



MODEL MATEMATIKA SS_MIR PADA PENYEBARAN COVID-19 DENGAN PENERAPAN PEMBERLAKUAN PEMBATAHAN KEGIATAN MASYARAKAT (PPKM) DI JAWA TENGAH

Erina Tri Feriastuti ✉, Yudi Ari Adi

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi Terapan, Universitas Ahmad Dahlan, Yogyakarta, Indonesia, 55166

Info Artikel

Sejarah Artikel:

Diterima Oktober 2021

Disetujui November 2021

Dipublikasikan November 2021

Keywords:

COVID-19,
mathematical model,
PPKM,
sensitivity analysis

Abstrak

Coronavirus atau COVID-19 ditemukan kasus pertama di Cina pada bulan Desember 2019. COVID-19 merupakan penyakit menular yang disebabkan oleh virus *Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus-2* (SARS-Cov-2). WHO mendeklarasikan COVID-19 menjadi pandemi pada tanggal 11 Maret 2020. Virus ini menyebar dengan sangat cepat karena proses transmisinya secara langsung dari manusia ke manusia lain. Pemahaman tentang penyebaran COVID-19 sangat penting untuk menentukan kebijakan dalam pengendalian penyebaran COVID-19. Dalam penelitian ini, akan dikaji model matematika SS_MIR pada penyebaran COVID-19 di masa PPKM dengan menggunakan data penyebaran COVID-19 di Jawa Tengah, Indonesia dari tanggal 1 Agustus hingga 31 Agustus 2021. Pada simulasi telah dilakukan analisis sensitivitas pada model untuk mengetahui parameter-parameter yang berpengaruh terhadap bilangan reproduksi dasar (R_0). Berdasarkan simulasi numerik analisis sensitivitas pada model diperoleh hasil bahwa laju interaksi merupakan parameter yang sangat berpengaruh terhadap R_0 . Dari hasil penelitian dapat disimpulkan bahwa pelaksanaan PPKM di Provinsi Jawa Tengah berhasil diterapkan karena dapat menekan jumlah populasi yang terinfeksi COVID-19 di Jawa Tengah, perlu juga mengurangi kegiatan atau mobalitas masyarakat dan memperketat pelaksanaan PPKM supaya tidak terjadi lonjakan kasus terinfeksi COVID-19 lagi di Jawa Tengah.

Abstract

Coronavirus or COVID-19 which was first discovered in China in Desember, 2019. COVID-19 is an infectious disease caused by the *Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus-2* (SARS-Cov-2). WHO declared COVID-19 a pandemic on March 11, 2020. This virus spreads rapidly because the transmission is directly from human to another human. An understanding of the spread of COVID-19 important to determine policies in control of the spread of COVID-19. In this research, a simple mathematical model SS_MIR of the spread of COVID-19 in era PPKM and the model is validated against data from Jawa Tengah, Indonesia from August 1, 2021, to August 31, 2021. In this simulation has been a sensitivity analysis of model to determine the influential parameters on the basic reproduction number (R_0). Based on the numerical solution sensitivity analysis the results show that interaction rate are the most influential parameters on R_0 . From the result research it can be concluded that implementation of PPKM in Central Java Province was successful because it can reduce the number of population infected with COVID-19 in Central Java, which is needs to reduce community activities or mobility and control the implementation of PPKM so that there is no spike in cases infected of COVID-19 in Central Java.

How to cite:

Feriastuti, E.T. & Adi, Y.A. 2021. Model Matematika SS_MIR pada Penyebaran Covid-19 Dengan Penerapan Pemberlakuan Pembatasan Kegiatan Masyarakat (Ppkm) di Jawa Tengah. *UNNES Journal of Mathematics*. 10(2): 66-74.

PENDAHULUAN

COVID-19 merupakan penyakit yang disebabkan oleh virus *Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus-2* (SARS-Cov-2) yang oleh Organisasi Kesehatan Dunia (WHO) telah dinyatakan COVID-19 sebagai pandemi pada tanggal 11 Maret 2020 (Hu, 2019). COVID-19 dapat menyebabkan infeksi saluran pernapasan dari yang ringan sampai yang parah pada manusia. COVID-19 dapat menyebar dari individu yang telah terinfeksi ke individu yang lain, terutama melalui tetesan yang keluar dari mulut saat batuk atau berbicara. Proses yang dibutuhkan untuk terinfeksi selama 5-6 hari masa inkubasi, maka masa pemulihan yang dibutuhkan selama 14 hari. Dari kasus infeksi positif dilaporkan memiliki gejala ringan atau gejala berat, bahkan ada yang tidak memiliki gejala namun dapat menularkan virus ke orang lain (Fauzia, 2021).

Kasus positif COVID-19 di Indonesia pertama kali terdeteksi pada tanggal 2 Maret 2020, ketika dua orang terkonfirmasi tertular dari seorang warga negara asing (Susilo dkk, 2020). Secara cepat COVID-19 menyebar ke berbagai provinsi di Indonesia salah satunya yaitu Provinsi Jawa Tengah. Dilihat pada data penyebaran pada tanggal 27 Maret 2021, Jawa Tengah merupakan provinsi dengan jumlah kasus positif COVID-19 terbanyak ke-3 di Indonesia yaitu terdapat 11.3% manusia yang terkonfirmasi positif COVID-19 di Indonesia (Kemenkes RI, 2021).

Banyaknya jumlah positif COVID-19 di provinsi Jawa Tengah, membuat Pemerintah Jawa Tengah harus cepat melakukan tindakan untuk menghambat penyebaran COVID-19 di Jawa Tengah. Upaya yang dilakukan oleh Pemerintah Jawa Tengah salah satunya memberlakukan Pemberlakuan Pembatasan Kegiatan Masyarakat (PPKM) Berbasis Mikro yang dilaksanakan pertama kali pada tanggal 9 Februari 2021. Namun, COVID-19 terus bermutasi sampai menimbulkan varian baru bernama Varian Delta. Varian delta diberitakan bahwa penularannya lebih cepat dibandingkan COVID-19 sebelumnya. Sehingga mengakibatkan terjadi lonjakan kasus COVID-19 di beberapa beberapa wilayah Indonesia. Oleh karena itu pemerintah mengeluarkan kebijakan PPKM darurat Jawa-Bali pada tanggal 3 Juni 2021 (Darmalaksana, 2021).

Fenomena penyebaran COVID-19 dapat disajikan dalam model matematika. Model matematika merupakan alat yang kuat untuk dilakukan mensimulasikan dan mengontrol

penyebaran COVID-19. Maka telah banyak peneliti yang melakukan penelitian terhadap penyebaran COVID-19. Penelitian tentang penyebaran COVID-19 di Jawa Tengah telah dilakukan oleh (Darmansah & Wardani, 2021) menggunakan metode data mining dan algoritma K-Means Clustering. Pemodelan matematika penyebaran COVID-19 dengan faktor *social distancing* berbasis **SIR** dilakukan oleh (Arief dkk, 2019). Penelitian menggunakan model matematika **SS₁OPIR** yang menggambarkan penyebaran COVID-19 di Jakarta dengan melihat efektivitas kebijakan PSBB terhadap keberhasilan menekan penularan dilakukan oleh (Adi & Ndii, 2020).

Dari penelitian sebelumnya, belum banyak yang meneliti penyebaran COVID-19 di Jawa Tengah menggunakan model matematika pada saat dilaksanakan PPKM. Oleh karena itu, pada penelitian ini akan lebih fokus terhadap penyebaran COVID-19 pada saat dilaksanakan PPKM di Jawa Tengah menggunakan model matematika. Model matematika yang digunakan pada penelitian ini mengacu pada penelitian sebelumnya oleh (Adi & Ndii, 2020), namun model akan lebih disederhanakan menjadi model matematika **SS_MIR** dengan **S** (manusia rentan yang tidak menaati peraturan PPKM), **S_M** (manusia rentan yang menaati peraturan PPKM), **I** (manusia terinfeksi COVID-19), dan **R** (manusia sembuh dari COVID-19). Pada penelitian ini juga akan dianalisis sensitivitas dari parameter-parameter yang berpengaruh terhadap bilangan reproduksi dasar yang belum banyak dilakukan oleh peneliti sebelumnya dan analisis dilakukan untuk mengetahui dampak Pemberlakuan Pembatasan Kegiatan Masyarakat (PPKM) pada penyebaran COVID-19 di Jawa Tengah.

METODE

Penelitian ini akan mempelajari model matematika pada penyebaran COVID-19 di Jawa Tengah dengan menggunakan data harian COVID-19 tanggal 1 Agustus sampai 31 Agustus 2021 yang diambil dari situs resmi data studio (Austen, 2021). Selanjutnya dibentuk model matematika yang berbentuk sistem persamaan diferensial. Dari model yang terbentuk, ditentukan dan dianalisis titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar, kestabilan titik ekuilibrium, analisis sensitivitas serta simulasi numerik model matematika pada penyebaran COVID-19 di saat PPKM di Jawa Tengah untuk mengetahui dampak PPKM

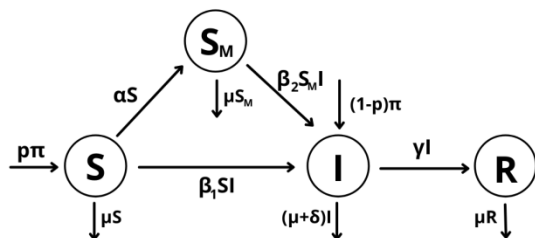
terhadap penyebaran COVID-19 di Jawa Tengah.

Adapun langkah-langkah dalam pembahasan masalah ini adalah sebagai berikut: (1) membentuk model matematika penyebaran COVID-19 saat PPKM di Jawa Tengah, (2) membahas eksistensi dan kestabilan titik ekuilibrium, (3) melakukan simulasi numerik pada kestabilan serta penyebaran COVID-19 saat PPKM di Jawa Tengah, (4) membahas analisis sensitivitas dan simulasinya untuk melihat parameter paling berpengaruh pada penyebaran COVID-19, (5) melakukan analisis dampak PPKM pada penyebaran COVID-19 di Jawa Tengah.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pembentukan Model

Untuk pembentukan model matematika penyebaran COVID-19, populasi dibagi menjadi empat subpopulasi yaitu subpopulasi manusia rentan yang tidak menaati peraturan PPKM (S), subpopulasi manusia rentan yang menaati peraturan PPKM (S_M), subpopulasi manusia terinfeksi COVID-19 (I), subpopulasi manusia sembuh dari COVID-19 (R). Pada model ini diasumsikan manusia yang sembuh tidak kembali menjadi manusia rentan, tidak ada pengobatan dari luar seperti vaksin, dan laju pelaksanaan PPKM untuk sebelum dilaksanakan PPKM diasumsikan 0. Sedangkan parameter yang digunakan pada model ini yaitu Λ (laju rekrutmen), p (proporsi imigrasi), μ (laju kematian alami), α (laju pelaksanaan PPKM), β_1 (laju interaksi manusia rentan yang tidak menaati peraturan PPKM), β_2 (laju interaksi manusia rentan yang menaati peraturan PPKM), γ (laju kesembuhan dari COVID-19), dan δ (laju kematian karena COVID-19). Skema penyebaran pada COVID-19 dapat disajikan dalam diagram kompartemen pada Gambar 1.



Gambar 1. Skema penyebaran COVID-19 pada masa PPKM di Jawa Tengah.

Diagram pada Gambar 1 dapat dijelaskan sebagai berikut. Individu dalam subpopulasi S akan bertambah dari laju rekrutmen dan dari proporsi imigrasi yang sehat yang diasumsikan konstan dinyatakan dengan Λ dan p . Sedangkan berkurangnya individu dalam subpopulasi S disebabkan adanya kematian alami sebesar μS , adanya pelaksanaan PPKM yang mengakibatkan berpindah ke subpopulasi S_M sebesar αS dan adanya individu yang telah terinfeksi COVID-19 yang menyebabkan berpindah menuju subpopulasi I sebesar $\beta_1 S I$. Selanjutnya individu dalam subpopulasi S_M akan bertambah dari manusia rentan yang melaksanakan PPKM sebesar αS . Berkurangnya subpopulasi S_M disebabkan karena adanya individu terinfeksi COVID-19 sehingga berpindah ke subpopulasi I sebesar $\beta_2 S_M I$ dan adanya kematian alami pada subpopulasi S_M sebesar μS_M . Kemudian untuk individu subpopulasi I akan bertambah dari adanya proporsi imigrasi yang telah terinfeksi COVID-19 sebesar $(1-p)\Lambda$, adanya individu terinfeksi COVID-19 dari subpopulasi S dan subpopulasi S_M sebesar $\beta_1 S I$ dan $\beta_2 S_M I$. Subpopulasi I dapat berkurang karena adanya yang meninggal karena COVID-19 dan meninggal alami sebesar $(\mu + \delta) I$. Individu yang sembuh dari COVID-19 sebesar γI dapat mengurangi subpopulasi I karena berpindah ke subpopulasi R . Selanjutnya subpopulasi terakhir yaitu R . Individu subpopulasi R akan bertambah dari adanya individu yang telah sembuh dari COVID-19 sebesar γI dan individu subpopulasi R dapat berkurang karena adanya kematian alami sebesar μR . Berdasarkan penjelasan tersebut, model matematika dapat disajikan dalam sistem persamaan diferensial berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= p\Lambda - \mu S - \alpha S - \beta_1 S I \\ \frac{dS_M}{dt} &= \alpha S - \mu S_M - \beta_2 S_M I \\ \frac{dI}{dt} &= \beta_1 S I + \beta_2 S_M I + (1-p)\Lambda \\ &\quad - (\mu + \delta) I - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \mu R\end{aligned}\tag{1}$$

dengan kondisi awal $S(0), S_M(0), I(0), R(0) \geq 0$.

Teorema berikut memverifikasi bahwa semua solusi dengan kondisi awal nonnegatif tetap nonnegatif untuk semua $t > 0$.

Teorema 1. Himpunan $\Omega = \{(S, S_M, I, R) | S + S_M + I + R \leq \frac{\Lambda}{\mu}\}$ adalah invarian positif dan atraktor untuk persamaan (1).

Bukti. Dari sistem (1) diperoleh $\frac{dS}{dt} + \frac{dS_M}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = \Lambda - \mu N - \delta I \leq \Lambda - \mu N$, dengan $N(t) = S(t) + S_M(t) + I(t) + R(t)$. Dengan demikian

$$\frac{dN}{dt} \leq \Lambda - \mu N.$$

Jadi diperoleh $0 \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$, sehingga solusi dari persamaan (1) terbatas dan berada di dalam Ω untuk semua $t > 0$.

Pada bagian berikut dibahas eksistensi dan kestabilan titik ekuilibrium.

Eksistensi dan kestabilan titik ekuilibrium

Model (1) mempunyai titik ekuilibrium bebas virus yaitu $E_0 = (\frac{\Lambda}{(\mu+\alpha)}, \frac{\Lambda\alpha}{\mu(\mu+\alpha)}, 0, 0)$. Berikutnya dicari angka reproduksi dasar (R_0) yang didefinisikan sebagai rata-rata banyaknya individu yang terinfeksi akibat adanya satu kasus individu terinfeksi dalam suatu populasi rentan terinfeksi dan dapat dicari dengan metode *Next Generation Matrix* (NGM) (Van Den Driessche & Watmough, 2002). Dengan menerapkan prosedur NGM diperoleh

$$F = \left[\frac{\Lambda(\mu\beta_1 + \alpha\beta_2)}{\mu(\mu + \alpha)} \right]$$

dan

$$V = [(\mu + \delta + \gamma)]$$

NGM didefinisikan sebagai FV^{-1} dengan F dan V masing-masing adalah hasil linearisasi di titik ekuilibrium bebas virus. Angka reproduksi dasar merupakan nilai eigen dominan (*spectral radius*) dari matrik FV^{-1} , yaitu

$$R_0 = \rho(FV^{-1}) = \frac{\Lambda(\mu\beta_1 + \alpha\beta_2)}{\mu(\mu + \alpha)(\mu + \delta + \gamma)} \quad (2)$$

Model (1) memiliki titik ekuilibrium endemik $E^* = (S^*, E^*, I^*, A^*, R^*) = (\frac{\Lambda}{(\mu+\alpha+\beta_1 I^*)}, \frac{\Lambda\alpha}{(\mu+\alpha+\beta_1 I^*)(\mu+\beta_2 I^*)}, I^*, \frac{\gamma I^*}{\mu})$ dengan I^* adalah akar real positif dari persamaan

$$a_0 I^{*2} + a_1 I^* + a_2 = 0 \quad (3)$$

dengan

$$a_0 = \beta_1 \beta_2 (\mu + \delta + \gamma) > 0$$

$$a_1 = (\mu\beta_2 + \alpha\beta_2 + \mu\beta_1)(\mu + \delta + \gamma) - \Lambda\beta_1\beta_2 \quad (4)$$

$$a_2 = (\mu^2 + \mu\alpha)(\mu + \delta + \gamma)(1 - R_0)$$

Selanjutnya eksistensi titik ekuilibrium endemik dinyatakan dalam Teorema 2 berikut.

Teorema 2. Model(1) mempunyai

- satu titik ekuilibrium endemik jika $a_1 < 0$ dan $R_0 = 1$,
- satu titik ekuilibrium endemik jika $R_0 > 1$,
- dua titik ekuilibrium endemik jika $a_1 < 0$ dan $R_0 < 1$,
- tidak memiliki titik ekuilibrium endemik jika $a_1 > 0$ dan $R_0 < 1$.

Bukti.

- Apabila nilai $R_0 = 1$ maka diperoleh nilai $a_2 = 0$ maka dari persamaan (2) diperoleh $I^* = 0$ atau $I^* = -\frac{a_1}{a_0}$. Untuk nilai $I^* = 0$ tidak memenuhi karena di titik ekuilibrium endemik masih ada individu yang terinfeksi COVID-19, sedangkan untuk $I^* = -\frac{a_1}{a_0}$ supaya pada memiliki solusi positif maka nilai a_1 harus negatif atau $a_1 < 0$ karena nilai a_0 sudah pasti positif atau $a_0 > 0$.
- Apabila nilai $R_0 > 1$ maka diperoleh nilai $a_2 < 0$ dan $a_0 > 0$ maka diperoleh 1 perubahan tanda pada Aturan Tanda Descartes yang mengartikan hanya ada 1 titik ekuilibrium endemik.
- Apabila nilai $R_0 < 1$ maka diperoleh nilai $a_2 > 0$, $a_1 < 0$, dan $a_0 > 0$ maka diperoleh 2 perubahan tanda pada Aturan Tanda Descartes yang mengartikan adanya 2 titik ekuilibrium endemik.
- Apabila nilai $R_0 < 1$ maka diperoleh nilai $a_2 > 0$, $a_1 > 0$, dan $a_0 > 0$ maka diperoleh tidak ada perubahan tanda pada Aturan Tanda Descartes yang mengartikan tidak adanya titik ekuilibrium endemik.

Selanjutnya akan dilakukan analisis kestabilan titik ekuilibrium. Kestabilan ditentukan dengan memperhatikan bagian *real* nilai eigen dari matriks Jacobi di titik

ekuilibrium. Kestabilan titik ekuilibrium dikatakan pada teorema berikut:

Teorema 3. Titik ekuilibrium E_0 stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$ dan tidak stabil jika $R_0 > 1$.

Bukti.

Matriks Jacobian sistem persamaan (1) di titik E_0 yaitu

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -(\mu + \alpha) & 0 & -\frac{\Lambda\beta_1}{(\mu + \alpha)} & 0 \\ \alpha & -\mu & -\frac{\Lambda\alpha\beta_2}{\mu(\mu + \alpha)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Lambda\beta_1}{(\mu + \alpha)} + \frac{\Lambda\alpha\beta_2}{\mu(\mu + \alpha)} - (\mu + \gamma + \delta) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}$$

Dari matriks Jacobian diperoleh persamaan karakteristik berikut

$$(\lambda + \mu)(\lambda + \mu + \alpha)(\lambda + \mu) \left(\lambda - (\mu + \gamma + \delta) \left(\frac{\Lambda(\mu\beta_1 + \alpha\beta_2)}{\mu(\mu + \alpha)(\mu + \gamma + \delta)} - 1 \right) \right) = 0$$

Diketahui nilai $R_0 = \frac{\Lambda(\mu\beta_1 + \alpha\beta_2)}{\mu(\mu + \alpha)(\mu + \gamma + \delta)}$ maka persamaan menjadi

$$(\lambda + \mu)(\lambda + \mu + \alpha)(\lambda + \mu)(\lambda - (\mu + \gamma + \delta)(R_0 - 1)) = 0$$

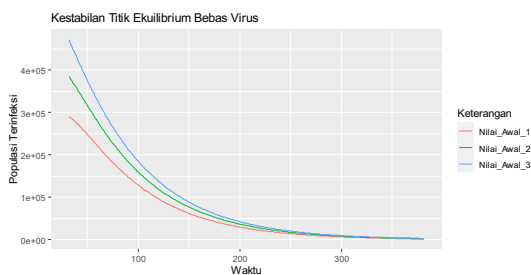
diperoleh

$$\lambda_1 = -\mu \text{ atau } \lambda_2 = -(\mu + \alpha) \text{ atau}$$

$$\lambda_3 = -\mu \text{ atau } \lambda_4 = (\mu + \gamma + \delta)(R_0 - 1)$$

Mengingat nilai parameter bernilai positif, maka nilai $\lambda_i < 0, i = 1, 2, 3, 4$ jika $R_0 < 1$. Dengan demikian titik ekuilibrium bebas virus E_0 stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$ dan tidak stabil jika $R_0 > 1$.

Selanjutnya dilakukan simulasi numerik pada kestabilan titik ekuilibrium bebas virus dan diperoleh grafik berikut:



Gambar 2. Kestabilan titik ekuilibrium bebas virus

Dari grafik diatas dapat dilihat bahwa dari ketiga nilai awal yang berbeda sama-sama menuju satu titik ekuilibrium bebas virus pada hari ke 350, sehingga dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium bebas virus stabil asimtotik lokal, artinya penyakit COVID-19 akan menghilang.

Teorema 4. Titik ekuilibrium endemik E^* stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$ dan $\frac{\mu R_0(\mu + \alpha)(\beta_1(\mu + \beta_2 I^*) + \alpha\beta_2)}{(\mu + \alpha + \beta_1 I^*)(\mu + \beta_2 I^*)(\mu\beta_1 + \alpha\beta_2)} < 1$.

Bukti.

Diketahui nilai $R_0 = \frac{\Lambda(\mu\beta_1 + \alpha\beta_2)}{\mu(\mu + \alpha)(\mu + \gamma + \delta)}$, titik ekuilibrium endemik E^* dapat disederhanakan menjadi

$$E^* = (S^*, S_M^*, I^*, R^*)$$

dengan

$$S^* = \frac{\mu R_0(\mu + \alpha)(\mu + \gamma + \delta)}{(\mu + \alpha + \beta_1 I^*)(\mu\beta_1 + \alpha\beta_2)}$$

$$S_M^* = \frac{\mu\alpha R_0(\mu + \alpha)(\mu + \gamma + \delta)}{(\mu + \alpha + \beta_1 I^*)(\mu + \beta_2 I^*)(\mu\beta_1 + \alpha\beta_2)}$$

$$I^* = I^*$$

$$R^* = \frac{\gamma I^*}{\mu}$$

Matriks Jacobian sistem persamaan (1) di titik E^* yaitu

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} -J_{11} & 0 & -J_{13} & 0 \\ \alpha & -J_{22} & -J_{23} & 0 \\ \beta_1 I^* & \beta_2 I^* & J_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}$$

dengan

$$J_{11} = (\mu + \alpha + \beta_1 I^*)$$

$$J_{13} = \left(\frac{\mu\beta_1 R_0(\mu + \alpha)(\mu + \gamma + \delta)}{(\mu + \alpha + \beta_1 I^*)(\mu\beta_1 + \alpha\beta_2)} \right)$$

$$J_{22} = (\mu + \beta_2 I^*)$$

$$J_{23} = \left(\frac{\mu\alpha\beta_2 R_0(\mu + \alpha)(\mu + \gamma + \delta)}{(\mu + \alpha + \beta_1 I^*)(\mu + \beta_2 I^*)(\mu\beta_1 + \alpha\beta_2)} \right)$$

$$J_{33} = \frac{\mu R_0(\mu + \alpha)(\mu + \gamma + \delta)(\beta_1(\mu + \beta_2 I^*) + \alpha\beta_2)}{(\mu + \alpha + \beta_1 I^*)(\mu + \beta_2 I^*)(\mu\beta_1 + \alpha\beta_2)} - (\mu + \gamma + \delta)$$

Dari matriks Jacobian di atas diperoleh persamaan karakteristik berikut $(\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3) = 0$, dan diperoleh nilai $\lambda_1 = -\mu < 0$, sedangkan untuk ketiga nilai eigen lainnya diperoleh menggunakan kriteria Routh Hurwitz sebagai berikut :

$$(\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3) = 0,$$

dengan

$$a_1 = 2\mu + \beta_2 I^* + \alpha + \beta_1 I^* - (\mu + \gamma + \delta) \left(\frac{\mu R_0(\mu + \alpha)(\beta_1(\mu + \beta_2 I^*) + \alpha\beta_2)}{(\mu + \alpha + \beta_1 I^*)(\mu + \beta_2 I^*)(\mu\beta_1 + \alpha\beta_2)} - 1 \right)$$

$$a_2 = - \left(2\mu + \beta_2 I^* + \alpha + \beta_1 I^* \right) (\mu + \gamma + \delta) \left(\frac{\mu R_0(\mu + \alpha)(\beta_1(\mu + \beta_2 I^*) + \alpha\beta_2)}{(\mu + \alpha + \beta_1 I^*)(\mu + \beta_2 I^*)(\mu\beta_1 + \alpha\beta_2)} - 1 \right) +$$

$$(\mu + \alpha + \beta_1 I^*)(\mu + \beta_2 I^*) + \beta_1 I^* \left(\frac{\mu\beta_1 R_0(\mu + \alpha)(\mu + \gamma + \delta)}{(\mu + \alpha + \beta_1 I^*)(\mu\beta_1 + \alpha\beta_2)} \right) +$$

$$\beta_2 I^* \left(\frac{\mu\alpha\beta_2 R_0(\mu + \alpha)(\mu + \gamma + \delta)}{(\mu + \alpha + \beta_1 I^*)(\mu + \beta_2 I^*)(\mu\beta_1 + \alpha\beta_2)} \right)$$

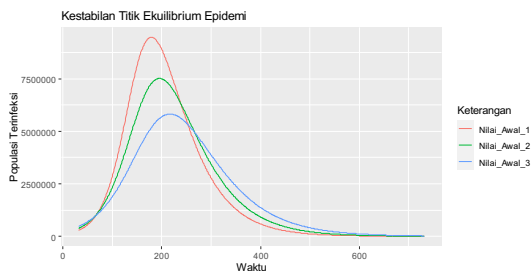
$$a_3 = -(\mu + \alpha + \beta_1 I^*)(\mu + \beta_2 I^*)(\mu + \gamma + \delta) \left(\frac{\mu R_0(\mu + \alpha)(\beta_1(\mu + \beta_2 I^*) + \alpha \beta_2)}{(\mu + \alpha + \beta_1 I^*)(\mu + \beta_2 I^*)(\mu \beta_1 + \alpha \beta_2)} - 1 \right) + \alpha \beta_2 I^* \left(\frac{\mu \beta_1 R_0(\mu + \alpha)(\mu + \gamma + \delta)}{(\mu + \alpha + \beta_1 I^*)(\mu \beta_1 + \alpha \beta_2)} \right) + \beta_1 I^* (\mu + \beta_2 I^*) \left(\frac{\mu \beta_1 R_0(\mu + \alpha)(\mu + \gamma + \delta)}{(\mu + \alpha + \beta_1 I^*)(\mu \beta_1 + \alpha \beta_2)} \right) + \beta_2 I^* \left(\frac{\mu \alpha \beta_2 R_0(\mu + \alpha)(\mu + \gamma + \delta)}{(\mu + \beta_2 I^*)(\mu \beta_1 + \alpha \beta_2)} \right)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_3$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 - a_3^2 = a_3(a_1 a_2 - a_3) = a_3 D_2$$

Berdasarkan kriteria Routh Hurwitz, titik ekuilibrium endemik E^* stabil asimtotik lokal jika $a_1, a_2, a_3 > 0$ dan $\det(D_2) = a_1 a_2 - a_3 > 0$. Kriteria ini terpenuhi jika nilai $R_0 > 1$ dan $\frac{\mu R_0(\mu + \alpha)(\beta_1(\mu + \beta_2 I^*) + \alpha \beta_2)}{(\mu + \alpha + \beta_1 I^*)(\mu + \beta_2 I^*)(\mu \beta_1 + \alpha \beta_2)} < 1$ sehingga titik ekuilibrium endemik E^* stabil asimtotik.

Selanjutnya dilakukan simulasi numerik pada kestabilan titik ekuilibrium endemik dan diperoleh grafik pada Gambar 3.



Gambar 3. Kestabilan titik ekuilibrium endemik

Dari Gambar 3 dapat dilihat bahwa dari ketiga nilai awal yang berbeda sama-sama menuju satu titik ekuilibrium endemik pada hari ke 700, sehingga dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium endemik stabil, artinya penyakit COVID-19 akan tetap ada.

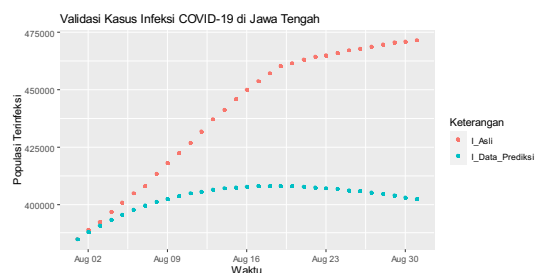
Simulasi Numerik

Pada bagian ini akan dilakukan simulasi numerik menggunakan nilai parameter yang diestimasi dari data tanggal 1 sampai 31 Agustus 2021 (Austen, 2021). Dari data Badan Pusat Statistik (BPS) Jawa Tengah diperkirakan $\Lambda = 1095,89$ jiwa/hari dan jumlah penduduk di Jawa Tengah sebanyak 36516035 jiwa dengan angka harapan hidup

rata-rata 74,37 tahun (Badan Pusat Statistik, 2021), sehingga diperoleh kematian alami sebesar $\mu = \frac{1}{74.37 \times 365} = 3,69 \times 10^{-5}$ per hari. Untuk proporsi imigrasi diasumsikan 1 karena belum ada data yang memberikan adanya imigran yang terinfeksi COVID-19.

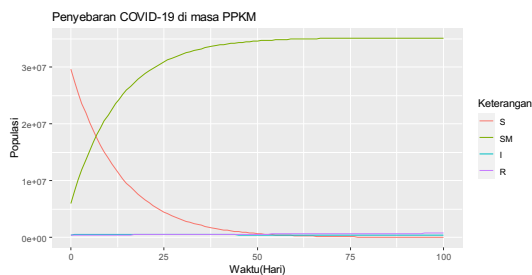
Selanjutnya, untuk laju interaksi subpopulasi S atau β_1 diperoleh dari estimasi jumlah manusia rentan yang dikalikan masa inkubasi (proses infeksi). Oleh karena itu, diperoleh nilai $\beta_1 = 6.7066 \times 10^{-9}$, sedangkan laju interaksi subpopulasi S_M atau β_2 dapat diestimasi dari laju interaksi manusia rentan dikalikan banyaknya kontak saat PPKM dengan asumsi banyaknya kontak sebanyak 0,42 oleh (Huda, Arief Fatchul dkk, 2019), maka diperoleh $\beta_2 = 2.8168 \times 10^{-9}$. Pada nilai γ yang mempresentasikan laju kesembuhan dari COVID-19 diambil dari estimasi masa pemulihan sehingga diperoleh nilai $\gamma = \frac{1}{14} = 0,0714$, dan laju kematian karena COVID-19 yang dinotasikan δ yang dapat dilihat tingkat kematian dengan rentang $0,0507 < \delta < 0,0603$ pada (Austen, 2021).

Dalam penelitian ini, simulasi diberikan untuk memberikan gambaran dari penyebaran COVID-19 pada masa PPKM di Jawa Tengah, oleh karena itu pada model melibatkan faktor PPKM. Faktor PPKM dideskripsikan oleh parameter individu rentan yang menaati peraturan kebijakan PPKM yang dikeluarkan pemerintah yang disebut parameter α . Untuk mengetahui dampak PPKM akan dilihat pada analisis sensitivitas parameter α dengan melihat tingkat kepatuhan individu dalam menaati peraturan PPKM. Sebelumnya dilakukan perbandingan data nyata dengan data hasil prediksi penyebaran COVID-19 pada masa PPKM di Jawa Tengah pada tanggal 1-31 Agustus 2021.



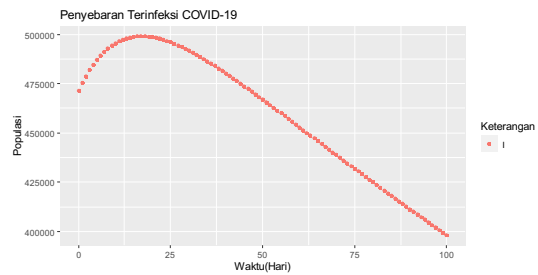
Gambar 4. Perbandingan populasi terinfeksi hasil data nyata dengan data prediksi penyebaran COVID-19 pada masa PPKM di bulan Agustus 2021

Dari Gambar 4 diperoleh perbandingan data nyata dengan data prediksi penyebaran COVID-19 pada masa PPKM, pada kedua grafik sama-sama mengalami kenaikan namun pada data prediksi grafik mulai menurun pada pertengahan bulan Agustus 2021. Hasil dari simulasi data nyata dengan data prediksi diperoleh nilai MAPE (*Mean Absolute Percent Error*). Untuk nilai MAPE data nyata dengan data prediksi di masa PPKM sebesar **8,13%**. Dengan hasil MAPE dibawah **10%** maka dapat diartikan hasil data prediksi sangat akurat. Oleh karena itu, pada model SS_MIR dapat digunakan untuk simulasi numerik supaya mengetahui penyebaran COVID-19 pada masa PPKM di Jawa Tengah. Berikut grafik pada penyebaran COVID-19 pada masa PPKM di Jawa Tengah:



Gambar 5. Penyebaran COVID-19 pada masa PPKM

Dari Gambar 5 menunjukkan masing-masing grafik populasi di masa PPKM dengan grafik ada yang mengalami kenaikan dan ada yang mengalami penurunan. Populasi yang mengalami kenaikan pada subpopulasi manusia sembuh dari COVID-19 sampai hari ke 100 atau sampai sekitar bulan Desember tahun 2021 dan pada grafik populasi manusia rentan yang menaati peraturan PPKM mengalami kenaikan sampai hari ke 60 atau pada tanggal 30 Oktober tahun 2021 dan kemudian setimbang sampai hari ke 100 atau sampai bulan Desember tahun 2021, kemudian grafik mengalami penurunan sampai hari ke 100 atau sampai bulan Desember tahun 2021, sedangkan pada subpopulasi manusia rentan yang tidak menaati peraturan PPKM, grafik mengalami penurunan sampai hari ke 60 atau pada tanggal 30 Oktober tahun 2021 dan kemudian setimbang sampai hari ke 100 atau sampai bulan Desember tahun 2021.



Gambar 6. Populasi Terinfeksi COVID-19.

Pada Gambar 6 merupakan grafik subpopulasi manusia terinfeksi COVID-19 pada masa PPKM di Jawa Tengah, dari grafik terlihat mengalami kenaikan sampai puncaknya pada hari ke 17 pada tanggal 17 September 2021 dengan populasi sebanyak sekitar 499135 jiwa, kemudian mengalami penurunan sampai hari ke 100 atau sekitar bulan Desember 2021.

Analisis Sensitivitas

Pada model (1), dilakukan analisis indeks sensitivitas pada bilangan reproduksi dasar (R_0). Untuk bilangan $R_0 = \frac{\Lambda(\mu\beta_1 + \alpha\beta_2)}{\mu(\mu + \alpha)(\mu + \delta + \gamma)}$ terdapat parameter yang akan dicari indeks sensitivitasnya yaitu $\beta_1, \beta_2, \alpha, \gamma$, dan δ . Maka indeks sensitivitas dari R_0 yang diturunkan terhadap parameter β_1 diperoleh

$$C_{\beta_1}^{R_0} = \frac{\partial R_0}{\partial \beta_1} \cdot \frac{\beta_1}{R_0}$$

$$\Leftrightarrow C_{\beta_1}^{R_0} = \frac{\Lambda\mu}{\mu(\mu + \alpha)(\mu + \delta + \gamma)} \cdot \frac{\beta_1\mu(\mu + \alpha)(\mu + \delta + \gamma)}{\Lambda(\mu\beta_1 + \alpha\beta_2)}$$

$$\Leftrightarrow C_{\beta_1}^{R_0} = \frac{\mu\beta_1}{(\mu\beta_1 + \alpha\beta_2)}$$

Dengan cara yang sama diperoleh indeks sensitivitas dari parameter lainnya yaitu

$$C_{\beta_2}^{R_0} = \frac{\partial R_0}{\partial \beta_2} \cdot \frac{\beta_2}{R_0} = \frac{\alpha\beta_2}{(\mu\beta_1 + \alpha\beta_2)}$$

$$C_{\alpha}^{R_0} = \frac{\partial R_0}{\partial \alpha} \cdot \frac{\alpha}{R_0} = \frac{\mu\alpha\beta_2}{(\mu + \alpha)(\mu\beta_1 + \alpha\beta_2)}$$

$$C_{\gamma}^{R_0} = \frac{\partial R_0}{\partial \gamma} \cdot \frac{\gamma}{R_0} = -\frac{\gamma}{(\mu + \delta + \gamma)}$$

$$C_{\delta}^{R_0} = \frac{\partial R_0}{\partial \delta} \cdot \frac{\delta}{R_0} = -\frac{\delta}{(\mu + \delta + \gamma)}$$

Nilai parameter yang digunakan untuk menghitung indeks sensitivitas ditunjukkan pada Tabel 1.

Tabel 1 Nilai parameter pada model matematika

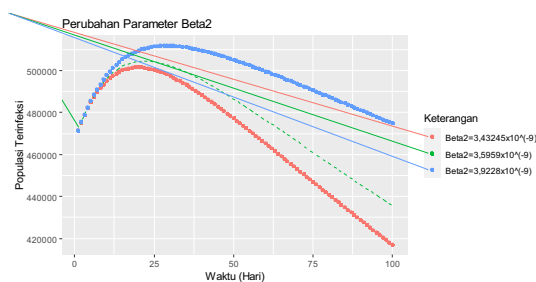
Parameter	Nilai	Parameter	Nilai
Λ	1095,89	β_1	$6,7066 \times 10^{-9}$
p	1	β_2	$2,8168 \times 10^{-9}$
μ	$3,69 \times 10^{-5}$	γ	0,0714
α	0,75	δ	0,603

Sedangkan nilai hasil analisis indeks sensitivitas parameter dari R_0 pada model matematika penyebaran COVID-19 pada masa PPKM diberikan pada Tabel 2.

Tabel 2. Hasil analisis sensitivitas parameter terhadap R_0

Parameter	Indeks Sensitivitas
β_1	+0,000117128
β_2	+0,9998829
α	+0,00004919182
γ	-0,5419894
δ	-0,4577305

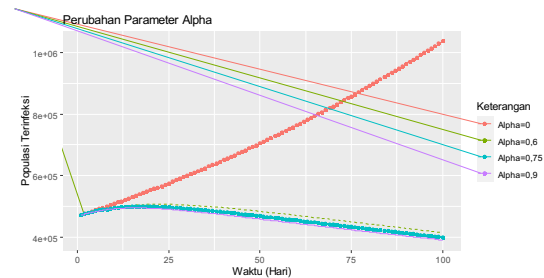
Berdasarkan Tabel 2 diperoleh relasi yang positif dan relasi negatif. Artinya dari relasi positif, apabila parameter tersebut naik maka nilai R_0 juga naik dan sebaliknya. Sedangkan relasi negatif mengartikan apabila parameter tersebut naik maka nilai R_0 menjadi turun dan juga sebaliknya. Selanjutnya dari simulasi numerik untuk perbedaan perubahan parameter β_2 yang merupakan relasi positif pada populasi terinfeksi (I) sebesar 5%, 10%, dan 20% diperoleh grafik pada Gambar 9.



Gambar 7. Perbandingan Perbedaan Nilai Parameter β_2

Dari Gambar 7 dapat dilihat perbedaan kasus terinfeksi COVID-19 di Jawa Tengah dengan perbedaan kenaikan nilai parameter atau laju interaksi subpopulasi, semakin besar laju β_2 maka semakin tinggi angka R_0 .

Selanjutnya dari simulasi numerik untuk perbedaan nilai parameter α yang merupakan laju pelaksanaan PPKM untuk mengetahui seberapa besar dampak pelaksanaan PPKM pada subpopulasi terinfeksi COVID-19 (I) dengan asumsi nilai $\alpha = 0$ atau tidak ada yang menaati peraturan kebijakan PPKM, nilai α diturunkan sebesar 20%, nilai α tetap sebesar $\alpha = 0,75$, dan nilai α dinaikkan sebesar 20%, sehingga diperoleh grafik pada Gambar 10.



Gambar 8. Perbandingan Perbedaan Nilai Parameter α

Dari Gambar 8 juga dapat dilihat grafik apabila tidak melaksanakan atau 80 tidak menaati peraturan kebijakan PPKM maka pada subpopulasi terinfeksi COVID19 meningkat sampai hari ke 100 atau sampai bulan Desember tahun 2021 dengan populasi yang terinfeksi COVID-19 diatas 1000000 jiwa. Dibandingkan dengan grafik yang melaksanakan atau menaati peraturan kebijakan PPKM untuk tingkat kepatuhan sebesar atau mengalami puncak kasus terinfeksi COVID-19 yaitu pada tanggal 22 September 2021 sekitar 506170 jiwa yang terinfeksi COVID19, grafik dengan tingkat kepatuhan sebesar atau mengalami puncak pada tanggal 18 September 2021 sebanyak jiwa yang terinfeksi COVID-19 dan grafik dengan tingkat kepatuhan sebesar atau mengalami puncak pada tanggal 15 September 2021 sebanyak jiwa yang terinfeksi COVID-19.

PENUTUP

Pada artikel ini mempelajari model matematika SS_MIR pada penyebaran COVID-19 saat PPKM di Jawa Tengah. Dari model memiliki 2 titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas virus dan titik ekuilibrium endemik, serta diselidiki kestabilannya. Penelitian ini juga dilakukan simulasi numerik menggunakan nilai parameter yang diperoleh dan dapat disimpulkan bahwa pelaksanaan PPKM di Provinsi Jawa Tengah berhasil diterapkan, karena dapat menekan jumlah populasi yang terinfeksi COVID-19 di Jawa

Tengah. Upaya yang dapat dilakukan pemerintah Jawa Tengah untuk menurunkan laju interaksi sehingga tidak terjadi lonjakan kasus terinfeksi COVID-19 lagi di Jawa Tengah yaitu dengan memperketat kepatuhan peraturan pelaksanaan kebijakan PPKM, supaya tidak adanya mobilitas atau kegiatan masyarakat yang mengakibatkan adanya pertemuan antar masyarakat. Diperlukan juga intervensi dari tenaga kesehatan supaya dapat mempercepat kesembuhan dari COVID-19.

UCAPAN TERIMAKASIH

Terimakasih kepada Universitas Ahmad Dahlan yang telah mensupport penyelesaian penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

Adi, Y.A & Ndi, M.Z. 2020. Modeling and Prediction of COVID-19 with a Large Scale Social Distancing. *Jurnal Fourier* 9(1): 1-9.

Austen, R. 2021. Statistik COVID19 per Provinsi. Data Studio. Corona Statistic › Data per Provinsi (google.com). (2021/09/02).

Badan Pusat Statistik. 2021. Hasil Sensus Penduduk 2020 di Provinsi Jawa Tengah. 11

Darmalaksana, W. 2021. Semangat Sembuh dari Paparan Covid dengan Basis Keluarga. *Studi Lapangan Masa PPKM*: 1-10

Darmansah, D. D & Wardani, N.W. 2021. Analisis Penyebaran Penularan Virus Corona di Provinsi Jawa Tengah Menggunakan Metode K-Means Clustering. *JATISI (Jurnal Teknik Informatika Dan Sistem Informasi)* 8(1): 105-117

Fauzia, L.A. 2021. Analisis Pemodelan Matematika Penularan COVID-19 Dengan Tindakan Rawat Inap Di Rumah Sakit. 09(01).

Hu, B. 2019. Characteristics of SARS-CoV-2 and COVID-19. *Nature Reviews*

Microbiology, December.

Huda, A. F., Wulan, E. R., Ilahi, F., Khumaeroh, M.S. 2019. Analisis Pengaruh Social Distancing pada Transmisi Covid-19 dengan Menggunakan Model SIR. *Jurusan Matematika, Fakultas Sains Dan Teknologi, UIN Sunan Gunung Djati Bandung*: 1-9.

Kemkes RI,S.T.P.C.-19. 2021. Peta Sebaran Covid 19. <https://covid19.go.id/peta-sebaran-covid19>

Susilo, A., Rumenende, C.M., Pitoyo, C.W., Santoso, W.D., Yulianti, M., Herikurniawan, ... Yuniastuti, E. 2020. Coronavirus Disease 2019: Tinjauan Literatur Terkini. 7(1), 45.

Van Den Driessche, P & Watmough, J. 2002. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Mathematical Biosciences*, 48.