UJM 3 (2) (2014)
UNNES Journal of Mathematics
http://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/ujm

ESTIMATOR BAYES UNTUK RATA-RATA TAHAN HIDUP DARI DISTRIBUSI RAYLEIGH PADA DATA DISENSOR TIPE II

Roudlotin Ni'mah✉, **Arief Agoestanto**

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Indonesia
Gedung D7 lantai 1 Kampus Sekaran, Gunungpati, Semarang, 50229

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima Desember 2013
Disetujui Mei 2014
Dipublikasikan Nopember 2014

Keywords :
Data Disensor Tipe II;
Distribusi Rayleigh;
Distribusi Prior Jeffrey;
Metode Bayes.

Abstrak

Analisis data waktu hidup merupakan salah satu teknik statistika yang berguna untuk melakukan pengujian tentang tahan hidup atau keandalan suatu komponen. Data disensor tipe II merupakan data kematian atau kegagalan yang tidak lengkap (*incomplete mortality data*) yaitu data waktu kematian atau kegagalan dari r observasi terkecil dalam sampel random yang berukuran n dengan $1 \leq r \leq n$. Salah satu distribusi yang digunakan dalam analisis data uji hidup adalah distribusi Rayleigh. Penelitian ini akan membahas estimasi parameter rata-rata waktu hidup dari distribusi Rayleigh pada data disensor tipe II dengan metode Bayes serta simulasi dengan program Microsoft Visual Basic versi 6.0. Distribusi prior yang digunakan adalah distribusi prior Jeffrey.

Abstract

Analysis of life time is one of statistical analysis which many utilized to life testing or the reliability of a component. Type-II censored data is incomplete mortality data which only the r smallest observations in a random sample of n items are observed ($1 \leq r \leq n$). One distribution used in analysis of life testing is Rayleigh distribution. This research will discuss Bayes estimator of the parameter mean time to failure of Rayleigh distribution on type-II censored data and simulations with program Microsoft Visual Basic version 6.0. Prior distribution used is the Jeffreys prior distribution.

✉ Alamat korespondensi:
E-mail: nikmah.matematika@gmail.com

ISSN 2252-6943

Pendahuluan

Analisis data waktu hidup merupakan salah satu teknik statistika yang berguna untuk melakukan pengujian tentang tahan hidup atau keandalan suatu komponen. Analisis data waktu hidup telah menjadi bagian yang tidak terpisahkan dalam proses produksi. Perusahaan bahkan bersedia mengeluarkan biaya yang besar untuk menjamin bahwa produk yang dihasilkan mempunyai keandalan yang tinggi. Dalam melakukan analisis data waktu hidup dibutuhkan data tahan hidup yang meliputi waktu tahan hidup dan status waktu tahan hidup dari objek yang diteliti. Data waktu hidup yang diperoleh dari percobaan uji hidup dapat berbentuk data lengkap, data disensor tipe I dan data disensor tipe II. Berbentuk data lengkap jika semua benda dalam percobaan diuji sampai semuanya gagal, berbentuk data disensor tipe I jika data waktu hidup dihasilkan setelah percobaan berjalan selama waktu yang ditentukan, serta berbentuk data disensor tipe II jika observasi diakhiri setelah sejumlah kematian atau kegagalan tertentu telah terjadi. Data disensor tipe II adalah suatu data waktu kematian atau kegagalan yang hanya terdapat r buah observasi terkecil dalam sampel random yang berukuran n dengan $1 \leq r \leq n$ (Lawless, 1982).

Berdasarkan pengalaman para statistikawan distribusi yang sering digunakan dalam menangani masalah uji tahan hidup adalah distribusi Gamma, Log-Normal, Eksponensial dan Weibull. Distribusi Weibull diperkenalkan oleh fisikawan Swedia yaitu Waloddo Weibull pada tahun 1939 (Walpole *et al.*, 2002). Distribusi Weibull selama bertahun-tahun menjadi salah satu model data statistik yang memiliki jangkauan luas dari aplikasi dalam uji hidup dan teori reliabilitas dengan kelebihan utamanya adalah menyajikan keakuratan kegagalan dengan sampel yang sangat kecil (Hossain & Zimmer, 2003). Menurut Dey dan Dey (2011), salah satu bentuk khusus dari distribusi Weibull adalah distribusi Rayleigh yang pertama kali diperkenalkan oleh Rayleigh pada tahun 1880 dan beberapa penulis telah berkontribusi untuk model ini, yakni Sinha dan Howlader (1983), Ariyawansa dan Templeton (1984), Howlader (1985), Howlader dan Hossain (1995), Lalithan dan Mishra (1996) dan Abd Elfattah *et al.* (2006).

Untuk mengetahui apakah distribusi dari data waktu hidup yang diasumsikan telah menggambarkan keadaan yang sesungguhnya, diperlukan suatu analisis terhadap data waktu hidup. Langkah untuk menganalisis terhadap fungsi distribusi dari data waktu hidup adalah dengan mengestimasi harga parameter distribusinya. Estimasi parameter dapat menggunakan dua metode yaitu metode klasik dan metode Bayes (Walpole *et a*l., 2002). Metode Bayes memandang parameter sebagai variabel yang menggambarkan pengetahuan awal tentang parameter sebelum pengamatan dilakukan dan dinyatakan dalam suatu distribusi yang disebut distribusi prior. Distribusi prior adalah distribusi subyektif berdasarkan pada keyakinan seseorang dan dirumuskan sebelum data sampel diambil (Walpole & Myers, 1986). Distribusi sampel yang digabung dengan distribusi prior akan menghasilkan suatu distribusi yaitu distribusi Posterior (Horst, 2009). Distribusi Posterior menyatakan derajat keyakinan seseorang mengenai suatu parameter setelah sampel diamati (Walpole & Myers, 1986).

Beberapa penelitian telah dilakukan untuk mengestimasi parameter dari distribusi Rayleigh pada data waktu hidup disensor tipe II, diantaranya Sunandar (2006) yang menggunakan salah satu teknik estimasi dari metode klasik yakni metode maksimum likelihood untuk mengestimasi parameter dari data waktu hidup yang berdistribusi Rayleigh pada data tersensor tipe II. Widiharih dan Mardiyati (2008) menggunakan metode maksimum likelihood untuk mengestimasi parameter titik dan metode besaran pivot untuk mengestimasi parameter interval dari data waktu hidup tersensor tipe II yang berdistribusi Rayleigh. Penelitian yang telah dilakukan tersebut keduanya menggunakan metode maksimum likelihood untuk mengestimasi parameternya. Menurut metode ini parameter populasi diasumsikan tetap walaupun nilainya tidak diketahui. Pada metode maksimum likelihood, teknik estimasi parameternya lebih mudah sehingga teknik ini sering digunakan. Akan tetapi teknik ini hanya dapat digunakan bilamana distribusi populasi diketahui. Selain itu, metode maksimum likelihood sangat sensitif terhadap data ekstrim. Data ekstrim ini sangat berpengaruh terhadap nilai rata-rata dan variansi. Karena kekurangan yang dimiliki metode maksimum likelihood, maka para peneliti mencoba menggunakan metode lain untuk mengestimasi parameter yakni metode Bayes. Menurut Bayes, parameter populasi berasal dari suatu distribusi sehingga nilainya tidaklah tunggal (merupakan variabel random). Oleh karena nilai parameternya berasal dari suatu distribusi, maka kesulitan pertama yang dijumpai adalah bagaimana bentuk distribusi parameter tersebut. Walaupun untuk menentukan distribusi prior dari parameter itu sulit, tetapi estimasi parameter dengan metode Bayes tampaknya lebih menjanjikan karena peneliti tidak perlu tahu tentang distribusi prior dari populasi.

Penelitian menggunakan metode Bayes diantaranya Siska (2011) menentukan inferensi statistik berupa estimasi titik, estimasi interval dan uji hipotesis untuk proporsi Binomial menggunakan prior konjugat dengan metode Bayes, serta membandingkan metode Bayes dengan metode maksimum likelihood untuk distribusi Binomial untuk parameter proporsi θ yang tidak diketahui. Penelitian ini menghasilkan estimator Bayes merupakan estimator yang bias untuk parameter proporsi Binomial θ , namun variansi dan *Mean Square Error* (MSE) dari estimator Bayes lebih kecil dari pada estimator maximum likelihood, ini dapat dikatakan sebagai sebuah keunggulan tersendiri dari estimator Bayes bahwa estimator Bayes menghasilkan estimator yang baik untuk parameter θ jika MSE dan variansi yang menjadi ukuran kebaikannya. Nurlaila *et al.* (2013) membandingkan tingkat efektivitas metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dan metode Bayes dalam menduga parameter distribusi Eksponensial. Penelitian ini menghasilkan metode Bayes dengan perluasan distribusi prior Jeffrey lebih efektif dibandingkan dengan metode MLE. Karena menghasilkan nilai bias dan MSE yang lebih kecil dibandingkan dengan metode MLE. Akan tetapi hal ini hanya berlaku ketika *c* sebagai konstanta Jeffrey kurang dari satu. Pradhan dan Kundu (2011) menduga parameter distribusi Gamma. Penelitian tersebut membandingkan kinerja Bayes dengan MLE serta metode momen menggunakan simulasi Monte Carlo. Dari hasil simulasi dapat dilihat bahwa penduga Bayes dan penduga MLE lebih baik dari penduga momen. Selanjutnya Shawky dan Bakoban (2008) juga melakukan penelitian mengenai pendugaan parameter bagi distribusi *Gamma Exponentiated*. Penelitian tersebut menggunakan metode Bayes dan MLE untuk memperoleh penduga dari parameter bentuk, *reliability* (keandalan) dan *failure rate functions* (fungsi tingkat kegagalan). Penelitian ini menganjurkan penggunaan pendekatan Bayes dengan *quadratic loss function* (kuadrat fungsi kehilangan) untuk menduga parameter bentuk dari distribusi *Gamma Exponentiated*. Sementara MLE lebih dianjurkan untuk menduga keandalan dan fungsi tingkat kegagalan. Pada tahun 2012, Guure et al. membandingkan kinerja estimator maksimum likelihood dan estimator Bayes menggunakan perluasan informasi prior Jeffrey dengan tiga fungsi kegagalan, yaitu, *linear exponential loss, general entropy loss,* dan *square error loss function* dalam mengestimasi parameter distribusi Weibull dua parameter. Metode ini dibandingkan menggunakan *Mean Square Error* (MSE) melalui studi simulasi dengan berbagai ukuran sampel. Hasil menunjukkan bahwa estimator Bayes menggunakan perluasan prior Jeffrey dengan *linear exponential* loss function dalam kebanyakan kasus memberikan MSE terkecil.

Berdasarkan hal tersebut di atas, permasalahan yang dibahas yaitu menentukan bentuk parameter rata-rata waktu hidup dari distribusi Rayleigh pada data disensor tipe II dengan metode Bayes. Distribusi prior yang digunakan dalam penelitian ini adalah non-informatif prior dengan teknik penentuannya menggunakan metode Jeffrey's. Simulasi menggunakan program Microsoft Visual Basic versi 6.0. Tujuan dari penelitian ini adalah mengetahui bentuk estimator Bayes untuk rata-rata tahan hidup dari distribusi Rayleigh pada data disensor tipe II serta simulasinya dengan program Microsoft Visual Basic versi 6.0.

Metode

Metode penelitian yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah studi literatur. Adapun tahapan analisis dan pemecahan masalah sebagai berikut:

Tahap I: Mencari bentuk estimator Bayes untuk rata-rata tahan hidup dari distribusi Rayleigh pada data disensor tipe II

a. Menggunakan sampel data disensor tipe II yang diasumsikan berdistribusi Rayleigh
b. Menentukan fungsi likelihood untuk sampel data disensor tipe II
c. Menentukan distribusi prior dengan menggunakan metode Jeffrey's
   1) Menentukan informasi fisher
   2) Menentukan distribusi prior
d. Menentukan distribusi posterior
e. Menentukan bentuk estimator Bayes dari λ.

Tahap 2: Membuat simulasi program Microsoft Visual Basic versi 6.0 untuk menghitung nilai estimator Bayes dan rata-rata tahan hidup dari distribusi Rayleigh pada data disensor tipe II.

Hasil dan Pembahasan

Menurut Dey dan Dey (2011), distribusi Rayleigh adalah bentuk khusus dari distribusi Weibull dua parameter dengan parameter bentuk sama dengan 2 (β = 2). Siddiqui (1962) membahas asal dan sifat dari distribusi Rayleigh. Beberapa pengarang telah berkontribusi untuk model ini, yakni, Sinha dan Howlader (1983), Ariyawansa dan Templeton (1984), Howlader (1985), Howlader dan Hossain (1995), Lalithan dan Mishra (1996) dan Abd Elfattah *et al*. (2006) (Dey & Dey, 2011). Fungsi densitas peluang dari distribusi Rayleigh sebagai berikut

$$f(t) = 2\lambda.t.exp(-\lambda t^2); \lambda > 0, t > 0 \qquad (1)$$

Fungsi *Survival*

$$S(t) = exp(-\lambda t^2)$$

Fungsi *hazard*

$$h(t) = 2\lambda t$$

Fungsi distribusi kegagalan dari distribusi Rayleigh

$$F(t) = 1 - S(t) = 1 - exp(-\lambda t^2), t > 0, \lambda > 0$$

Rataan dan variansi distribusi Rayleigh adalah

$$\mu = \lambda^{-1/2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\sigma^2 = \lambda^{-1}\left\{\Gamma(2) - \left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2\right\}$$

Misalkan ada *n* benda yang tahan hidupnya berdistribusi Rayleigh dengan fungsi kepadatan peluang seperti pada persamaan (1), diuji tahan hidupnya sampai terdapat *r* buah observasi terkecil dalam sampel random yang berukuran *n* dengan 1 ≤ *r* ≤ *n* mengalami kegagalan.

Misalkan hanya *r* pertama observasi $t_{(1)} < t_{(2)} < \ldots < t_{(r)}$ tersedia dalam jumlah sampel berukuran n. Sehingga fungsi densitas probabilitas bersama dari $t_{(1)} < t_{(2)} < \ldots < t_{(r)}$ adalah

$$f(t_{(1)}, t_{(2)}, ..., t_{(r)}) = \frac{n!}{(n-r)!}[S(t)]^{n-r}$$

$$\prod_{i=1}^{r} f(t_i)$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}[exp(-\lambda t_f^2]^{n-r}$$

$$\prod_{i=1}^{r} 2\lambda.t_i.exp(-\lambda t_i^2)$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}(2\lambda)^r$$

$$exp\left[-\left(\sum_{i=1}^{r}\lambda t_i^2 + (\lambda t_r^2)(n-r)\right)\right]$$

$$\prod_{i=1}^{r}\lambda t_i$$

Dalam penelitian ini distribusi prior untuk λ ditentukan dengan menggunakan metode Jeffrey's. Prior Jeffrey adalah salah satu jenis prior non informatif dimana dipilih apabila informasi awal mengenai parameter distribusi kurang. Proses untuk menentukan prior Jeffrey sebagai berikut

$$L(\lambda) = \frac{n!}{(n-r)!}(2\lambda)^r$$

$$exp\left[-\left(\sum_{i=1}^{r}\lambda t_i^2 + (\lambda t_r^2)(n-r)\right)\right]$$

$$\prod_{i=1}^{r} t_i$$

$$lnL(\lambda) = ln\frac{n!}{(n-r)!} + rln2\lambda -$$

$$\left(\sum_{i=1}^{r}\lambda t_i^2 + (\lambda t_r^2)(n-r)\right) +$$

$$\prod_{i=1}^{r} lnt_i$$

$$\frac{dlnL(\lambda)}{d\lambda} = \frac{r}{\lambda} - \left(\sum_{i=0}^{r} t_i^2 + (n-r)t_r^2\right)$$

$$\frac{d^2lnL(\lambda)}{d\lambda^2} = -\frac{r}{\lambda^2}$$

Prior Jeffrey diperoleh dengan mengambil akar kuadrat dari informasi Fisher, yaitu

$$I(\lambda) = -E\left(\frac{d^2lnL(\lambda)}{d\lambda^2}\right) = \frac{r}{\lambda^2}$$

Sehingga distribusi prior untuk λ adalah

$$g(\lambda) \propto \sqrt{\frac{r}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda}\sqrt{r}$$

Distribusi posterior untuk λ adalah

$$\tau(\lambda|t) = \frac{g(\lambda)L(\lambda)}{\int_0^\infty g(\lambda)L(\lambda)d\lambda}$$
$$= \frac{\frac{1}{\lambda}\sqrt{r}\frac{n!}{(n-r)!}(2\lambda)^r}{\int_0^\infty \frac{1}{\lambda}\sqrt{r}\frac{n!}{(n-r)!}(2\lambda)^r}$$
$$\frac{exp\left[-\left(\sum_{i=1}^r \lambda t_i^2 + (\lambda t_r^2)(n-r)\right)\right]}{exp\left[-\left(\sum_{i=1}^r \lambda t_i^2 + (\lambda t_r^2)(n-r)\right)\right]}$$
$$\frac{\prod_{i=1}^r t_i}{\prod_{i=1}^r t_i d\lambda}$$

dengan

$$T = \sum_{i=1}^r t_i^2 + t_r^2(n-r)$$

Estimator Bayes dari λ adalah

$$\lambda^* = E(\lambda)$$
$$= \int_0^\infty \lambda\tau(\lambda|t)d\lambda$$
$$= \int_0^\infty \lambda\frac{\lambda^{r-1}T^r exp(-\lambda T)}{\Gamma(r)}d\lambda$$
$$= \frac{r}{T}$$

Menurut Bolstad (2007), statistik Bayesian tidak menekankan kepada sifat tak bias dari suatu estimator. Faktanya, estimator Bayes biasanya merupakan estimator bias.

Dalam Lawless (1982) Mann dan Fartig memberikan data disensor tipe II yang berdistribusi Rayleigh dari waktu kegagalan komponen pesawat terbang dimana jumlah total penelitian (*n*) berjumlah 13 dan data waktu hidup (jam) yang didapat (*r*) berjumlah 10 adalah 0,22; 0,50; 0,88; 1,00; 1,32; 1,33; 1,54; 1,76; 2,50; 3,00.

Dari data waktu kegagalan komponen pesawat terbang tersebut dicari nilai estimator Bayes rata-rata waktu hidup sebagai berikut:

$$T = \sum_{i=1}^r t_i^2 + t_r^2(n-r)$$

T = (0,0484 + 0,25 + 0,7744 + 1 + 1,7424 + 1,7689 + 2,3716 + 3,0976+ 6,25 + 9) + 9(13-10)
= 53,3033

λ * = *r*/*T* = 10/53,3033 = 0,187606.

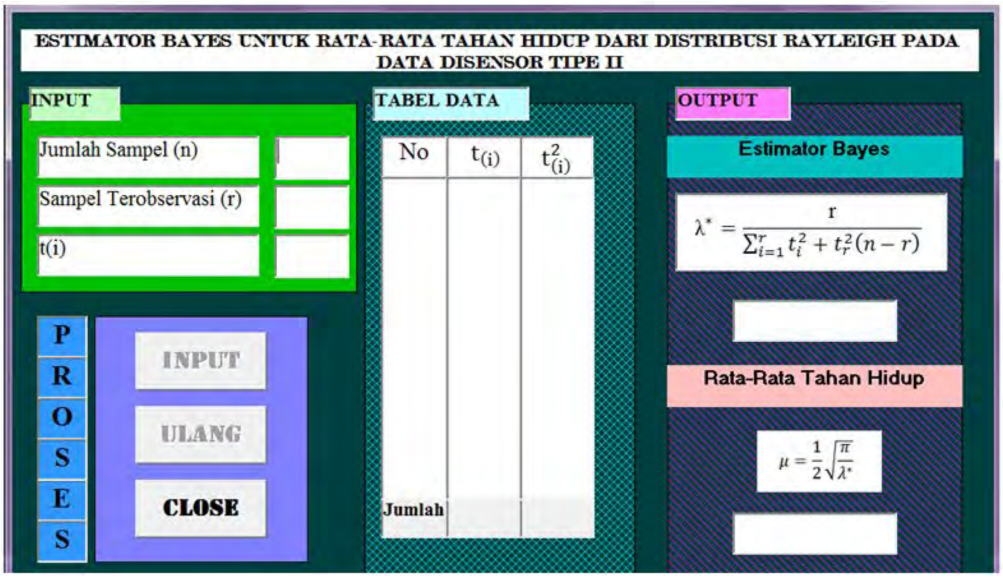
Jadi nilai estimator Bayes untuk λ dari distribusi Rayleigh adalah 0,187606.

Rata-rata tahan hidup sebagai berikut

$$\mu = \lambda^{-1/2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda^*}}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3,14}{0,187606}} = 2,046$$

Ini menunjukkan rata-rata komponen pesawat terbang dapat bertahan hidup adalah 2,046 jam.

Perhitungan nilai estimator Bayes dan rata-rata tahan hidup juga dapat dihitung dengan simulasi program Microsoft Visual Basic versi 6.0 dengan tampilan program pada Gambar 1.



Gambar 1. Tampilan Form Normal Program Perhitungan Estimator Bayes dan rata-rata tahan hidup

Program Microsoft Visual Basic mempunyai kelebihan sebagai berikut

a. Mempunyai tampilan visual yang cukup menarik karena dilengkapi dengan obyek obyek design yang cukup banyak.

b. Mempunyai bahasa pemrograman yang tidak terlalu rumit.

Langkah untuk menggunakan program tersebut adalah

a. Masukkan banyaknya sampel pada *textbox* jumlah sampel (n).

b. Masukkan banyak sampel yang terobservasi pada *textbox* sampel terobservasi (r).

c. Masukkan data waktu hidup pada *textbox* $t_{(1)}$.

d. Klik tombol hitung (*enter*).

e. Nilai estimator Bayes akan ditampilkan.

Berdasarkan data disensor tipe II di atas perhitungan estimator Bayes dan rata-rata tahan hidup dengan menggunakan simulasi program Microsoft Visual Basic 6.0 yaitu

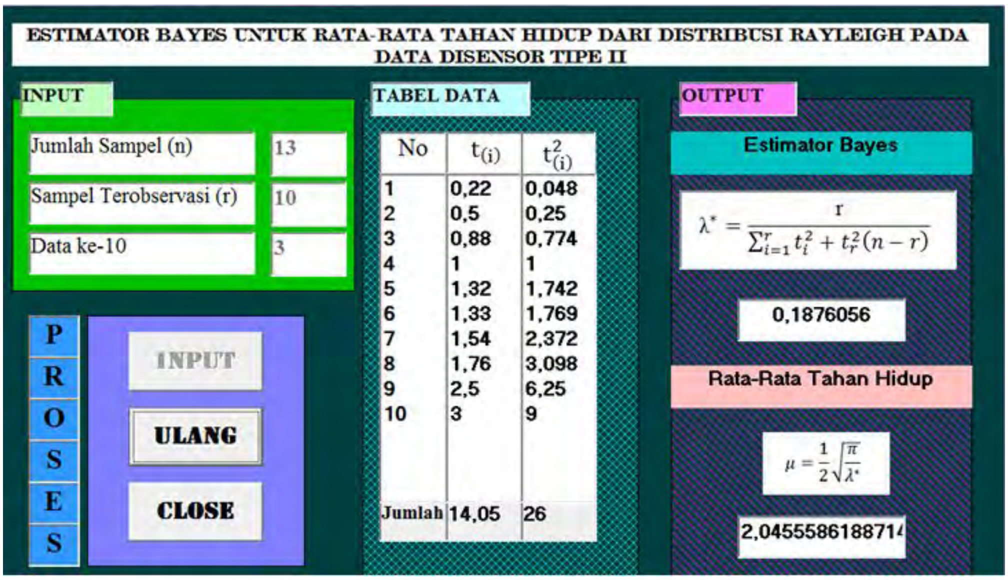
a. Masukkan banyaknya sampel pada *textbox* jumlah sampel. Isi dengan 13 yaitu jumlah sampel yang diteliti.

b. Masukkan banyak sampel yang terobservasi pada *textbox* sampel terobservasi (r) yaitu 10.

c. Masukkan data waktu hidup pada *textbox* $t_{(1)}$ sebanyak sampel yang terobservasi yaitu 10 data dan data tersebut akan ditampilkan pada Tabel Data.

d. Klik tombol hitung (*enter*).

Hasil perhitungan dapat dilihat pada Gambar 2.



Gambar 2. Tampilan Input dan Output Program Perhitungan Estimator Bayes dan Rata-rata Tahan Hidup

Terlihat pada bagian output program, nilai estimator Bayes untuk λ adalah 0,1876056 dan rata-rata komponen pesawat terbang dapat bertahan hidup adalah 2,046 jam.

Penutup

Estimator Bayes untuk rata-rata tahan hidup dari distribusi Rayleigh pada data disensor tipe II adalah $\lambda^* = r/T$ dengan

$$T = \sum_{i=1}^{r} t_i^2 + t_r^2(n-r)$$

Menggunakan program Microsoft Visual Basic 6.0, nilai estimator Bayes dapat diperoleh dengan cepat dan akurat. Perlu diadakan penelitian lebih lanjut tentang estimator Bayes untuk rata-rata tahan hidup dari distribusi Rayleigh dengan distribusi prior yang digunakan adalah perluasan dari distribusi prior Jeffrey dengan tiga fungsi kegagalan, yaitu *linear exponential loss, general entropy loss,* dan *square error loss function* serta sampel yang bisa digunakan sampel disensor tipe I. Simulasi untuk nilai parameter perlu dicoba dengan program komputer selain Microsoft Visual Basic versi 6.0, misalnya GUI pada program Mathlab, Delphi, dan Java untuk mengetahui program komputer mana yang lebih cepat dan mudah digunakan.

Daftar Pustaka

Bolstad, W. M. 2007. *Introduction to Bayesian Statistics.* Second Edition. America: A John Wiley & Sons, Inc.

Dey, S. & Dey, T. 2011. Rayleigh Distribution Revisited Via Extension of Jeffreys Prior Information and A New Loss Function. *Statistical Journal*. 9(3): 213-226.

Guure, C. B., Ibrahim, N. A. & Ahmed, A. O. M. 2012. Bayesian Estimation of Two-Parameter Weibull Distribution Using Extension of Jeffrey's Prior Information with Three Loss Functions. *Mathematical Problems in Engineering*.

Horst, R. 2009. *The Weibull Distribution A Handbook*. Jerman: Justua-Liebig-University Giessen.

Hossain, A. M. & Zimmer, W. J. 2003. Comparison of estimation methods for weibull parameters: Complete and censored samples. *J. Stat. Comput*.

Lawless, J. F. 1982. *Statistical Model and Methods for Life Time Data*. New York: John Wiley and Sons.

Nurlaila, D., Kusnandar, D. & Sulistianingsih, E. 2013. Perbandingan Metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dan Metode Bayes dalam Pendugaan Parameter Distribusi Eksponensial. *Buletin Ilmiah Matematika Statistika dan Terapannya (Bimaster)*. 2(1): 51-56.

Pradhan, B. & Kundu, D.. 2011. Bayes Estimation and Prediction of the Two-Parameter Gamma Distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*. 81(9): 1187-1198.

Shawky, A. I. & Bakoban, R. A. 2008. Bayesian and Non-Bayesian Estimations on the Exponentiated Gamma Distribution. *Applied Mathematical Sciences*. 2(51): 2521-2530.

Siddiqui, M. M. 1962. Some Problems Connected with Rrayleigh Distributions. *Journal of Research of The National Bureau of Standards*. 66D(2). 167-174.

Siska, A. C. 2011. *Inferensi Statistik Distribusi Binomial Dengan Metode Bayes Menggunakan Prior Konjugat*. Skripsi. Semarang: FMIPA Universitas Diponegoro.

Sunandar, M. A. 2006. *Estimasi Parameter untuk Data Waktu Hidup yang Berdistribusi Rayleigh pada Data Tersensor Tipe II Beserta Simulasinya*. Skripsi. Semarang: FMIPA Universitas Negeri Semarang.

Walpole, R. E. & Myers, R. H. 1986. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan*. Terbitan Kedua. Bandung: ITB.

Walpole, R. E., Myers, R. H., Myers, S. L. & Ye, K. 2002. *Probability and Statistics for Engineers and Scientist*. Ninth Edition. New York: Pearson Education, Inc.

Widiharih, T. & Mardjiyati, W. 2008. Inferensi Data Uji Hidup Tersensor Tipe II Berdistribusi Rayleigh. *Media Statistika*. 1(2): 69-74.