



UJM 11(1) 2022

UNNES Journal of Mathematics

<http://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/ujm>



Nilai Ketakteraturan Sisi Total pada Graf Rantai Nonagon dan Graf Rantai Nonagon dengan Sisi Pendan

Melita Nurul Fauziah[✉] dan Isnaini Rosyida

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Indonesia
Gedung D7 Lt. 1, Kampus Sekaran Gunungpati, Semarang 50229

Info Artikel

Sejarah Artikel:

Diterima November 2019

Disetujui Desember 2019

Dipublikasikan Mei 2022

Abstrak

Diketahui sebuah graf G dengan himpunan titik $V(G)$ tak kosong dan himpunan sisi $E(G)$. Suatu pelabelan dikatakan pelabelan- k total tak teratur sisi, jika setiap dua sisi berbeda e_1 dan e_2 di $E(G)$ memenuhi bobot sisi e_1 tidak sama dengan bobot sisi e_2 . Bobot dari sisi uv pada pelabelan total f adalah jumlah label sisi uv ditambah jumlah label titik u dan label titik v . Nilai ketakteraturan sisi total (*total edge irregularity strength*) graf G , yang dinotasikan dengan $tes(G)$ adalah label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan total tak teratur sisi. Pada artikel ini, penulis menyelidiki nilai ketakteraturan sisi total pada graf rantai nonagon, graf rantai nonagon dengan tiga sisi pendan, dan graf rantai nonagon dengan enam sisi pendan. Hasil dari penelitian ini adalah nilai ketakteraturan sisi total graf rantai nonagon adalah ceil dari $((9r + 2)/3)$, nilai ketakteraturan sisi total graf rantai nonagon dengan tiga sisi pendan adalah ceil dari $((12r + 2)/3)$, dan nilai ketakteraturan sisi total graf rantai nonagon dengan enam sisi pendan adalah ceil dari $((15r + 2)/3)$.

Abstract

Keywords:

Irregular total labeling,

Graph labeling,

irregularity strength,

total edge irregularity strength,
chain graphs.

Given a graph G with a non-empty set of vertices $V(G)$ and a set of edges $E(G)$. A labelling is called an edge irregular total labelling, if every two different edges e_1 and e_2 on $E(G)$ have edges weight e_1 is not equal to edges weight e_2 . The weight of uv in total labelling f is the number of uv vertices labels plus the number of edges labels u and edges labels v . The total edge irregularity strength of graph G , denoted by $tes(G)$ is the minimum biggest label used to label of graph G with the edge irregular total labelling. In this paper, authors investigate the total edge irregularity strength of nonagon chain graph, nonagon chain graph with three pendant edges, and nonagon chain graph with six pendant edges. The results of this research are the total edge irregularity strength of nonagon chain graph is the ceil of $((9r + 2)/3)$, the total edge irregularity strength of nonagon chain graph with three pendant edges is the ceil of $((12r + 2)/3)$, and the total edge irregularity strength of nonagon chain graph with six pendant edges is the ceil of $((15r + 2)/3)$.

How to cite:

Fauziah, M. N., & Rosyida, I. (2022). Nilai Ketakteraturan Sisi Total pada Graf Rantai Nonagon dan Graf Rantai Nonagon dengan Sisi Pendan. *UNNES Journal of Mathematics*, 11(1), 44-53.

© 2022 Universitas Negeri Semarang

[✉] Alamat korespondensi:

E-mail: fauzia.melitanurul@gmail.com

e-ISSN 2460-5859

p-ISSN 2252-6943

PENDAHULUAN

Salah satu topik dalam Teori Graf yang mengalami perkembangan pesat adalah Pelabelan Graf. Pelabelan Graf pertama kali diperkenalkan oleh Sadláček pada tahun 1964, kemudian Stewart pada tahun 1966, Kotzig dan Rosa pada tahun 1970. Pelabelan pada graf adalah sebuah fungsi f yang memasangkan elemen-elemen graf (titik dan sisi) dengan himpunan bilangan bulat positif (Wallis, 2001).

Pada tahun 2013, Ismiyanti, et al. (2013) menjelaskan tentang aplikasi pelabelan graf dalam berbagai bidang di antaranya desain sirkuit, dekomposisi graf, kriptografi, teori koding, radar (Munir, 2003), desain jaringan komputer (Susmikanti, 2006), ilmu kimia (Dubrov, 2000), dan desain jaringan komunikasi (Kusumawardana, 2009).

Baca, et al. (2007) telah mengkaji suatu jenis pelabelan total yaitu pelabelan total tidak teratur (*irregular total labeling*). Baca, et al. (2007) meneliti pelabelan total tidak teratur ke dalam dua tipe, yaitu pelabelan total tidak teratur titik (*vertex irregular total labeling*) dan pelabelan total tidak teratur sisi (*edge irregular total labeling*) dan definisi ketakteraturan sisi total (*edge irregular total k-labeling*). Jumlah label ini dikenal sebagai bobot (*weight*) dari elemen graf yang dinotasikan dengan w . Suatu pelabelan- k total $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ disebut pelabelan- k total tak teratur sisi (*edge irregular total k-labeling*) jika untuk setiap dua sisi berbeda e_1 dan e_2 berlaku $w(e_1) \neq w(e_2)$. Bobot dari sisi uv didefinisikan $w(uv) = f(u) + f(uv) + f(v)$. Nilai ketakteraturan sisi total dari graf G yaitu label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan total tak teratur sisi, yang dinotasikan dengan $\text{tes}(G)$.

Graf rantai pertama kali diperkenalkan oleh C. Barrientos pada tahun 2002 (Barrientos, 2002). Beberapa

peneliti mengkaji tentang ketakteraturan sisi total dari beberapa graf pengembangan graf rantai, seperti Fauziah (2017) mengkaji tentang algoritma pelabelan total tidak teratur sisi pada graf rantai siklus, Rosyida & Indriati (2019) mengkaji tentang graf rantai kaktus dengan titik pendar, Baca & Siddiqui (2014) mengkaji tentang *total edge irregularity strength of generalized prism*, dan Arockiamary (2016) mengkaji tentang *total edge irregularity strength of diamond snake and dove*, Al-Mushayt & Ahmad (2012) mengkaji tentang *on the total edge irregularity strength of hexagonal grid graphs*.

Teorema 1

Jika $G(V, E)$ adalah suatu graf dengan himpunan titik tak kosong $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$, maka

$$\left\lceil \frac{|E| + 2}{3} \right\rceil \leq \text{tes}(G) \leq |E|$$

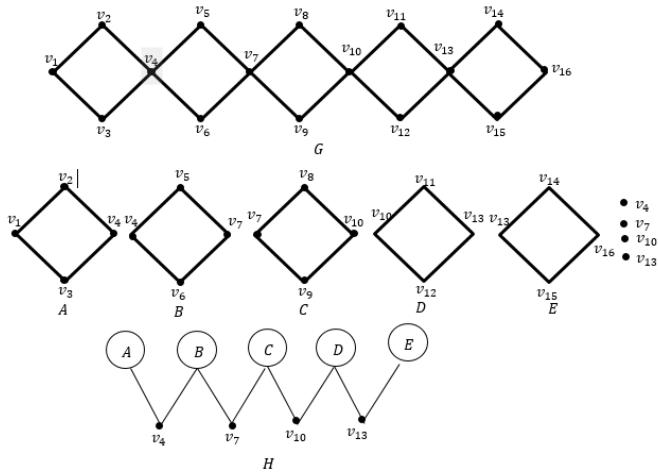
(Baca, et al. 2007).

Titik $v \in V(G)$ adalah titik potong (*cut-vertex*) dari graf G jika graf $G - v$ graf yang tidak terhubung (Fauziah, 2017).

Blok pada graf $G = (V, E)$ adalah maksimal subgraf yang terhubung $H \subseteq G$, sedemikian sehingga H tidak memiliki titik potong (*cut-vertex*), sehingga dapat dikatakan bahwa sebuah blok merupakan subgraf yang memiliki anggota himpunan sisi sebanyak mungkin dan tidak memiliki titik potong (*cut-vertex*). Blok dapat berupa K_2 maupun graf yang mengandung graf siklus. Sebagai contoh semua blok pada graf pohon merupakan K_2 (Fauziah, 2017).

Jika $G = (V, E)$ adalah graf, maka graf *block cut-vertex* dari graf G adalah graf bipartit sederhana dengan bipartisi (A, B) dimana A adalah himpunan *cut-vertex* di G dan B adalah himpunan blok di G . berdasarkan definisi tersebut maka *Block cut-vertex* dari suatu graf G adalah

graf H yang titik-titiknya adalah blok dan titik potong dari G , dimana dua titik bertetangga di H jika dan hanya jika satu titik berupa titik potong (di G) dan titik lainnya adalah blok (di G) yang memuat titik potong tersebut (Barefoot, 2002). Contoh graf dengan *block cut-vertex* berupa graf lintasan diberikan pada Gambar 1.



Gambar 1. Graf dengan *blok cut-vertex* berupa graf lintasan

Definisi 1

Graf rantai didefinisikan sebagai graf yang terdiri dari blok-blok $B_1, B_2, B_3, \dots, B_k$, $k \geq 2$, sehingga untuk setiap i , $1 \leq i < k - 1$, B_i dan B_{i+1} beririsan pada tepat satu titik sehingga *block cut-vertex* grafnya adalah graf lintasan (Barrientos, 2002).

Pada Gambar 1 menunjukkan Graf G adalah sebuah graf rantai yang terdiri dari lima blok graf siklus yaitu A, B, C, D, dan E yang dihubungkan oleh empat buah

titik potong yaitu v_4, v_7, v_{10} , dan v_{13} serta graf H adalah *block cut-vertex* dari graf G yang membentuk graf lintasan.

METODE

Metode yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah studi pustaka, dengan cara mengumpulkan referensi yang dapat mendukung pembahasan.

Oleh karena itu, untuk mencapai tujuan penulisan, diambil langkah-langkah sebagai berikut:

I. Menentukan *tes* dan pola pelabelan pada graf rantai nonagon $C(N_r)$ dan graf rantai nonagon dengan sisi pendek $C(N_r^s)$ dengan $s = 3$ dan 6 .

(i) Menyajikan konsep dasar graf rantai nonagon $C(N_r)$, graf rantai nonagon dengan tiga sisi pendek $C(N_r^3)$, dan graf rantai nonagon dengan enam sisi pendek $C(N_r^6)$.

(ii) Menentukan batas bawah *tes* berdasarkan teorema:

$$\begin{aligned} tes(C(N_r)) &\geq \left\lceil \frac{9r+2}{3} \right\rceil, \\ tes(C(N_r^3)) &\geq \left\lceil \frac{12r+2}{3} \right\rceil, \\ tes(C(N_r^6)) &\geq \left\lceil \frac{15r+2}{3} \right\rceil. \end{aligned}$$

(iii) Simulasi pelabelan total tak teratur sisi dengan percobaan *trail and error* dimulai dari graf dengan jumlah sisi kecil sampai dengan diperoleh pola pelabelan yang tetap.

Tahapan-tahapan melabeli titik dan sisi sebagai berikut.

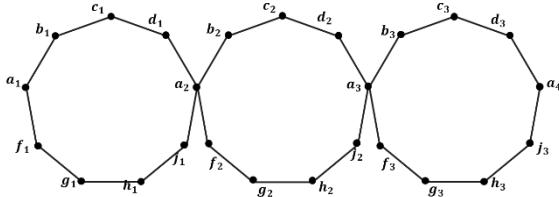
- Menyalahgunakan titik-titik pada graf dimulai dengan rantai pertama dengan label terkecil.
- Menyalahgunakan sisi-sisi pada graf dimulai dengan rantai pertama dengan label terkecil.
- Menentukan deret label titik pada graf.
- Menentukan deret label sisi pada graf.

- (iv) Mengkonstruksi formula untuk label titik, label sisi dan bobot total sisi.
- (v) Menentukan nilai eksak *tes* yaitu nilai k yang memenuhi $k \leq \text{tes} \leq k$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Graf Rantai Nonagon $C(N_r)$

Graf rantai disebut graf rantai nonagon, disimbolkan $C(N_r)$, jika setiap *cycle* berbentuk *cycle* C_9 dan tiap dua *cycle* memiliki paling banyak satu titik potong. Contoh graf rantai nonagon $C(N_3)$ diberikan pada Gambar 2.



Gambar 2. Graf rantai nonagon $C(N_3)$

Hasil *tes* dari graf rantai nonagon $C(N_r)$ diberikan pada Teorema 2.

Teorema 2

Misalkan $C(N_r)$, $r \geq 1$ adalah graf rantai nonagon, maka

$$\text{tes}(C(N_r)) = \left\lceil \frac{9r+2}{3} \right\rceil$$

Bukti. Berdasarkan batas bawah pada Teorema 1, diperoleh batas bawah

$$\text{tes}(C(N_r)) \geq \left\lceil \frac{|E(C(N_r))|+2}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{9r+2}{3} \right\rceil$$

untuk $r \geq 1$

Diketahui graf rantai nonagon $C(N_r)$ dengan

$$V(C(N_r)) = \{a_i, b_i, c_i, d_i, f_i, g_i, h_i, j_i, a_{i+1}\}$$

$$E(C(N_r))$$

$$= \{a_i b_i, b_i c_i, c_i d_i, d_i a_{i+1}, a_i f_i, f_i g_i, g_i h_i, h_i j_i, j_i a_{i+1}\}$$

untuk $i = 1, 2, 3, \dots, r$

Akan dibuktikan batas atas

$$\text{tes}(C(N_r)) \leq \left\lceil \frac{|E(C(N_r))|+2}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{9r+2}{3} \right\rceil$$

dengan mengkonstruksi pelabelan-k total tak teratur sisi $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ dengan $k = \left\lceil \frac{9r+2}{3} \right\rceil$ dan ditunjukkan setiap sisi graf rantai nonagon $C(N_r)$ mempunyai bobot yang berbeda diberikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Formula Pelabelan Titik, Pelabelan Sisi, dan Bobot Sisi pada Graf Rantai Nonagon $C(N_r)$

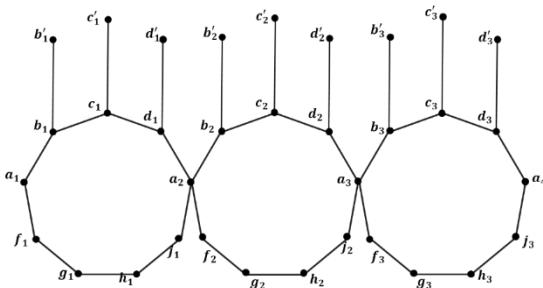
Pelabelan Titik	Pelabelan Sisi	Bobot Sisi
$\forall i = 1, 2, 3, \dots, r$	$\forall i = 1, 2, 3, \dots, r$	$\forall i = 1, 2, 3, \dots, r$
$f(a_i) = 3i - 2$	$f(a_i b_i) = 3i - 2$	$w(a_i b_i) = 9i - 6,$
$f(b_i) = 3i - 2$	$f(b_i c_i) = 3i - 1$	$w(b_i c_i) = 9i - 5$
$f(c_i) = 3i - 2$	$f(c_i d_i) = 3i$	$w(c_i d_i) = 9i - 4$
$f(d_i) = 3i - 2$	$f(d_i a_{i+1}) = 3i - 2$	$w(d_i a_{i+1}) = 9i - 3$
$f(a_{i+1}) = 3i + 1$	$f(a_i f_i) = 3i$	$w(a_i f_i) = 9i - 2$
$f(f_i) = 3i$	$f(f_i g_i) = 3i - 1$	$w(f_i g_i) = 9i - 1$
$f(g_i) = 3i$	$f(g_i h_i) = 3i$	$w(g_i h_i) = 9i$
$f(h_i) = 3i$	$f(h_i j_i) = 3i + 1$	$w(h_i j_i) = 9i + 1$
$f(j_i) = 3i$	$f(j_i a_{i+1}) = 3i + 1$	$w(j_i a_{i+1}) = 9i + 2$

Oleh karena f merupakan pelabelan- k total dan untuk setiap dua sisi berbeda, bobot sisinya juga berbeda, artinya f merupakan pelabelan- k total tak teratur sisi dengan label terbesarnya adalah $k = \left\lceil \frac{9r+2}{3} \right\rceil$. Jadi, terbukti bahwa $\text{tes}(C(N_r)) = \left\lceil \frac{9r+2}{3} \right\rceil$ untuk $r \geq 1$.

Contoh pelabelan-16 total tak teratur sisi pada graf rantai nonagon $C(N_5)$ disajikan dalam Gambar 5.

Graf Rantai Nonagon dengan Tiga Sisi Pendan $C(N_r^3)$

Graf rantai disebut graf rantai nonagon dengan tiga sisi pendan, disimbolkan $C(N_r^3)$, jika setiap cycle berbentuk cycle C_9 , tiap dua cycle memiliki paling banyak satu titik potong dan terdapat tiga sisi pendan pada setiap cycle. Misal $V(G) = \{a_i, b_i, c_i, d_i, a_{i+1}, \dots, j_i\}$. Titik pendan b'_i bertetangga dengan b_i , titik pendan c'_i bertetangga dengan c_i , dan titik pendan d'_i bertetangga dengan d_i , untuk $i = 1, 2, 3, \dots, r$. Contoh graf rantai nonagon dengan tiga sisi pendan $C(N_3^3)$ diberikan pada Gambar 3.



Gambar 3. Graf rantai nonagon dengan tiga sisi pendan $C(N_3^3)$

Hasil tes dari graf rantai nonagon dengan tiga sisi pendan $C(N_r^3)$ diberikan pada Teorema 3.

Teorema 3

Misalkan $C(N_r^3)$, $r \geq 1$ adalah graf rantai nonagon dengan tiga sisi pendan, maka

$$\text{tes}(C(N_r^3)) = \left\lceil \frac{12r+2}{3} \right\rceil$$

Bukti. Berdasarkan batas bawah pada Teorema 1, diperoleh batas bawah

$$\text{tes}(C(N_r^3)) \geq \left\lceil \frac{|E(C(N_r^3))|+2}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{12r+2}{3} \right\rceil$$

untuk $r \geq 1$

Diketahui graf rantai nonagon dengan tiga sisi pendan $C(N_r^3)$ dengan

$$V(C(N_r^3)) =$$

$$\{a_i, b_i, b'_i, c_i, c'_i, d_i, d'_i, f_i, g_i, h_i, j_i, a_{i+1}\}$$

$$E(C(N_r^3)) =$$

$$\{a_i b_i, b_i b'_i, b'_i c_i, c_i c'_i, c'_i d_i, d_i d'_i, d'_i a_{i+1}, a_i f_i, f_i g_i, g_i h_i, h_i j_i, j_i a_{i+1}\}$$

untuk $i = 1, 2, 3, \dots, r$

Akan dibuktikan batas atas

$$\text{tes}(C(N_r^3)) \leq \left\lceil \frac{|E(C(N_r^3))|+2}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{12r+2}{3} \right\rceil$$

dengan mengkonstruksi pelabelan- k total tak teratur sisi $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ dengan $k = \left\lceil \frac{12r+2}{3} \right\rceil$ dan ditunjukkan setiap sisi graf rantai nonagon dengan tiga sisi pendan $C(N_r^3)$ mempunyai bobot yang berbeda diberikan pada Tabel 2.

Tabel 2. Formula Pelabelan Titik, Pelabelan Sisi, dan Bobot Sisi pada Graf Rantai Nonagon dengan Tiga Sisi Pendan $C(N_r^3)$

Pelabelan Titik	Pelabelan Sisi	Bobot Sisi
$\forall i = 1, 2, 3, \dots, r$	$\forall i = 1, 2, 3, \dots, r$	$\forall i = 1, 2, 3, \dots, r$
$f(a_i) = 4i - 3$	$f(a_i b_i) = 4i - 3$	$w(a_i b_i) = 12i - 9$
$f(b_i) = 4i - 3$	$f(b_i b'_i) = 4i - 2$	$w(b_i b'_i) = 12i - 8$
$f(b'_i) = 4i - 3$	$f(b_i c_i) = 4i - 1$	$w(b_i c_i) = 12i - 7$
$f(c_i) = 4i - 3$	$f(c_i c'_i) = 4i$	$w(c_i c'_i) = 12i - 6$
$f(c'_i) = 4i - 3$	$f(c_i d_i) = 4i + 1$	$w(c_i d_i) = 12i - 5$
$f(d_i) = 4i - 3$	$f(d_i d'_i) = 4i + 1$	$w(d_i d'_i) = 12i - 4$
$f(d'_i) = 4i - 2$	$f(d_i a_{i+1}) = 4i - 1$	$w(d_i a_{i+1}) = 12i - 3$
$f(a_{i+1}) = 4i + 1$	$f(a_i f_i) = 4i + 1$	$w(a_i f_i) = 12i - 2$
$f(f_i) = 4i$	$f(f_i g_i) = 4i - 1$	$w(f_i g_i) = 12i - 1$
$f(g_i) = 4i$	$f(g_i h_i) = 4i$	$w(g_i h_i) = 12i$
$f(h_i) = 4i$	$f(h_i j_i) = 4i + 1$	$w(h_i j_i) = 12i + 1$
$f(j_i) = 4i$	$f(j_i a_{i+1}) = 4i + 1$	$w(j_i a_{i+1}) = 12i + 2$

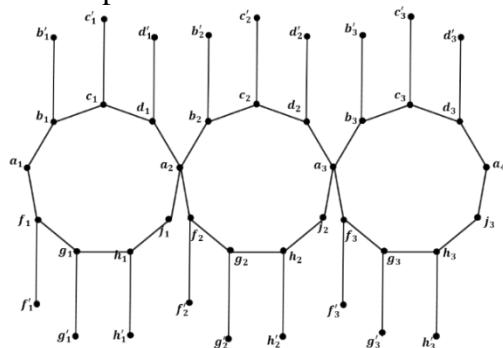
Oleh karena f merupakan pelabelan- k total dan untuk setiap dua sisi berbeda, bobot sisinya juga berbeda, artinya f merupakan pelabelan- k total tak teratur sisi dengan label terbesarnya adalah $k = \left\lceil \frac{12r+2}{3} \right\rceil$. Jadi, terbukti bahwa $tes(C(N_r^3)) = \left\lceil \frac{12r+2}{3} \right\rceil$ untuk $r \geq 1$.

Contoh pelabelan-21 total tak teratur sisi pada graf rantai nonagon dengan tiga sisi pendan $C(N_5^3)$ disajikan dalam Gambar 6.

Graf Rantai Nonagon dengan Enam Sisi Pendan $C(N_r^6)$

Graf rantai disebut graf rantai nonagon dengan enam sisi pendan, disimbolkan $C(N_r^6)$ jika setiap cycle berbentuk cycle C_9 , tiap dua cycle memiliki paling banyak satu titik potong dan terdapat enam sisi pendan pada setiap cycle. Misal $V(G) = \{a_i, b_i, c_i, d_i, a_{i+1}, \dots, j_i\}$. Titik pendan b'_i bertetangga dengan b_i , titik pendan c'_i bertetangga dengan c_i ,

titik pendan d'_i bertetangga dengan d_i , titik pendan f'_i bertetangga dengan f_i , titik pendan g'_i bertetangga dengan g_i , dan titik pendan h'_i bertetangga dengan h_i untuk $i = 1, 2, 3, \dots, r$. Contoh graf rantai nonagon dengan enam sisi pendan $C(N_3^6)$ diberikan pada Gambar 4.



Gambar 4. Graf rantai nonagon dengan enam sisi pendan $C(N_3^6)$

Hasil tes dari graf rantai nonagon dengan enam sisi pendan $C(N_r^6)$ diberikan pada Teorema 4.

Teorema 4

Misalkan $C(N_r^6)$, $r \geq 1$ adalah graf rantai nonagon dengan enam sisi pendan, maka

$$tes(C(N_r^6)) = \left\lceil \frac{15r+2}{3} \right\rceil$$

Bukti. Berdasarkan batas bawah pada Teorema 1, diperoleh batas bawah

$$tes(C(N_r^6)) \geq \left\lceil \frac{|E(C(N_r^6))|+2}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{15r+2}{3} \right\rceil$$

untuk $r \geq 1$

Diketahui graf rantai nonagon dengan enam sisi pendan $C(N_r^6)$ dengan

$$V(C(N_r^6)) =$$

$$\{a_i, b_i, b'_i, c_i, c'_i, d_i, d'_i, f_i, f'_i, g_i, g'_i, h_i, h'_i, j_i, a_{i+1}\}$$

$$E(C(N_r^6)) = \\ \{a_i b_i, b_i b'_i, b_i c_i, c_i c'_i, c_i d_i, d_i d'_i, d_i a_{i+1}, a_i f_i, f_i f'_i, f_i g_i, g_i g'_i, g_i h_i, h_i h'_i, h'_i j_i, j_i a_{i+1}\}$$

untuk $i = 1, 2, 3, \dots, r$.

Akan dibuktikan batas atas

$$tes(C(N_r^6)) \leq \left\lceil \frac{|E(C(N_r^6))|+2}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{15r+2}{3} \right\rceil$$

dengan mengkonstruksi pelabelan- k total tak teratur sisi $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ dengan $k = \left\lceil \frac{15r+2}{3} \right\rceil$ dan ditunjukkan setiap sisi graf rantai nonagon dengan enam sisi pendan $C(N_r^6)$ mempunyai bobot yang berbeda diberikan pada Tabel 3.

Tabel 3. Formula Pelabelan Titik, Pelabelan Sisi, dan Bobot Sisi pada Graf Rantai Nonagon dengan Enam Sisi Pendan $C(N_r^6)$

Pelabelan Titik	Pelabelan Sisi	Bobot Sisi
$\forall i = 1, 2, 3, \dots, r$	$\forall i = 1, 2, 3, \dots, r$	$\forall i = 1, 2, 3, \dots, r$
$f(a_i) = 5i - 4$	$f(a_i b_i) = 5i - 4$	$w(a_i b_i) = 15i - 12$
$f(b_i) = 5i - 4$	$f(b_i b'_i) = 5i - 3$	$w(b_i b'_i) = 15i - 11$
$f(b'_i) = 5i - 4$	$f(b_i c_i) = 5i - 2$	$w(b_i c_i) = 15i - 10$
$f(c_i) = 5i - 4$	$f(c_i c'_i) = 5i - 1$	$w(c_i c'_i) = 15i - 9$
$f(c'_i) = 5i - 4$	$f(c_i d_i) = 5i$	$w(c_i d_i) = 15i - 8$
$f(d_i) = 5i - 4$	$f(d_i d'_i) = 5i$	$w(d_i d'_i) = 15i - 7$
$f(d'_i) = 5i - 3$	$f(d_i a_{i+1}) = 5i - 3$	$w(d_i a_{i+1}) = 15i - 6$
$f(a_{i+1}) = 5i + 1$	$f(a_i f_i) = 5i - 1$	$w(a_i f_i) = 15i - 5$
$f(f_i) = 5i$	$f(f_i f'_i) = 5i - 4$	$w(f_i f'_i) = 15i - 4$
$f(f'_i) = 5i$	$f(f_i g_i) = 5i - 3$	$w(f_i g_i) = 15i - 3$
$f(g_i) = 5i$	$f(g_i g'_i) = 5i - 2$	$w(g_i g'_i) = 15i - 2$
$f(g'_i) = 5i$	$f(g_i h_i) = 5i - 1$	$w(g_i h_i) = 15i - 1$
$f(h_i) = 5i$	$f(h_i h'_i) = 5i$	$w(h_i h'_i) = 15i$
$f(h'_i) = 5i$	$f(h_i j_i) = 5i + 1$	$w(h_i j_i) = 15i + 1$
$f(j_i) = 5i$	$f(j_i a_{i+1}) = 5i + 1$	$w(j_i a_{i+1}) = 15i + 2$

Oleh karena f merupakan pelabelan- k total dan untuk setiap dua sisi berbeda, bobot sisinya juga berbeda, artinya f merupakan pelabelan- k total tak teratur sisi dengan label terbesarnya adalah $k = \left\lceil \frac{15r+2}{3} \right\rceil$. Jadi, terbukti bahwa $\text{tes}(C(N_r^6)) = \left\lceil \frac{15r+2}{3} \right\rceil$ untuk $r \geq 1$.

Contoh pelabelan-26 total tak teratur sisi pada graf rantai nonagon dengan enam sisi pendan $C(N_5^6)$ disajikan dalam Gambar 7.

PENUTUP

Dalam penelitian ini diperoleh kesimpulan, yaitu nilai ketakteraturan sisi total dari graf rantai nonagon $C(N_r)$, graf rantai nonagon dengan tiga sisi pendan $C(N_r^3)$, dan graf rantai nonagon dengan

enam sisi pendan $C(N_r^6)$ untuk suatu bilangan bulat positif $r \geq 1$, dapat ditentukan sebagai berikut :

- a. Nilai ketakteraturan sisi total dari graf rantai nonagon $C(N_r)$ adalah

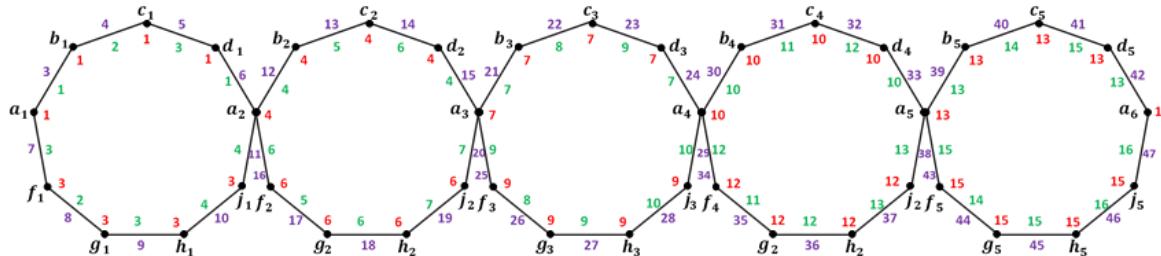
$$\text{tes}(C(N_r)) = \left\lceil \frac{9r+2}{3} \right\rceil.$$

- b. Nilai ketakteraturan sisi total dari graf rantai nonagon dengan tiga sisi pendan $C(N_r^3)$ adalah

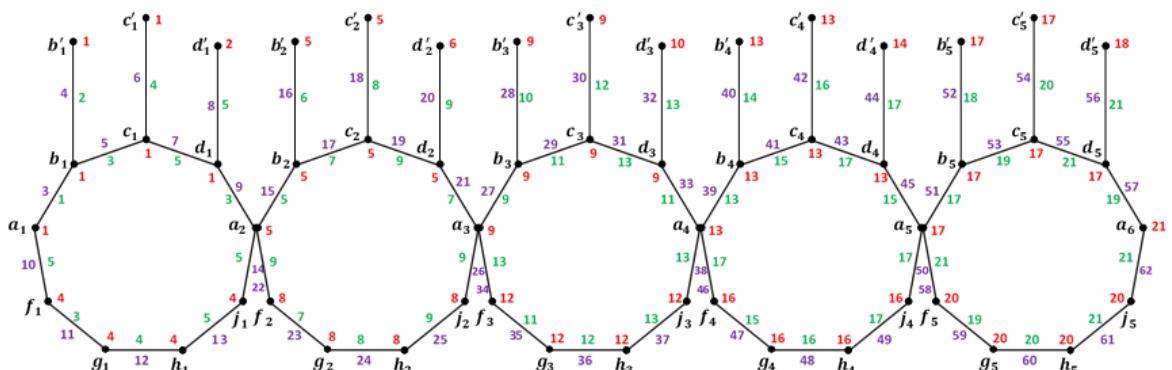
$$\text{tes}(C(N_r^3)) = \left\lceil \frac{12r+2}{3} \right\rceil.$$

- c. Nilai ketakteraturan sisi total dari graf rantai nonagon dengan enam sisi pendan $C(N_r^6)$ adalah

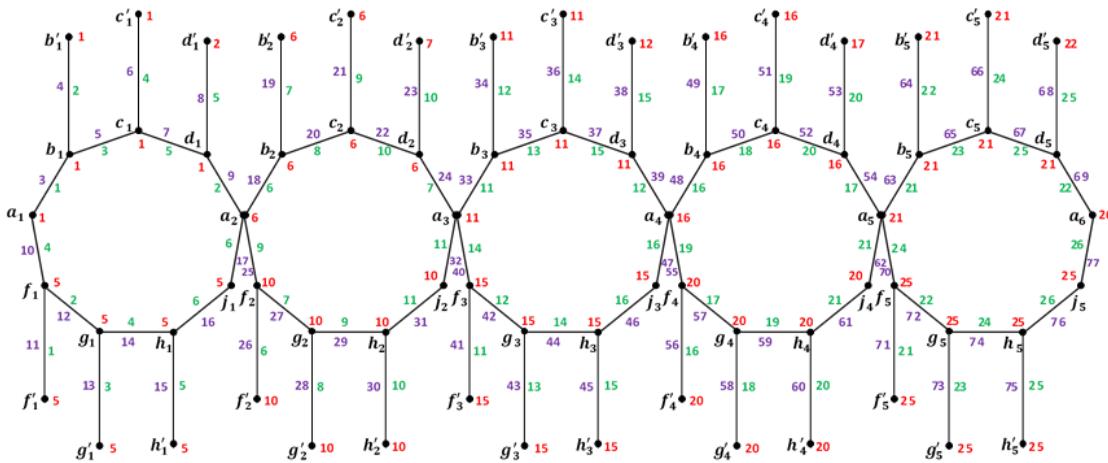
$$\text{tes}(C(N_r^6)) = \left\lceil \frac{15r+2}{3} \right\rceil.$$



Gambar 5. Contoh pelabelan-16 total tak teratur sisi pada graf rantai nonagon $C(N_5)$



Gambar 6. Contoh pelabelan-21 total tak teratur sisi pada graf rantai nonagon dengan tiga sisi pendan $C(N_5^3)$



Gambar 7. Contoh pelabelan-26 total tak teratur sisi pada graf rantai nonagon dengan enam sisi pendan $C(N_5^6)$

Keterangan: = label titik = label sisi = bobot sisi

DAFTAR PUSTAKA

Al-Mushayt, O. & Ahmad. (2012). On The Total Edge Irregularity Strength of Hexagonal Grid Graphs. *Australasian Journal Of Combinatorics*, 53, 263-71.

Arockiamary, S.T. (2016). Total Edge Irregularity Strength of Diamond Snake and Dove, *IJPAM*, 109, 125-132.

Baca, M., Jendrol, S., Miller, M., Ryan, J. (2007). On Irregular Total Labeling. *Discrete Math*, 307, 1378-1388.

Baca, M. & Siddiqui, M.K. (2014). Total Edge Irregularity Strength of Generalized Prism. *Applied Mathematics and Computation*, 235, 168-173.

Barefoot, C. (2002). Block Cut-Vertex Trees and Block Cut-Vertex Partitions. *Departments of Mathematics and Computer Science*, 35-54.

Barrientos, C. (2002). Graceful Labeling of Chain and Corona Graphs. *Bulletin ICA*, 3434, 17- 26

Dubrov, B. (2000). *Some Application of Graph in ChemistryI*. (<http://Pubs.acs.org>), tanggal akses : 15 Juni 2019.

Fauziah, G. N. (2017). *Algoritma Pelabelan Total Tidak Teratur Sisi Pada Graf Rantai Siklus*. Thesis. Makassar: Program Pascasarjana-Unhas.

Ismiyanti, Sudarsana, I.W. & Musdalifah, S. (2013). Pelabelan Prime Cordial pada Graf Prisma dan Graf Terhubung antar Pusat pada Graf Roda. *JIMT*, 10(1), 43-54.

Kusumawardana, M. (2009). *Applikasi Teori Graf pada Analisis Jejaring sosial*. ITB. Bandung.

Munir, R. (2003). *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika.

Rosyida, I. & Indriati, D. (2019). On Total Irregularity Strength of Some Cactus Chain Graphs with Pendant

Vertices. *Journal of Phisycs: Conference Series* 1211(1), 012016

Susmikanti, M. (2006). *Komputasi Komputer Terhubung dan Jalur Terpendek dalam Algoritma Paralel*. Pusat Pengembangan Informatika Teknologi Nuklir. BATAN.

Wallis, W. D. (2001). *Magic Graph*. Boston: Birkhauser.