenuhi

$$v_{[S_{i-1}, S_i]} \in P^1([S_{i-1}, S_i]), v(0) = v(S_M) = 0, v \in P[S_0, S_{max}] \quad (13)$$

Subruang V_h memiliki basis $\{\phi_i(S)\}_{i=1}^{M-1}$, di mana ϕ_i adalah fungsi "hat" sehingga $\phi_i(S_j) = \delta_{ij}$ untuk setiap i dan j, dengan δ_{ij} delta kronecker. Oleh karena w_h^j adalah elemen subruang V_h untuk solusi dari (9), sehingga w_h^j didefinisikan sebagai

$$w_h^j(S) = \sum_{i=1}^{M-1} \alpha_i^j\, \phi_i(S), \quad \text{untuk} \quad j = N, N-1, \dots, 0 \quad (14)$$

dengan notasi vektor α^j yang dinyatakan sebagai

$$\alpha^j = \left[\alpha_1^j, \alpha_2^j, \dots, \alpha_{M-1}^j\right]^T \quad (15)$$

a. Perhitungan pada saat t^N

Batas eksekusi numerik S_p^N , diperoleh dari batas eksekusi pada saat T , yakni $S_\text{p}(T) = E$. Agar lebih memudahkan perhitungan, digunakan titik nodal S_l sedemikian sehingga $S_p^N = S_l$, di mana $S_{l-1} < S_\text{c}(T) \leq S_l, l \in$

$\{0,1,2,\dots,M\}$. Pemilihan ini didasarkan pada $|S_p(T)-S_p^N|\le h$.

Pada saat T harga $W(S,T)$ dapat dihitung menggunakan persamaan (8), sedangkan solusi hampiran w_h^N dicari dengan memililih w_h^N sebagai proyeksi orthogonal dari $W(S,T)$ di ruang V_h. Didefinisikan w_h^N sebagai

$$w_h^N(S)=\sum_{i=1}^{M-1}\alpha_i^N\,\phi_i(S) \qquad (16)$$

dengan vektor kolom $(\alpha_i^N,\dots,\alpha_{M-1}^N)^T$ memenuhi sistem

$$\left(W(S,T)-\sum_{i=1}^{M-1}\alpha_i^N\,\phi_i,\phi_l\right)=0,\ l=1,2,\dots,M-1.$$

Misalkan harga eksekusi E menjadi titik pusat S_q, sehingga koefisien α_i^N dapat dijelaskan secara langsung dengan

$$\alpha_i^N=W(S_i,T)$$

dengan $W(S,T)\in V_h$.

b. Perhitungan pada saat t^{N-1}

Saat t^{N-1}, digunakan Metode Euler terbalik, hampiran turunan U terhadap t didefinisikan dengan

$$\frac{\partial W(t^{N-1},S)}{\partial t}\approx\frac{W(t^N,S)-W(t^{N-1},S)}{k}$$

sehingga

$$w_h^{N-1}=w_h^N(S)+k\pounds w_h^N(S)-kF(S,S_p^N) \qquad (17)$$

dengan w_h^{N-1} adalah solusi hampiran $W^{N-1}(S)\epsilon V$ pada subruang V_h. Dengan mengalikan ke dua ruas pada persamaan (17) dengan fungsi hat $\phi_i\epsilon V_h$ diperoleh

$$(w_h^{N-1},\phi_i)=\left(w_h^N+k\pounds w_h^N-kF(S,S_p^N),\phi_i\right)$$
$$=(1-kr)(w_h^N,\phi_i)-\frac{k\sigma^2}{2}\left(S\frac{\partial w_h^N}{\partial S},S\frac{\partial\phi_i}{\partial S}\right)+k(r-q-\sigma^2)\left(S\frac{\partial w_h^N}{\partial S},\phi_i\right)-k\left(F(S,S_p^N),\phi_i\right) \qquad (18)$$

Misalkan f^N merupakan vektor kolom untuk $i,j=1,2,\dots M-1$, sedemikian sehingga $f^N=[f_1^N,f_2^N,\dots,f_{M-1}^N]^T$ dengan $f_i^N=-k\left(F(S,S_p^N)\phi_i\right)$ untuk $i=1,2,\dots,M-1$. Diperoleh

$$f_i^N=\begin{cases}-k\langle F_1,\phi_i\rangle_{[S_{i-1},S_{i+1}]} & S_i<S_p^N\\ -k\langle F_1,\phi_i\rangle_{[S_{i-1},S_i]}-k\langle F_2,\phi_i\rangle_{[S_i,S_{i+1}]} & S_i=S_p^N\\ -k\langle F_2,\phi_i\rangle_{[S_{i-1},S_{i+1}]} & S_i>S_p^N\end{cases}$$

(19)

dengan

$$F_1=qE\left(\frac{S-S_{max}}{S_{max}}\right)$$
$$F_2=qE\left(\frac{S-S_{max}}{S_{max}}\right)+(rE-qS)$$

sehingga

$$f_i^N=\begin{cases}-k\left(q-\frac{qE}{S_{max}}\right)hS_i,\ jika & S_i<S_P^N\\ k\left(\left(\frac{hS_i}{2}-\frac{h^2}{6}\right)q-\frac{qEhS_i}{S_{max}}+\frac{rEh}{2}\right),\ jika & S_i=S_P^N\\ k\left(-\frac{qEhS_i}{S_{max}}+rEh\right),\ jika & S_i>S_P^N\end{cases}$$

(20)

Sebagai akibat, persamaan (18) dapat ditulis sebagai

$$A\alpha^{N-1}=B\alpha^N+f^N \qquad (21)$$

dengan matriks $A=(a_{ij})$ dan $B=(b_{ij})$ adalah matriks tridiagonal $(M-1)\times(M-1)$.

$$a_{ij}=(\phi_j,\phi_i) \qquad (22)$$

$$b_{ij}=(1-kr)(\phi_j,\phi_i)-\frac{k\sigma^2}{2}\left(S\frac{\partial\phi_j}{\partial S},S\frac{\partial\phi_i}{\partial S}\right)+k(r-q-\sigma^2)\left(S\frac{\partial\phi_j}{\partial S},\phi_i\right) \qquad (23)$$

Matriks A memiliki entri $(\phi_i,\phi_i)=\frac{2h}{3},(\phi_{i-1},\phi_i)=\frac{h}{6},(\phi_{i+1},\phi_i)=\frac{h}{6}$, ini sangat dominan secara diagonal dan menjadi invertibel. Sehingga persamaan (21) dapat diselesaikan dengan

$$\alpha^{N-1}=A^{-1}B\alpha^N+A^{-1}f^N \qquad (24)$$

Penyelesaian S_P^N dapat menggunakan parameter relaksasi ε yang terkait dengan k dan h. Parameter relaksasi ε didefinisikan sebagai

$$\varepsilon=\text{maks}\left(\min\left((k^2+k*h),10^{-4}\right),10^{-8}\right) \qquad (25)$$

Batas eksekusi numerik ditentukan sebagai berikut

$$S_P^{N-1}=\min_{1\le i\le M-1}\{S_i\le S_P^N\,|\,|w_h^{N-1}(S_i)-W(T,S)|\le\varepsilon\} \qquad (26)$$

c. Perhitungan pada saat t^j

Pada level $j=N-2,\dots,1,0,$ akan ditentukan $w_h^j(S)$ menggunakan skema tiga titik.

$$\frac{w_h^{j+2}(S)-w_h^j(S)}{2k}+\frac{1}{2}\left(\pounds w_h^{j+2}(S)+\pounds w_h^j(S)\right)=F(S,S_P^{j+1}) \qquad (27)$$

dengan $w_h^{j+2}(S)$ dan S_P^{j+1} telah diketahui nilai-nilainya dari perhitungan sebelumnya. Dari persamaan (27) diperoleh

$$(I-k\pounds)w_h^j(S)=(I+k\pounds)w_h^{j+2}(S)-2kF(S,S_P^{j+1}) \qquad (28)$$

Mengalikan persamaan (28) dengan fungsi hat $\phi_i\epsilon V_h$ pada kedua ruas, sehingga dipunyai

$$\left((I-k\pounds)w_h^j,\phi_i\right)=\left((I+k\pounds)w_h^{j+2},\phi_i\right)-2k\left(F(S,S_P^{j+1}),\phi_i\right) \qquad (29)$$

Substitusi persamaan (18) ke persamaan (27) diperoleh

$$(1+kr)(w_h^j,\phi_i)+\frac{k\sigma^2}{2}\left(S\frac{\partial w_h^j}{\partial S},S\frac{\partial\phi_i}{\partial S}\right)-k(r-q-\sigma^2)\left(S\frac{\partial w_h^j}{\partial S},\phi_i\right)=(1-kr)(w_h^{j+2},\phi_i)-\frac{k\sigma^2}{2}\left(S\frac{\partial w_h^{j+2}}{\partial S},S\frac{\partial\phi_i}{\partial S}\right)+k(r-q-\sigma^2)\left(S\frac{\partial w_h^{j+2}}{\partial S},\phi_i\right)-2k\left(F(S,S_P^j),\phi_i\right)$$

(30)

Misalkan $f^{j+1}=\left(f_1^{j+1},f_2^{j+1},\dots,f_{M-1}^{j+1}\right)^T$ dengan

$$f_i^{j+1} = \begin{cases} k\left(q - \frac{qE}{S_{max}}\right)hS_i, & jika \quad S_i < S_P^N \\ k\left(\left(\frac{hS_i}{2} - \frac{h^2}{6}\right)q - \frac{qEhS_i}{S_{max}} + \frac{rEh}{2}\right), & jika \quad S_i = S_P^N \\ k\left(-\frac{qEhS_i}{S_{max}} + rEh\right), & jika \quad S_i > S_P^N \end{cases}$$

(31)

Persamaan (30) dapat ditulis menjadi

$$(2A - B)\alpha^j = B\alpha^{j+2} + 2f^{j+1} \quad (32)$$

untuk $j = N-2, \ldots, 1, 0$

dengan A dan B adalah matriks yang sama seperti pada persamaan (21).

Persamaan (32) dapat diselesaikan dengan menggunakan berbagai metode eliminasi sehingga diperoleh nilai vektor α^j.Solusi hampiran w_h^0 dan harga opsi pada saat $t = 0$ adalah

$$P(S_i, 0) = y(S_i) - w_h^0(S_i) \quad (33)$$

Solusi hampiran $w_h^N(S)$ dan harga opsi pada saat $t = N$ adalah

$$P(S_i, N) = y(S_i) - w_h^N(S_i) \quad (34)$$

Batas eksekusi pada saat $j = N-2, \ldots, 1, 0$ ditentukan sebagai berikut

$$S_P^j = \min_{1 \le i \le M-1}\left\{S_i \le S_P^{j-1} \middle| \left|w_h^j(S_i) - w_h^{j-1}(S_i)\right| \le \delta\right\}\} \quad (35)$$

(Kang *et al.*, 2008)

METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini, yaitu (1) studi literatur, (2) perumusan masalah, (3) pengumpulan data, (4) pengolahan data dan analisis data, (5) penarikan kesimpulan. Dalam studi literatur ini digunakan sumber pustaka yang relevan yang diperoleh dari berbagai sumber seprti buku-buku, artikel, jurnal ilmiah dan literatur lainnya untuk menentukan pilihan yang tepat dalam menentukan harga opsi jual tipe Amerika.

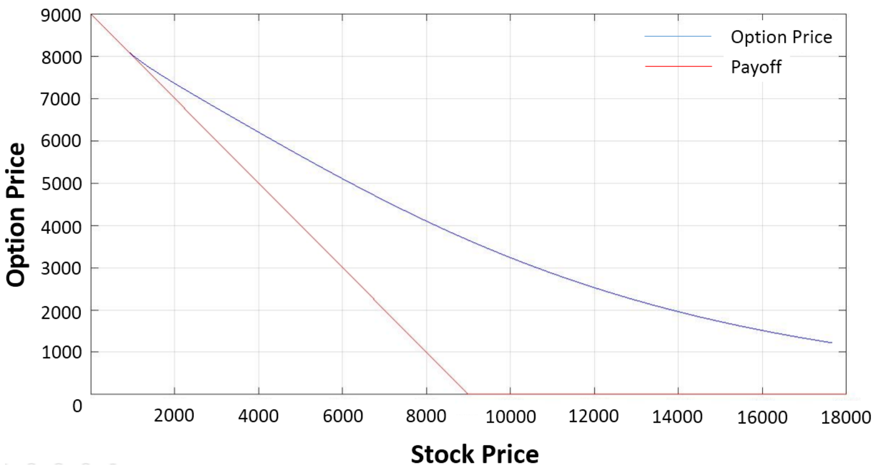
Rumusan masalah dalam penelitian ini diperlukan untuk memperjelas permasalahan sehingga mempermudah dalam melakukan analisis data. Pada langkah pengumpulan data, data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder, yaitu data harga saham penutupan harian pada PT Charoen Pokphand Indonesia Tbk, PT Jakarta Kyoei Steel Works Tbk dan PT Krakatau Steel (Persero) Tbk yang di akses melalui situs *yahoo finance* (www.finance.yahoo.com) dengan periode waktu pengamatan 12 November 2018 sampai dengan 31 Januari 2019.

Langkah-langkah yang dilakukan dalam teknik analisis data adalah sebagai berikut:

1. Menentukan *return* harga saham
$$r_t = \left(\frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}\right)$$
dengan
r_t = *return* harga saham,
S_t = harga saham pada waktu ke t,
S_{t-1} = harga saham pada waktu ke $t-1$.
2. Menentukan Standar Deviasi Harga Saham
$$S_{r_t} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}(r_t - \bar{r}_t)^2}$$
dengan $\bar{r}_t = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} r_t$
S_{r_t} = standar deviasi dari *return* harga saham,
$\bar{r}_t$ = rataan dari r_t,
n = interval waktu pengamatan.
3. Menentukan Volatilitas Harga Saham
$$\sigma_{252} = \sqrt{M \times \frac{\sum_{t=1}^{n}(r_t - \bar{r}_t)^2}{(n-1)}}$$
dengan
σ_{252} = volatilitas harga saham harian selama satu tahun,
M = banyaknya hari kerja dalam transaksi jual beli saham selama satu tahun (252 hari).
4. Menentukan harga saham yang mendasari opsi, harga opsi jual dan batas eksekusi opsi tipe Amerika menggunakan *software* Matlab R2015a, agar memudahkan dalam perhitungan, dibentuk suatu algoritma sebagai berikut:
   a. Hitung $w_h^N(S) = \sum_{i=1}^{M-1} \alpha_i^N \phi_i(S)$
   b. Hitung $S_p^N = S_l$, di mana $S_{l-1} < S_c(T) \le S_l, l \in \{0,1,2,\ldots,M\}$
   c. Hitung $w_h^{N-1} = w_h^N(S) + k\mathcal{L}w_h^N(S) - kF(S, S_p^N)$
   d. Hitung $S_P^{N-1} = \min_{1 \le i \le M-1}\{S_i \le S_P^N \,||w_h^{N-1}(S_i) - W(T,S)| \le \varepsilon\}$
   untuk $j = N-2, \ldots 1{,}0$ {
   e. Hitung $w_h^j(S) = \sum_{i=1}^{M-1} \alpha_i^j \phi_i(S)$, untuk $j = N, N-1, \ldots, 0$
   f. Hitung $S_P^j = \min_{1 \le i \le M-1}\left\{S_i \le S_P^{j-1} \middle| \left|w_h^j(S_i) - w_h^{j-1}(S_i)\right| \le \delta\right\}\}$
5. *Input* harga saham mula-mula (S_0), tingkat suku bunga bebas risiko (r), volatilitas harga saham (σ), harga eksekusi (E), waktu jatuh tempo (T), dan dividen (q).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan data harga saham penutupan harian PT Charoen Pokphand Indonesia Tbk, diperoleh volatilitas harga saham yaitu $\sigma =$ 0,524432503, harga saham pada tanggal 12 November 2018 (S_0) adalah Rp5400 dengan tingkat suku bunga bebas risiko (r) sebesar 6,00%, harga eksekusi (E) Rp9000, waktu jatuh tempo opsi saham (T) selama satu tahun (252 hari kerja transaksi jual beli saham) dan dividen yang dibagikan diasumsikan Rp0,56. Maka diperoleh hasil sebagai berikut jual dengan harga eksekusi Rp9000 adalah Rp8169,159071 dan harga saham yang mendasari adalah Rp832,1622846, diperoleh nilai keuntungan (*payoff*) sebesar Rp8167,837715. Karena nilai *payoff* yang diperoleh lebih kecil dari harga opsi jual (8169,159071 < 8167,837715) dan diketahui bahwa harga saham yang mendasari opsi lebih dari batas eksekusi, tindakan eksekusi opsi jual akan menyebabkan kerugian, sehingga lebih baik jika investor menjual opsi jual kepada pihak lain.

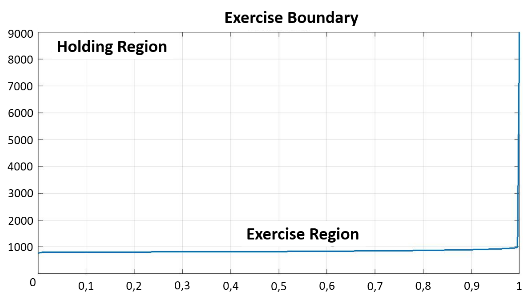


Gambar 1. Fungsi *Payoff* Opsi Jual PT Charoen Pokphand Indonesia Tbk

Kurva fungsi *payoff* opsi jual PT Charoen Pokphand Indonesia Tbk diperoleh dengan menggunakan persamaan (14). Pada Gambar 1, fungsi *payoff* opsi jual ditunjukan kurva berwarna merah dan kurva berwarna biru ditunjukkan untuk harga opsi jual tipe Amerika. Menurut Fabozzi (2000) harga opsi akan berubah seiring dengan perubahan harga saham yang mendasari. Untuk opsi jual, peningkatan harga saham yang mendasari (dengan semua faktor lain tidak berubah) akan menyebabkan penurunan harga opsi, karena nilai intrinsik menurun.

Pada kondisi harga opsi jual lebih dari nilai fungsi *payoff* agar investor memperoleh keuntungan, maka tindakan yang perlu diambil yaitu pertama, mengeksekusi opsi jual dan yang kedua menjual opsi jual. Dipunyai harga opsi

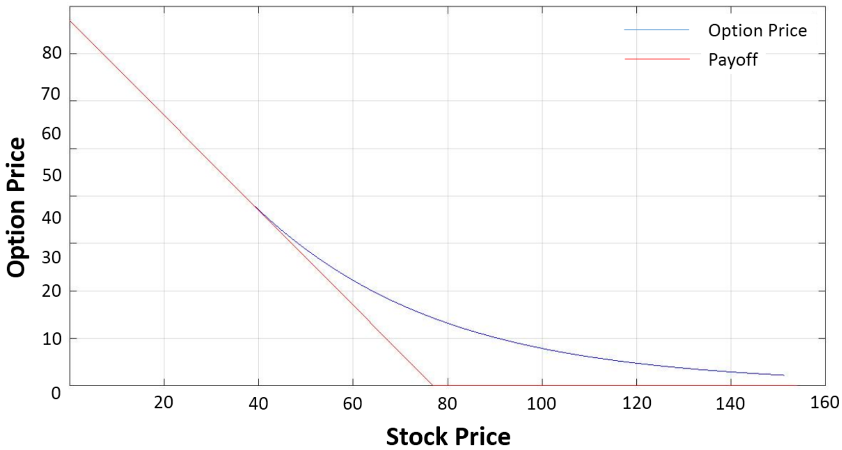
Sedangkan, pada kondisi harga opsi jual sama dengan nilai fungsi *payoff* terdapat dua reaksi investor, yang pertama investor tidak tertarik untuk membeli opsi, karena investasi yang impas dan yang kedua investor tertarik untuk membeli opsi, karena adanya harapan bahwa nilai pengembalian opsi pada saat dieksekusi akan meningkat. Dalam kondisi ini dipunyai harga opsi jual Rp 8200,308063 dan nilai fungsi *payoff* Rp8200,308063, investor tertarik untuk membeli opsi jual, karena harga saham yang mendasari opsi kurang dari batas eksekusi, yang mana akan memberikan keuntungan bagi investor jika segera mengeksekusi opsi yang dimilikinya.



Gambar 2. Plot Hasil Numerik Batas Eksekusi Opsi Jual PT Charoen Pokphand Indonesia Tbk

Kurva *plot* hasil numerik opsi jual PT Charoen Pokphand Indonesia Tbk diperoleh dengan menggunakan persamaan (35). Pada Gambar 2, dapat dilihat perilaku monoton naik dari batas eksekusi opsi jual terhadap waktu. Pada saat $t = 0$ sampai dengan t mendekati waktu kedaluwarsa atau waktu jatuh tempo terjadi kenaikan batas eksekusi yang relatif stabil di Rp768,6704976, kemudian saat $t = 1$ kurva batas eksekusi opsi jual naik secara signifikan hingga mencapai batas eksekusi tertinggi yaitu sebesar Rp9000. Kenaikan yang signifikan tersebut mengakibatkan kurva yang dimiliki PT Charoen Pokphand Indonesia Tbk berbentuk curam karena hanya memiliki jumlah partisi sebanyak 7 partisi pada batas eksekusi, hal tersebut dipengaruhi oleh besarnya dividen yang dibayarkan, dalam hal ini dividen yang dibayarkan pada PT Charoen Pokphand Indonesia Tbk diasumsiikan sebesar Rp0,56. Jadi semakin besar dividen yang dibayarkan maka kurva batas eksekusi akan mengalami kenaikan yang signifikan pada saat mendekati waktu kadaluwarsa atau waktu jatuh tempo dan akan memiliki jumlah yang sedikit pada partisi batas eksekusi.

Perhitungan pada data harga saham penutupan harian pada PT Jakarta Kyoei Steel Works Tbk diperoleh volatilitas harga saham $\sigma = 0{,}540524578$. Harga saham pada tanggal 12 November 2018 (S_0) adalah Rp66 dengan tingkat suku bunga bebas risiko (r) sebesar 6,00%, harga eksekusi (E) Rp 77,waktu jatuh tempo opsi saham (T) selama satu tahun (252 hari kerja transaksi jual beli saham), dan dividen yang dibayarkan sebesar Rp0.

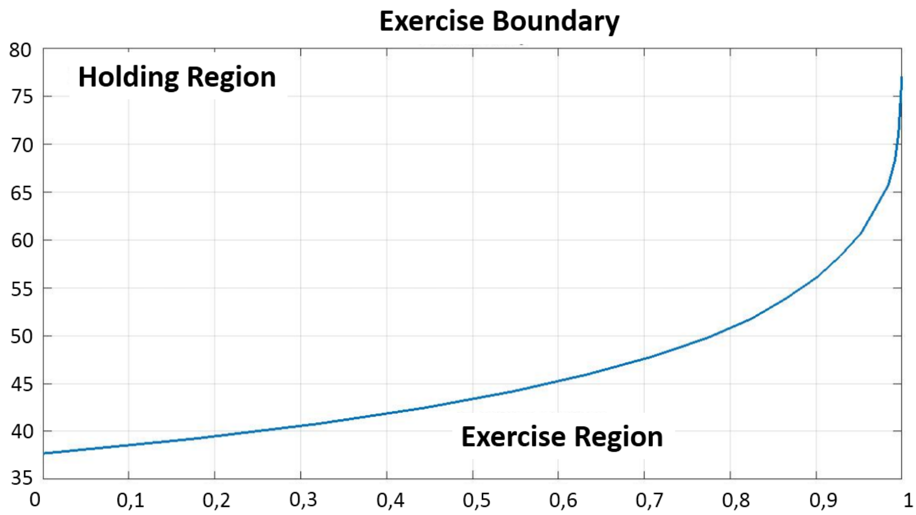


Gambar 3. Fungsi *Payoff* Opsi Jual PT Jakarta Kyoei Steel Works Tbk

Kurva fungsi *payoff* opsi jual PT Jakarta Kyoei Steel Works Tbk diperoleh dengan menggunakan persamaan (14). Pada Gambar 3, fungsi *payoff* opsi jual ditunjukan dengan kurva berwarna merah dan kurva berwarna biru ditunjukkan untuk harga opsi jual tipe Amerika. Menurut Fabozzi (2000) bahwa harga opsi akan berubah seiring dengan perubahan harga saham yang mendasari. Untuk opsi jual, peningkatan harga saham yang mendasari (dengan semua faktor lain tidak berubah) akan menyebabkan penurunan harga opsi, karena nilai intrinsik menurun.

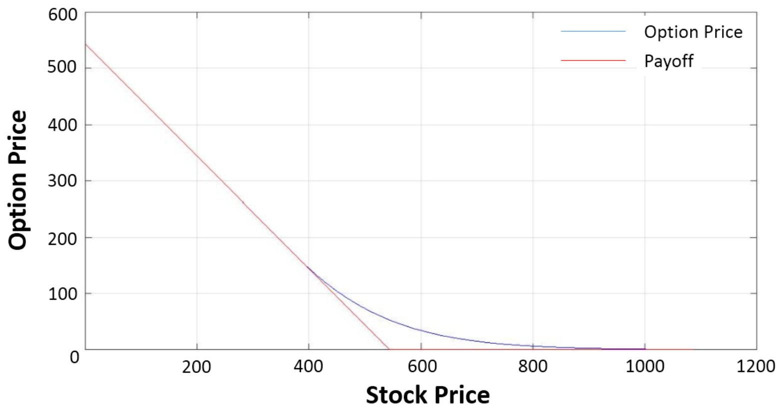
Saat kondisi harga opsi jual lebih dari nilai fungsi *payoff* agar investor memperoleh keuntungan, maka tindakan yang diambil yaitu pertama, mengeksekusi opsi jual dan yang kedua menjual opsi jual. Dalam perhitungan yang telah dilakukan dipunyai harga opsi jual dengan harga eksekusi Rp77 adalah Rp33,38521842 dan harga saham yang mendasari opsi adalah Rp44,1790134, diperoleh nilai *payoff* sebesar Rp32,8209866. Karena nilai *payoff* yang diperoleh lebih kecil dari harga opsi jual ($32{,}8209866 < 33{,}38521842$) dan diketahui bahwa harga saham yang mendasari opsi lebih dari batas eksekusi, tindakan eksekusi opsi jual akan menyebabkan kerugian, sehingga lebih baik jika investor menjual opsi jual kepada pihak lain.

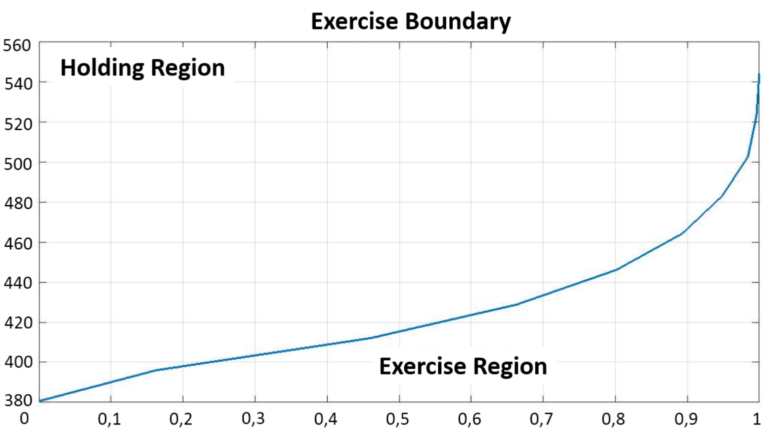
Sedangkan, pada kondisi harga opsi jual sama dengan nilai fungsi *payoff* terdapat dua reaksi investor, yang pertama investor tidak tertarik untuk membeli opsi, karena investasi yang impas dan yang kedua investor tertarik untuk membeli opsi, karena adanya harapan bahwa nilai pengembalian opsi pada saat dieksekusi akan meningkat. Dalam kondisi ini dipunyai harga opsi jual Rp39,305 dan nilai fungsi *payoff* Rp39,305, investor tertarik untuk membeli opsi jual, karena harga saham yang mendasari opsi kurang dari batas eksekusi, yang akan memberikan keuntungan bagi investor jika segera mengeksekusi opsi yang dimilikinya.



Gambar 4. Plot Hasil Numerik Batas Eksekusi Opsi Jual PT Jakarta Kyoei Steel Works Tbk

Perhitungan data harga saham penutupan harian PT Krakatau Steel (Persero) Tbk diperoleh volatilitas harga saham sebesar $\sigma =$ 0,305598773. Harga saham PT Krakatau Steel (Persero) Tbk pada saat tanggal 12 November 2018 (S_0) adalah Rp376 dengan tingkat suku bunga bebas risiko (r) sebesar 6,00%, harga eksekusi (E) Rp544, waktu jatuh tempo opsi saham (T) selama satu tahun (252 hari kerja transaksi jual beli saham) dan dividen sebesar Rp0. Maka diperoleh harga opsi jual sebesar Rp148,3567 saat harga saham Rp396,0295895 batas eksekusi Rp412,061.





Gambar 6. Plot Hasil Numerik Batas Eksekusi Opsi Jual PT Krakatau Steel (Persero) Tbk

Kurva fungsi *Payoff* Opsi Jual PT Krakatau Steel (Persero) Tbk diperoleh dengan menggunakan persamaan (14). Pada Gambar 5, fungsi *payoff* opsi jual ditunjukan dengan kurva berwarna merah dan kurva berwarna biru ditunjukkan untuk harga opsi jual tipe Amerika. Menurut Fabozzi (2000) bahwa harga opsi akan berubah seiring dengan perubahan harga saham yang mendasari. Untuk opsi jual, peningkatan harga saham yang mendasari (dengan semua faktor lain tidak berubah) akan menyebabkan penurunan harga opsi, karena nilai intrinsik menurun.

Dalam kondisi harga opsi jual lebih dari nilai fungsi *payoff* agar investor memperoleh keuntungan, maka tindakan yang perlu diambil yaitu pertama, mengeksekusi opsi jual dan yang kedua menjual opsi jual. Dipunyai harga opsi jual dengan harga eksekusi Rp544 adalah Rp120,0468231 dan harga saham yang mendasari adalah Rp428,7414295, diperoleh nilai keuntungan (*payoff*) sebesar Rp115,2585705. Karena nilai *payoff* yang diperoleh lebih kecil dari harga opsi jual (115,2585705 < 120,0468231) dan diketahui bahwa harga saham yang mendasari opsi lebih dari batas eksekusi, tindakan eksekusi opsi jual

akan menyebabkan kerugian, sehingga lebih baik jika investor menjual opsi jual kepada pihak lain.

Sedangkan, pada kondisi harga opsi jual sama dengan nilai fungsi *payoff* terdapat dua reaksi investor, yang pertama investor tidak tertarik untuk membeli opsi, karena investasi yang impas dan yang kedua investor tertarik untuk membeli opsi, karena adanya harapan bahwa nilai pengembalian opsi pada saat dieksekusi akan meningkat. Dalam kondisi ini dipunyai harga opsi jual Rp163,3781397 dan nilai fungsi *payoff* Rp163,3781397, investor tertarik untuk membeli opsi jual, karena harga saham yang mendasari opsi kurang dari batas eksekusi, yang mana akan memberikan keuntungan bagi investor jika segera mengeksekusi opsi yang dimilikinya

Kurva *plot* hasil numerik batas eksekusi opsi jual PT Krakatau Steel (Persero) Tbk diperoleh dengan menggunakan persamaan (35). Pada Gambar 6, dapat dilihat perilaku monoton naik dari batas eksekusi opsi jual terhadap waktu. Kurva yang terbentuk pada PT Krakatau Steel (Persero) Tbk memiliki 9 partisi batas eksekusi opsi jual yang menyebabkan kurva tidak berbentuk kurva mulus, meskipun dividen yang dibayarkan Rp0. Pada saat $t = 0$, batas eksekusi opsi bernilai Rp380,6219, selanjutnya batas eksekusi terus naik sampai titik tertinggi, yaitu pada tanggal kadaluwarsa opsi saat $t = 252$ sebesar Rp544.

PENUTUP

Pada PT Charoen Pokphand Indonesia Tbk diperoleh harga saham yang mendasari opsi, harga opsi jual, dan batas eksekusi masing-masing, yaitu Rp496,7835705, Rp8503,216429, dan Rp799,7865949. Pada PT Jakarta Kyoei Steel Works Tbk diperoleh harga saham yang mendasari opsi, harga opsi jual, dan batas eksekusi masing-masing, yaitu Rp44,1790134, Rp33,38521842, dan Rp42,4602068. Pada PT Krakatau Steel (Persero) Tbk diperoleh harga saham yang mendasari opsi, harga opsi jual, dan batas eksekusi masing-masing, yaitu Rp428,7414295, Rp120,0468231, dan Rp412,0610298.

Dalam kondisi harga opsi jual lebih dari nilai fungsi *payoff*, lebih baik jika investor menjual opsi yang dimilikinya kepada pihak lain. Hal tersebut dikarenakan nilai *payoff* yang diperoleh kurang dari harga opsi jual dan tindakan eksekusi opsi jual akan menyebabkan kerugian. Sehingga menjual opsi adalah keputusan yang terbaik. Sedangkan, pada kondisi harga opsi jual sama dengan nilai fungsi *payoff,* investor lebih baik membeli opsi dan segera mengeksekusi opsi yang dimilikinya, karena adanya harapan bahwa nilai pengembalian opsi pada saat dieksekusi akan meningkat.

Ketika harga saham yang mendasari opsi kurang dari atau sama dengan batas eksekusi maka investor lebih baik segera mengeksekusi opsi yang dimilikinya, dan ketika harga saham yang mendasari opsi lebih dari batas eksekusi lebih baik investor tidak mengeksekusi opsi yang dimilikinya karena akan menyebabkan kerugian.

DAFTAR PUSTAKA

Asih, T. S. N., Waluya, B., & Supriyono. (2018). Perbandingan Finite Difference Method dan Finite Element Method dalam Mencari Solusi Persamaan Diferensial. *PRISMA*, 885-888

Badea, L. (2004). On the Valuation of American Options. *Mathematics Computational Science*, *31*(2), 91-97

Benbow, S.C. (2005). Numerical Methods for American Options. Thesis University of Reading

Binatari, N., Kusumawati, R., & Latif, A. (2013). Penentuan Harga Opsi Saham Tipe Amerika Dengan Pembagian Dividen Menggunakan Finite Element Method. *Jurnal Saintek*, *18(2)*

Bisnis.com (3 Januari 2019). Online. 'Emiten Industri Dasar Masih Menarik pada 2019, Ini Rekomendasinya'. Available at https://market.bisnis.com/read/20190103/7/874959/emiten-industri-dasar-masih-menarik-pada-2019-ini-rekomendasinya (accessed 19 April 2019)

Cassimon, D., Engelen, P.J., Thomassen L., & Wouwe, M. Van. (2007). Closed-Form Valuation Of American Call Options On Stocks Paying Multiple Dividens. *Finance,* 33-48

Cheng, J., Zhu, S. P., & Liao, S. J. (2010). An Explicit Series Approximation to the Optimal Exercise Boundary of American Put Option. *Mathematics and Mechanics,* 1148-1158

Fabozzi, F. J. (2000). *Manajemen Investasi.* Jakarta: Salemba Empat

Golbabai, A., Ballestra, L.V., & Ahmadian, D. (2013). Superconvergence of the Finite Element Solutions of the Black–Scholes Equation. *Finance,* 17-26

Goodman, J., & Ostrov, D. N. (2002). On the Early Exercise Boundary of the American Put Option. *Society for Industrial and Applied Mathematics, 62*(5), 1823-1835

Gultom, H. M., Palupi, I., & Umbara, R. F. (2015). Penentuan Harga Opsi Amerika Melalui Modifikasi Model Black Scholes. *Proceedings of Engineering, 2(3)*

Hadi, Nor. (2013). *Pasar Modal (Acuan Teoritis dan Praktis Investasi di Instrumen Keuangan Pasar Modal).* Yogyakarta: Graha Ilmu

Hartono, Jogiyanto. (2016). *Teori Portofolio dan Analisis Investasi.* Yogyakarta: BPFE - Yogyakarta

Hull, John C. (2002). *Options, Futures, and Other Derivatives.* Fifth Edition. New Jersey: University of Toronto

Irawan, W. O., Rosha, M., & Permana, D. (2017). Penentuan Harga Opsi dengan Model Black-Scholes Menggunakan Metode Beda Hingga Center Time Center Space (CTCS). *Jurnal Eksakta*, *18(2),* 192-199

Kang, S., Kim, T., & Kwon, Y. (2008). Finite Element Methods for the Price and the Free Boundary of American Call and Put Options. *Mathematics*, 12(4), 271-287

Kim, I. J. (1990). The Analytic Valuation of American Puts. *Review of Financial Studies*, 3(4), 547-572

Latif, A., Binatari, N., Kusumawati, R. (2013). Penentuan Harga dan Batas Eksekusi Opsi Tipe Amerika Model Black-Scholes Menggunakan Finite Elemen Methods (FEM). *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika*

Smith, G.d. (1985). *Numerical Simulation of Partial Differential Equation: finite Difference Methods, Third Edition.* Oxford University Press: New York

Strang, G. & Fix, G. (2008). *An Analysis of the Finite Element Methods, 2nd Edition*: Wellesley-Cambridge Press

Sudhakar & Srikanth, P. (2016). Analysis of the Efficacy of Black-scholes Model an Empirical Evidence from Call Option on Nifty-50 Index. *Pacific Business Review International,* 9(5), 94-98

Tandelilin, E. (2001). *Analisis Investasi dan Managemen Portofolio.* Yogyakarta: BPFE