



NILAI KETAKTERATURAN TITIK TOTAL PADA GRAF *DOVE TAIL* DENGAN TITIK PENDAN DAN GRAF RANTAI KAKTUS *CYCLE C₈* DENGAN TITIK PENDAN

Charisma Fitra Andriyan[✉] dan Isnaini Rosyida

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Indonesia
Gedung D7 Lt. 1, Kampus Sekaran Gunungpati, Semarang 50229

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima
Disetujui
Dipublikasikan

Abstrak

Diketahui graf G dengan himpunan titik tak kosong $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Pelabelan $\lambda : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ dikatakan pelabelan-k total tak teratur titik di G , jika setiap dua titik berbeda x dan y memenuhi $wt(x) \neq wt(y)$. Bobot titik v pada pelabelan total λ adalah $wt(v) = \lambda(v) + \sum_{uv \in E} \lambda(uv)$. Pada artikel ini, diselidiki nilai ketakaturan titik total (tv_s) pada graf *Dove Tail* dengan titik pendan $T(D)_n$ dan nilai ketakaturan titik total (tv_s) pada graf rantai kaktus *cycle C₈* dengan titik pendan $C(C_8)_r$. Hasil dari penelitian ini adalah $tv_s T(D)_n = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil, n \geq 3$ dan $tv_s C(C_8)_r = 2r + 1, r \geq 2$.

Abstract

Given graph G with a non-empty vertex set of $V(G)$ and an edge set of $E(G)$. A total labelling $\lambda : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ is called a vertex irregular total labelling of G , if every two different vertices x and y on V have different weights $wt(x) \neq wt(y)$. Weight of e in total labelling λ is $wt(xy) = \lambda(xy) + \lambda(x) + \lambda(y)$. In this paper, authors investigate the total vertex irregularity strength (tv_s) of *Dove Tail* graph with pendant vertices $T(D)_n$ and total vertex irregularity strength (tv_s) of cactus chain *cycle C₈* graph with pendant vertices $C(C_8)_r$. The results of this research are $tv_s T(D)_n = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil, n \geq 3$ and $tv_s C(C_8)_r = 2r + 1, r \geq 2$.

Keywords:

Irregular total labeling, Graph labeling, irregularity strength, total vertex irregularity strength, dove tail graphs.

PENDAHULUAN

Walaupun sudah cukup usia namun teori graf yang merupakan salah satu cabang ilmu matematika masih memiliki banyak manfaat dalam kehidupan. Zaman sekarang, permasalahan-permasalahan yang ada dalam kehidupan nyata pun masih dapat diselesaikan dengan menerapkan teori graf (Satyanuraga, 2016).

Berjalannya waktu penerapan teori graf dalam kehidupan terus berkembang. Graf dapat digunakan dalam bidang jaringan komunikasi, penentuan jadwal, jalur transportasi, *game*, *puzzle*, pelabelan, rangkaian listrik, turnamen round-robin, pemodelan *vending machine* dan lain-lain (Ghassani, 2015).

Label ajaib adalah hal yang menarik yang ditemukan dalam buku "*Magic Graphs*" (Marr & Wallis, 2013). Karena meskipun hanya berawal dari himpunan titik dan himpunan sisi yang menghubungkan titik-titik tersebut, darinya bisa disusun bilangan-bilangan ajaib. Masing-masing bilangan yang merupakan bilangan bulat positif akan diletakkan pada setiap titik atau sisi-sisinya.

Hal inilah yang disebut pelabelan pada graf. Ada beberapa jenis pelabelan, diantaranya pelabelan *gracefull*, pelabelan harmoni, pelabelan tak teratur, pelabelan ajaib, dan pelabelan anti ajaib. Pelabelan total tak teratur diperkenalkan oleh Baca dkk. (2007). Ada tiga jenis pelabelan total tak teratur yang diperkenalkan oleh mereka yaitu pelabelan total tak teratur titik, pelabelan total tak teratur sisi dan pelabelan total tak teratur total.

Pelabelan total tak teratur titik adalah pelabelan dari titik dan sisi graf G dengan label dari $\{1, 2, \dots, k\}$ sedemikian sehingga ada dua titik x dan y berbeda dan bobot $wt(x)$ dan $wt(y)$ juga berbeda. Bobot $wt(x)$ dari titik x adalah penjumlahan dari pelabelan titik x dan pelabelan semua sisi yang bersisian dengan titik x . Nilai minimum k pada graf G yang diberi label disebut dengan nilai ketakteraturan titik total, dinotasikan dengan $tv_s(G)$. Batas bawah untuk nilai tv_s suatu graf sudah dituliskan oleh Baca dkk. (2007)

Beberapa peneliti sudah mengkaji tentang nilai ketakteraturan titik total seperti Al-Mushayt dkk. (2013) membahas tentang nilai ketakteraturan titik total pada graf cembung *polytope*. Pembuktian nilai ketakteraturan titik total untuk sembarang hutan T dengan titik pendaan oleh Anholcer dkk. (2011). Indriati (2016) juga membuktikan nilai ketakteraturan titik total untuk prisma (P_n) dengan titik pendaan. Rosyida dkk. (2019) juga meneliti tentang nilai ketakteraturan titik

total pada graf *Tadpole Chain* dan komputasinya.

Aplikasi dari konsep pelabelan total tak teratur titik ini dapat dijumpai dalam berbagai bidang diantaranya dalam representasi senyawa kimia, masalah pengenalan pola, jaringan komputer, struktur data, dan lainnya.

Menurut Baca (2007), suatu graf $G = (V, E)$ dengan himpunan titik tak kosong V dan himpunan sisi E . $\lambda : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ dikatakan pelabelan- k total ketakteraturan titik di G , jika setiap dua titik berbeda x dan y di V memenuhi $wt(x) \neq wt(y)$. Nilai total ketakteraturan titik dari graf G yaitu label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan total tak teratur titik, yang dinotasikan dengan $tv_s(G)$.

Teorema 1

Misalkan graf $G = (p, q)$ dengan derajat minimum δ dan derajat maksimum Δ , maka

$$\left\lceil \frac{p+\delta}{\Delta+1} \right\rceil \leq tv_s(G) \leq p + \Delta - 2\delta + 1 \dots \dots \dots (1)$$

(Baca, Jendrol, Miller, & Ryan, 2007)

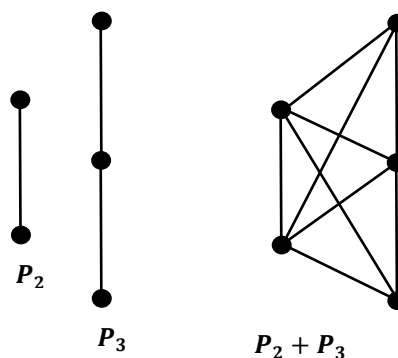
Teorema 2

Misalkan G graf terhubung dengan n titik, dengan derajat minimum δ dan derajat maksimum Δ , maka

$$tv_s(G) \geq \max \left\{ \left\lceil \frac{\delta+n\delta}{\delta+1} \right\rceil, \left\lceil \frac{\delta+n\delta+n\delta+1}{\delta+2} \right\rceil, \dots, \left\lceil \frac{\delta+\sum_{i=\delta}^{\Delta} n_i}{\Delta+1} \right\rceil \right\} \dots (2)$$

(Nurdin, Baskoro, Salman, & Gaos, 2010).

Join dari dua graf yang dinotasikan $P_2 + P_3$ didefinisikan sebagai $P_2 \cup P_3$ dan semua sisi uv , dengan $u \in V(P_2)$ dan $v \in V(P_3)$ (Chartrand dan Oellermann, 1993).



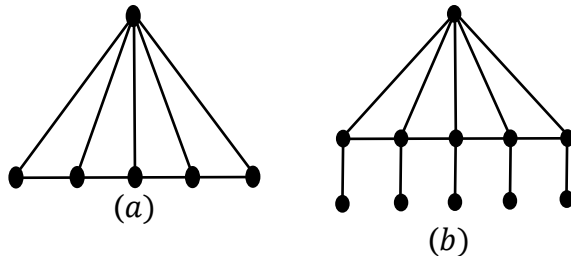
Gambar 1. Join pada Graf

Graf lintasan adalah graf sederhana yang terdiri dari lintasan tunggal. Graf path

dengan n titik dinotasikan dengan P_n . P_n memiliki $n - 1$ sisi.

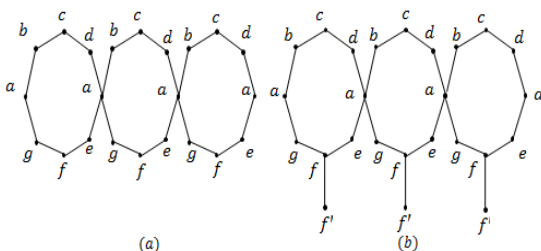
Graf *cycle* adalah graf sederhana yang berbentuk *cycle* tunggal dan setiap titiknya berderajat dua. Graf *cycle* dengan n titik dinotasikan dengan C_n , $n \geq 3$.

Menurut Arockiamary (2016), graf *dove tail* D_n adalah graf $P_n + K_1$, $n \geq 2$. Graf *dove tail* memiliki $(n + 1)$ titik dan $(2n - 1)$ sisi. Sedangkan graf *dove tail* D_n dengan titik pendaan adalah graf $P_n + K_1$, $n \geq 2$ yang memiliki titik pendaan yang bertetangga dengan semua titik dalam graf lintasan P_n . Graf *dove tail* dengan titik pendaan memiliki $(2n + 1)$ titik dan $[2n + (n - 1)]$ sisi. Gambar 3 merupakan contoh graf *dove tail* $P_5 + K_1$ dan graf *dove tail* $P_5 + K_1$ dengan titik pendaan.



Gambar 2. (a) Graf Dove Tail $P_5 + K_1$ (b) Graf Dove Tail $P_5 + K_1$ dengan titik pendaan

Graf kaktus merupakan graf terhubung yang setiap sisinya hanya berada pada satu *cycle*. Oleh karena itu, graf kaktus memiliki beberapa *cycle*. Graf kaktus disebut graf kaktus *cycle* C_n jika tiap *cycle* memiliki ukuran yang sama. Jika setiap *cycle* memiliki paling banyak dua titik potong dan tiap dua *cycle* memiliki paling banyak satu titik potong maka disebut graf rantai kaktus *cycle* C_n . Sedangkan graf rantai kaktus *cycle* C_n dengan titik pendaan adalah graf rantai kaktus *cycle* C_n yang memiliki satu titik pendaan pada tiap *cycle*. Titik pendaan f' harus bertetangga dengan titik f (Rosyida & Indriati, 2019). Gambar 2.13 merupakan contoh graf rantai kaktus *cycle* C_8 dan graf rantai kaktus *cycle* C_8 dengan titik pendaan.



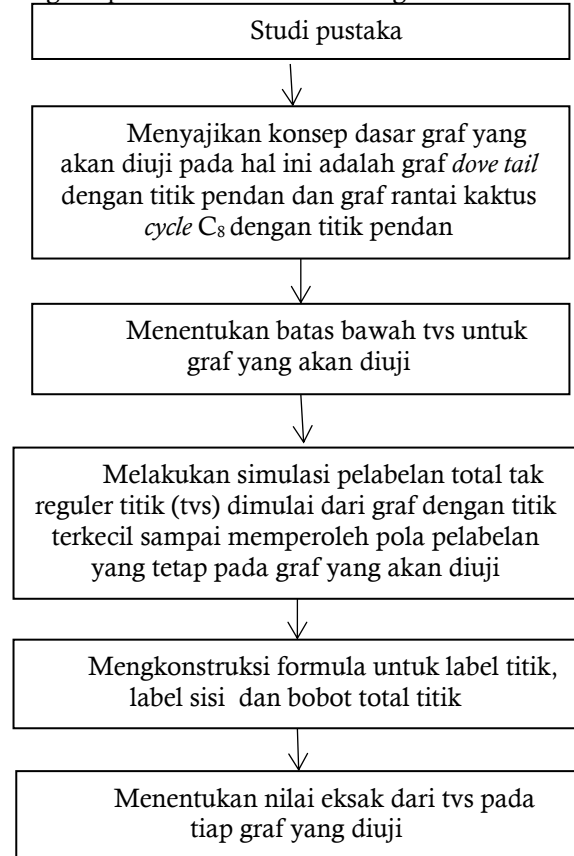
Gambar 3. (a) Graf Rantai Kaktus Cycle C_8 (b) Graf Rantai Kaktus Cycle C_8 dengan titik pendaan

METODE

Pada tahap awal, penulis membaca dan menelaah beberapa sumber pustaka. Dari kajian tersebut, penulis menemukan permasalahan umum yaitu pelabelan pada graf. Permasalahan ini masih terlalu luas, sehingga diperlukan rumusan masalah yang lebih spesifik.

Studi pustaka adalah menelaah sumber pustaka yang relevan digunakan untuk mengumpulkan informasi yang diperlukan dalam penelitian. Studi pustaka diambil dengan mengumpulkan sumber pustaka yang dapat berupa buku, jurnal ilmiah, *ebook*, dsb. Setelah sumber pustaka terkumpul dilanjutkan dengan penelaahan dari sumber pustaka tersebut. Pada akhirnya sumber pustaka ini dijadikan landasan untuk menganalisis permasalahan.

Setelah mengkaji beberapa sumber pustaka, selanjutnya dilakukan langkah-langkah pemecahan masalah sebagai berikut:

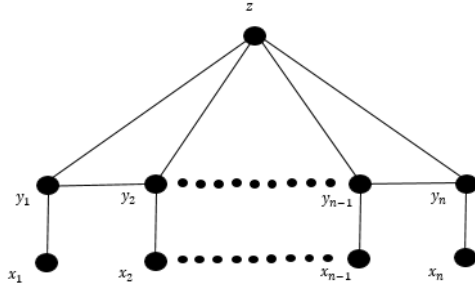


HASIL DAN PEMBAHASAN

Graf Dove Tail dengan Titik Pendaan

Graf *dove tail* dengan titik pendaan $T(D)_n$ didefinisikan sebagai perumusan graf *dove tail* $P_n + K_1$, $n \geq 2$ yang memiliki titik pendaan dimana tiap titik pendannya bertetangga dengan titik dalam graf lintasan P_n . Graf *dove tail* dengan titik pendaan memiliki $(2n + 1)$ titik

dan $[2n + (n - 1)]$ sisi. Berikut adalah contoh graf *dove tail* D_n dengan titik pendaan



Gambar 4. Graf Dove Tail dengan Titik Pendaan

Teorema 1

Misal $(D)_n = P_n + K_1$, sedangkan $T(D)_n$ adalah $(D)_n$ dengan titik pendaan, maka nilai $\text{tvs } T(D)_n, n \geq 3 = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$.

Bukti:

Berdasarkan penelitian Nurdin dkk, diperoleh bahwa nilai $\text{tvs } T(D)_n \geq \text{maks} \left\{ \left\lfloor \frac{\delta+n\delta}{\delta+1} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{\delta+n\delta+n\delta+1}{\delta+2} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{\delta+\sum_{i=\delta}^{\Delta} n_i}{\Delta+1} \right\rfloor \right\} = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$, untuk $n \geq 3$. Diberikan z merupakan titik dari K_1 pada graf *dove tail* dengan titik pendaan, y_i untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$ merupakan titik pada graf lintasan P_n , dan x_i untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$ merupakan titik pendaan pada graf *dove tail* dengan titik pendaan. Akan ditunjukkan batas atas $\text{tvs } T(D)_n$ dengan mengkonstruksi pelabelan- k total tak teratur titik $\lambda: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ dengan $k = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ sebagai berikut:

$$\lambda(x_i) = \begin{cases} i, & \text{untuk } 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor. \\ n - i + 1, & \text{untuk } \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

$$\lambda(y_i) = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 1, \quad \text{untuk } i = 1 \text{ dan } i = n.$$

- Kasus n ganjil = $\begin{cases} i - 1, & \text{untuk } 2 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor. \\ n - i, & \text{untuk } \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \leq i \leq n - 1. \end{cases}$
- Kasus n genap = $\begin{cases} i, & \text{untuk } 2 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor. \\ n - i + 1, & \text{untuk } \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \leq i \leq n - 1. \end{cases}$

$$\lambda(z) = 2.$$

$$\lambda(x_i y_i) = \begin{cases} i, & \text{untuk } 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor. \\ n - i + 2, & \text{untuk } \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

$$\lambda(y_i y_{i+1}) = \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n.$$

$$\lambda(y_i z) = 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n.$$

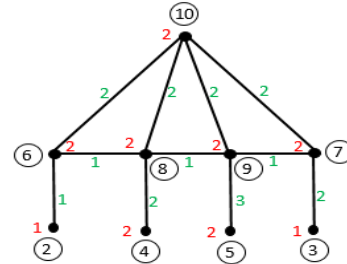
Kemudian ditunjukkan tiap titik pada graf $T(D)_n$ mempunyai bobot yang berbeda sebagai berikut:

$$w(x_i) = \begin{cases} 2i, & \text{untuk } 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor. \\ 2n - 2i + 3, & \text{untuk } \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

$$w(y_i) = \begin{cases} n + 2i, & \text{untuk } 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor. \\ 3n - 2i + 3, & \text{untuk } \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

$$w(z) = 2n + 2.$$

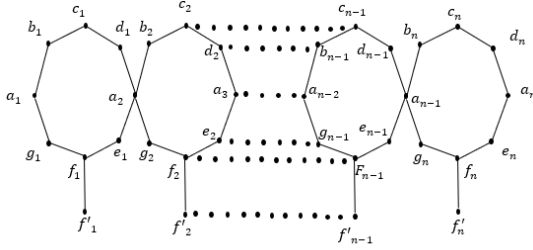
Jelas bobot dari tiap titik pelabelan pada λ berbeda. Jadi, pelabelan total tak teratur titik dari graf *dove tail* dengan titik pendaan adalah $\text{tvs } T(D)_n = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$, untuk $n \geq 3$. Berikut adalah contoh pelabelan total tak teratur titik $T(D)_4$.



Gambar 5. $\text{tvs } T(D)_4 = 3$

Graf Rantai Kaktus Cycle C_8 dengan Titik Pendaan

Graf rantai kaktus *cycle* C_8 dengan titik pendaan merupakan perumuman graf rantai kaktus *cycle* C_8 yang memiliki titik pendaan pada tiap *cycle*. Graf rantai kaktus *cycle* C_8 dengan titik pendaan dinotasikan dengan $T(K)_r$, dimana $r \geq 2$ dan r menyatakan banyaknya rantai. Berikut adalah contoh graf rantai kaktus *cycle* C_8 dengan titik pendaan



Gambar 6. Graf Rantai Kaktus Cycle C_8 dengan Titik Pendan

Teorema 2

Misal $(C_8)_r$ perumuman graf rantai kaktus cycle C_8 , maka $C(C_8)_r$ adalah $(C_8)_r$ dengan titik pendaan, maka nilai $tv_s C(C_8)_r, r \geq 2 = 2r + 1$.

Bukti:

Berdasarkan penelitian Nurdin dkk, diperoleh bahwa nilai $tv_s C(C_8)_r \geq \max \left\{ \left\lceil \frac{\delta + n_\delta}{\delta + 1} \right\rceil, \left\lceil \frac{\delta + n_\delta + n_{\delta+1}}{\delta + 2} \right\rceil, \dots, \left\lceil \frac{\delta + \sum_{i=\delta}^{\Delta} n_i}{\Delta + 1} \right\rceil \right\} = \left\lceil \frac{5r+3}{3} \right\rceil$, untuk $r \geq 2$. Diberikan $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i, g_i$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$ berturut-turut merupakan titik-titik dari cycle C_8 , dan f'_i untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$ merupakan titik pendaan pada graf rantai kaktus cycle C_8 . Akan ditunjukkan batas atas $tv_s C(C_8)_r$ dengan mengkonstruksi pelabelan- k total tak teratur titik $\lambda : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ dengan $k = 2r + 1$ sebagai berikut:

$$\lambda(a_i) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } i = 1. \\ r - i + 4, & \text{untuk } 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

$$\lambda(b_i) = i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n.$$

$$\lambda(c_i) = r + i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n.$$

$$\lambda(d_i) = i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n.$$

$$\lambda(e_i) = 2i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n.$$

$$\lambda(f_i) = 2r + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n.$$

$$\lambda(g_i) = \begin{cases} 2r + 1, & \text{untuk } i = 1. \\ 2i, & \text{untuk } 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

$$\lambda(f'_i) = 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n.$$

$$\lambda(a_i b_i) = r + i - 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n.$$

$$\lambda(b_i c_i) = i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n.$$

$$\lambda(c_i d_i) = i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n.$$

$$\lambda(d_i a_{i+1}) = r + i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n.$$

$$\lambda(a_{i+1} e_i) = 2r + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n.$$

$$\lambda(e_i f_i) = 2r + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n.$$

$$\lambda(f_i g_i) = 2r + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n.$$

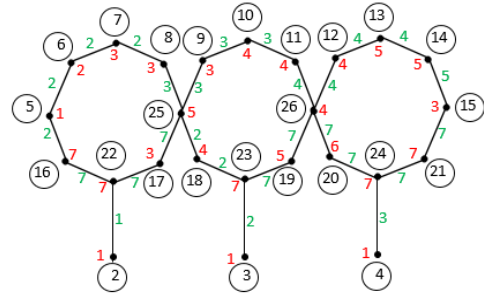
$$\lambda(g_i a_i) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } i = 1. \\ 2r + 1, & \text{untuk } 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

$$\lambda(f_i f'_i) = i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n.$$

Kemudian ditunjukkan tiap titik pada graf $C(C_8)_r$ mempunyai bobot yang berbeda sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w(a_i) &= \begin{cases} r + 2, & \text{untuk } i = 1. \\ 7r + i + 2, & \text{untuk } 2 \leq i \leq n - 1. \\ 4r + 3, & \text{untuk } i = n. \end{cases} \\ w(b_i) &= r + 3i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n. \\ w(c_i) &= r + 3i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n. \\ w(d_i) &= r + 3i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n. \\ w(e_i) &= 4r + 2i + 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n. \\ w(f_i) &= 6r + i + 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n. \\ w(g_i) &= 4r + 2i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n. \\ w(f'_i) &= i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Jelas bobot dari tiap titik pelabelan pada λ berbeda. Jadi, pelabelan total tak teratur titik dari graf rantai kaktus cycle C_8 dengan titik pendaan adalah $tv_s C(C_8)_r = 2r + 1$, untuk $r \geq 2$. Berikut adalah contoh pelabelan total tak teratur titik $C(C_8)_3$.



Gambar 7. $tv_s C(C_8)_3 = 7$

PENUTUP

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan maka dapat disimpulkan Nilai ketakteraturan titik total pada graf *dove tail* dengan titik pendaan adalah $tv_s T(D)_n = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil, n \geq 3$. Sedangkan, nilai ketakteraturan titik total pada graf rantai kaktus cycle C_8 dengan titik pendaan adalah $tv_s C(C_8)_r = 2r + 1, r \geq 2$.

DAFTAR PUSTAKA

- Al-Mushayt, O., Arshad, A. & Siddiqui, M.K. 2013. Total Vertex Irregularity Strength of Convex Polytope Graphs. *Acta Math.* LXXXII(1): 29-37.
- Anholcer, M., Karoński, M.L. & Pfender, F. 2011. Total Vertex Irregularity Strength of Forests. *Mathematics Subject Classification.* 05C78, (05C15).
- Arockmiary, S.T. 2016. Total Edge Irregularity Strength of Diamond Snake And Dove. *International Journal Pure and Applied Mathematics.* 109(5): 125-132.
- Baca, M., Jendrol, S., Miller, M., & Ryan, J. 2007. On Irregular Total Labellings. *Discrete Mathematics.* 307: 1378-1388.
- Budayasa, I Ketut. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya.* Surabaya: Unesa University Press.
- Ghassani, H. 2015. Aplikasi Graf pada Penentuan Jadwal dan Jalur Penerbangan. *Makalah IF 2120 Seminar Matematika Diskrit.*
- Indriati, Diari. 2016. The Total Vertex Irregularity Strength of Generalized Helem Graphs and Prisms with Outer Pendant Edges. *Australasian Journal of Combinatorics.* 65 (1): 14-26.
- Marr, Alison, M. & Wallis, W.D. 2013. *Magic Graph.* New York: Springer.
- Rosyida, I., Mulyono., Indriati, D. 2019. Determining Total Vertex Irregularity Strength of $T_r(4,1)$ Tadpole Chain Graph and its Computation. *Procedia Computer Science.* 157: 699-706.
- Satyanuraga, D. 2016. Penerapan Teori Graf Dalam Rencana Tata Ruang Kota. *Makalah IF 2120 Seminar Matematika Diskrit.*

Universitas Negeri Semarang