UJM 1 (1) (2012)
UNNES Journal of Mathematics
http://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/ujm

PENYELESAIAN KASUS BEBERAPA INTEGRAL TAK WAJAR DENGAN INTEGRAN MEMUAT FUNGSI EKSPONENSIAL DAN FUNGSI LOGARITMA

Anisa Kurniawati✉, **dan Wuryanto**

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Indonesia

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima Juli 2012
Disetujui Ferbruari 2012
Dipublikasikan Mei2012

Keywords:
kalkulus
integral tak wajar
fungsi gamma
fungsi beta

Abstrak

Matematika mempunyai peranan yang cukup besar dalam kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi saat ini, baik dari segi keilmuan matematika maupun dari segi terapannya. Dalam matematika terdapat kajian mengenai kalkulus yang di antaranya membahas teorema L'Hopital, integral tak wajar, fungsi gamma, dan fungsi beta. Integral dengan batas tak hingga dapat disebut sebagai integral tak wajar. Menyelesaikan suatu integral tak wajar dapat dilakukan dengan mencari limit dari fungsinya. Fungsi gamma dan fungsi beta merupakan fungsi dalam bentuk integral. Dalam artikel akan dikaji cara menyelesaikan beberapa integral tak wajar yang integrannya memuat fungsi eksponensial dan fungsi logaritma. Berdasarkan penelitian disimpulkan bahwa fungsi gamma dan fungsi beta dapat digunakan untuk menyelesaikan kasus beberapa integral tak wajar yang memiliki bentuk sesuai fungsi gamma dan fungsi beta serta memiliki bentuk-bentuk khusus. Integral tak wajar dengan integran memuat fungsi logaritma dapat diselesaikan dengan langkah mensubstitusi variabel x dengan e^{-u} Integral tak wajar dengan integran memuat fungsi eksponensial dapat diselesaikan menggunakan fungsi gamma dengan cara merubah fungsi tersebut sesuai dengan bentuk fungsi gamma. Beberapa kasus integral tak wajar dapat diselesaikan menggunakan fungsi beta dengan cara merubah fungsi tersebut sesuai dengan bentuk fungsi beta, kemudian mencari nilai dari fungsi beta tersebut dengan menggunakan hubungan fungsi gamma dan fungsi beta.

Abstract

Mathematics has a significant role in the advancement of science and technology today, both in terms of mathematics and science in terms of it's applications. In mathematics, there is a study of the calculus of which discusses the L'Hopital theorem, improper integrals, gamma functions, and the beta function. Integrals with infinite limits can be called improper integrals. Complete an improper integral can be done by finding the limit of its functions. This article will be reviewed to resolve some of the improper integrals that contain exponential functions and logarithmic functions. Based on the study, it can be concluded that the gamma and beta function can be used to solve several cases of improper integral that has the appropriate form of gamma and beta functions and have specific forms. Improper integrals with integrands containing logarithmic functions can be solved by substituting the variable x with e^{-u}. Improper integrals with integrands containing the exponential function can be solved using the gamma function by changing the function corresponding to the shape of the gamma function. Some cases of improper integrals can be solved using the beta function by changing the function corresponding to the shape of the beta function, then find the value of beta function using function relationship of beta and gamma functions.

✉ Alamat korespondensi:
E-mail: aneeza_nia@yahoo.com

ISSN 2252-6943

Pendahuluan

Matematika mempunyai peranan yang cukup besar dalam kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi saat ini, baik dari segi keilmuan matematika maupun dari segi terapannya. Ilmu matematika berisi kumpulan teori-teori deduktif yang aksiomatis, masing-masing mempunyai suatu sistem tertentu yang terdiri dari pengertian-pengertian atau simbol-simbol yang sederhana, pernyataan-pernyataan pangkal yang sederhana, dan pernyataan-pernyataan sederhana yang tidak perlu dibuktikan. Akibatnya, kesimpulan yang diambil sangatlah logis dan terstruktur secara sistematis.

Suatu integral dengan batas tak hingga dapat disebut sebagai integral tak wajar, seperti integral dengan batas atas tak hingga, integral dengan batas bawah tak hingga, dan integral dengan batas atas dan bawah tak hingga. Dalam artikel ini akan dikaji cara menyelesaikan kasus beberapa integral tak wajar menggunakan fungsi gamma dan fungsi beta. Pada tulisan ini fungsi gamma digunakan untuk menyelesaikan kasus beberapa integral tak wajar dengan integran memuat fungsi eksponensial dan fungsi logaritma

Definisi 1

Jika f kontinu untuk setiap nilai $x \in R$ dan c suatu bilangan real maka

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx$$

bilamana limit ini ada. Jika limit tersebut ada, maka integral tak wajarnya dikatakan konvergen. Jika limitnya tidak ada, maka dikatakan bahwa integral tak wajarnya divergen (Leithold, 1993:277).

Definisi 2

Jika f kontinu di setiap x pada selang (a,b] dan jika $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$, maka

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx$$

bilamana limit ini ada (Leithold, 1993:286).

Definisi 3

Jika f kontinu di setiap x pada selang [a,b) dan jika $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$ maka

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to b^-}\int_a^t f(x)dx$$

bilamana limit ini ada (Leithold, 1993:287).

Definisi 4

Jika f kontinu di setiap x pada selang [a,b] kecuali di c, bila a<c<b, dan jika $\lim_{x\to c}|f(x)| = +\infty$ maka

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)dx + \lim_{s\to c^+}\int_s^b f(x)dx$$

bilamana limit ini ada (Leithold, 1993:287).

Teorema 5

Jika f(x) dan g(x) keduanya mendekati 0 dan juga mendekati $\pm\infty$, maka $\lim_{\square}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\square}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

"lim" adalah untuk sembarang dari

$$\lim_{x\to+\square} \square, \lim_{x\to-\square} \square, \lim_{x\to a} \square, \lim_{x\to a^+}$$

(Ayres & Mendelson, 2006:154).

Teorema 6

Peraturan perubahan variabel dalam integral tertentu diberikan sebagai berikut

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx = \int_{u_1}^{u_2} f[x(u)]\, \frac{dx}{du}\, du$$

dengan f suatu fungsi kontin di $x \in [x_1, x_2]$ dan x=x(u) terdefinisi pada setiap $u \in [u_1, u_2]$ mempunyai turunan kontinu dengan $x_1 = x(u_1)$, $x_2 = x(u_2)$ dan f[x(u)] kontinu untuk $u_1 \le u \le u_2$ Soemartojo, 1987:65).

Definisi 7

Fungsi eksponensial dengan basis b adalah fungsi dari bilangan real R ke bilangan real positif $\mathbb{R}^+$ yang didefinisikan sebagai berikut $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ dengan $f(x) = b^x, \forall x \in \mathbb{R}$ (Siang, 2002:140).

Definisi 9

Fungsi gamma dinotasikan dengan $\Gamma(n)$ dan didefinisikan sebagai $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$

yang konvergen untuk setiap bilangan real positif n (Spiegel, 1974:285).Dari definisi di atas, hubungan antara fungsi beta dan gamma dapat ditentukan. Dalam Wrede & Spiegel (2007) diberikan hubungan Fungsi beta dengan fungsi gamma yaitu

II.Penyelesaian Integral Tak Wajar dengan Fungsi Gamma

1. Hitunglah

Penyelesaian:

jelas $\int_0^\infty e^{-x+2\ln x}dx.$

$$= \int_0^\infty e^{-x}.e^{\ln x^2}dx = \int_0^\infty e^{-x}.x^2dx$$

$$\int_0^\infty e^{-x+2\ln x}dx = \int_0^\infty e^{-x+\ln x^2}dx$$

$$= \int_0^\infty x^{3-1}.e^{-x}dx = \Gamma(3) = 2! = 2.$$

2. Hitunglah $\int_0^\infty \sqrt{x}.e^{-x}dx.$

penyelesaian :

jelas $\int_0^\infty \sqrt{x}.e^{-x}dx = \int_0^\infty (x)^{\frac{1}{2}}.e^{-x}dx$

$$= \int_0^\infty (x)^{\frac{3}{2}-1}.e^{-x}dx = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

3.Hitunglah $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx.$

Penyelesaian:

jelas $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx = \int_0^\infty (x)^{-\frac{1}{2}}.e^{-x}dx$

$$= \int_0^\infty (x)^{\frac{1}{2}-1}.e^{-x}dx = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

4. Hitunglah $\int_0^\infty x^{-\frac{1}{3}}.e^{-8x}dx.$

Penyelesaian:

Jelas $\int_0^\infty x^{-\frac{1}{3}}.e^{-8x}dx = \int_0^\infty \frac{2}{8}.(8x)^{-\frac{1}{3}}.e^{-8x}d(8x)$

$$= \frac{1}{4}\int_0^\infty (8x)^{\frac{2}{3}-1}.e^{-8x}d(8x) = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right).$$

5.Hitunglah $\int_0^\infty x^2.e^{-x^2}dx.$

Penyelesaian:

Tulis $x^2 = u \Leftrightarrow x = u^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow dx = \frac{1}{}u^{-\frac{1}{2}}du.$

Jelas $\int_0^\infty x^2.e^{-x^2}dx = \int_0^\infty u.e^{-u}.\frac{1}{2}.u^{-\frac{1}{2}}du$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty u^{\frac{1}{2}}.e^{-u}du = \frac{1}{2}\int_0^\infty u^{\frac{3}{2}-1}.e^{-u}du = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

6.Hitunglah $\int_0^\infty x^2.e^{-2x^2}dx.$

Penyelesaian:

Jelas

$$\int_0^\infty x^2.e^{-2x^2}dx = \int_0^\infty \frac{1}{4x}.x^2.e^{-2x^2}d(2x^2) = \frac{1}{4}\int_0^\infty x.e^{-2x^2}d(2x^2)$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}.(2x^2)^{\frac{1}{2}}.e^{-2x^2}d(2x^2) = \frac{1}{4}.\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty (2x^2)^{\frac{3}{2}-1}.e^{-2x^2}d(2x^2)$$

$$= \frac{1}{4}.\frac{1}{\sqrt{2}}.\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4\sqrt{2}}.\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{4\sqrt{2}}.\frac{1}{2}.\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8\sqrt{2}}\sqrt{\pi} = \frac{1}{16}\sqrt{2\pi}.$$

7.Hitunglah $\int_0^\infty e^{-x^2}dx.$

Penyelesaian:

Jelas

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_0^\infty \frac{x}{x}e^{-x^2}dx = \int_0^\infty x^{-1}e^{-x^2}\frac{1}{2}d(x^2)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty (x^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-x^2}d(x^2) = \frac{1}{2}\int_0^\infty (x^2)^{\frac{1}{2}-1}e^{-x^2}d(x^2)$$

$$= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

8.Hitunglah $\int_0^\infty \sqrt{y}.e^{-y^3}dy.$

Penyelesaian:

Tulis $y^3 = x \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{x} \Leftrightarrow dy = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx.$

Jelas

$$\int_0^\infty \sqrt{y}.e^{-y^3}dy = \int_0^\infty \sqrt{x^{\frac{1}{3}}.e^{-x}.\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^\infty x^{\frac{1}{6}}.x^{-\frac{2}{3}}.e^{-x}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}.e^{-x}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}-1}.e^{-x}\,dx = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}.$$

9.Hitunglah $\int_0^\infty \frac{e^{-st}}{\sqrt{t}}dt, s > 0.$

Penyelesaian:

Jelas

$$\int_0^\infty \frac{e^{-st}}{\sqrt{t}}dt = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}.e^{-st}dt = \int_0^\infty \sqrt{s}.(st)^{-\frac{1}{2}}.e^{-st}.\frac{1}{s}\,d(st)$$

$$= \frac{\sqrt{s}}{s}\int_0^\infty (st)^{-\frac{1}{2}}.e^{-st}\,d(st) = \frac{\sqrt{s}}{s}\int_0^\infty (st)^{\frac{1}{2}-1}.e^{-st}\,d(st)$$

$$= \frac{\sqrt{s}}{s}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{s}.\sqrt{\pi}}{s} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}.$$

10.Hitunglah $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}.$

Penyelesaian:

Tulis $x = 0 \Rightarrow u = \infty, \text{dan } x = 1 \Rightarrow u = 0.$

Jika $-\ln x = u \Leftrightarrow x = e^{-u} \Leftrightarrow dx = -e^{-u}du$

Jelas

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}} = -\int_\infty^0 \frac{1}{\sqrt{u}}.e^{-u}du = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}}.e^{-u}du =$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}} = -\int_\infty^0 \frac{1}{\sqrt{u}}.e^{-u}du = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}}.e^{-u}du$$

$$= \int_0^\infty (u)^{-\frac{1}{2}}.e^{-u}du = \int_0^\infty (u)^{\frac{1}{2}-1}.e^{-u}du = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

11.Hitunglah $\int_0^1 x^2 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^3 dx.$

Penyelesaian:

Tulis $x = e^{-u} \Leftrightarrow dx = -e^{-u}du.$

Jika

$x = 0 \Rightarrow u = \infty,$ dan $x = 1 \Rightarrow u = 0.$

Jelas

$$\int_0^1 x^2 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^3 dx = \int_\infty^0 (e^{-u})^2 \left(\ln\frac{1}{e^{-u}}\right)^3 (-e^{-u})du$$

$$= -\int_0 e^{-2u}(-e^{-u})(\ln e^u)^3 du = \int_0 u^3 . e^{-3u} du$$

12.Hitunglah $\int_0^1 \left[\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]^6 dx.$

Penyelesaian:

Tulis $x = e^{-u} \Leftrightarrow dx = -e^{-u}du.$

Jika $x = 0 \Rightarrow u = \infty, x = 1 \Rightarrow u = 0.$

Jelas

$$\int_0^1 \left[\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]^6 dx = \int_\infty^0 \left[\ln\left(\frac{1}{e^{-u}}\right)\right]^6 (-e)^{-u} du = -\int_0^\infty [\ln e^u]^6 (-e)^{-u} du$$

$$= \int_0^\infty u^6 . e^{-u} du = \int_0^\infty u^{7-1} . e^{-u} du = \Gamma(7) = 6! = 720.$$

13.Hitunglah $\Gamma(v) = \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{v-1} dx\,, v > 0.$

Penyelesaian:

Tulis $x = e^{-u} \Leftrightarrow dx = -e^{-u}du.$

Jika $x = 0 \Rightarrow u = \infty$, dan $x = 1 \Rightarrow u = 0.$

Jelas $\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{v-1} dx = \int_\infty^0 \left(\ln\left(\frac{1}{e^{-u}}\right)\right)^{v-1} . (-e^{-u})du$

$$= \int_0^\infty (\ln e^u)^{v-1} . e^{-u} du = \int_0^\infty u^{v-1} . e^{-u} du = \Gamma(v).$$

14.Hitunglah $\int_0^1 (\ln x)^4 \, dx.$

Penyelesaian:

Tulis $x = e^{-u} \Leftrightarrow dx = -e^{-u}du.$

Jika $x = 0 \Rightarrow u = \infty$, dan $x = 1 \Rightarrow u = 0.$

Jelas $\int_0^1 (\ln x)^4 \, dx = \int_\infty^0 (\ln e^{-u})^4 . (-e^{-u}) \, du$

$$= \int_0^\infty (\ln e^{-u})^4 . (e^{-u}) \, du = \int_0^\infty (-u)^4 . (e^{-u}) \, du$$

$$= \int_0^\infty u^4 . e^{-u} \, du = \int_0^\infty u^{5-1} . e^{-u} \, du = \Gamma(5) = 4! = 24.$$

15.Hitunglah $\int_0^1 (x \ln x)^3 dx.$

Penyelesaian:

Tulis $x = e^{-u} \Leftrightarrow dx = -e^{-u}du.$

Jika $x = 0 \Rightarrow u = \infty$, dan $x = 1 \Rightarrow u = 0.$

Jelas

$$\int_0^1 (x \ln x)^3 dx = \int_\infty^0 (e^{-u} \ln e^{-u})^3 (-e^{-u}) du = \int_0^\infty e^{-3u} (\ln e^{-u})^3 e^{-u} \, du$$

$$= \int_0^\infty (-u)^3 e^{-4u} \, du = -\int_0^\infty u^3 e^{-4u} \, du = -\int_0^\infty \frac{1}{4^3} (4u)^3 e^{-4u} \, \frac{1}{4} d(4u)$$

$$= -\frac{1}{4^4} \int_0^\infty (4u)^3 e^{-4u} \, d(4u) = \frac{1}{4^4} \int_0^\infty (4u)^{4-1} e^{-4u} \, d(4u) = -\frac{1}{4^4} \Gamma(4)$$

16.Hitunglah $\int_0^1 \sqrt[3]{\ln\left(\frac{1}{x}\right)} \, dx.$

Penyelesaian:

Tulis $x = e^{-u} \Leftrightarrow dx = -e^{-u}du.$

Jika $x = 0 \Rightarrow u = \infty$, dan $x = 1 \Rightarrow u = 0.$

Jelas

$$\int_0^1 \sqrt[3]{\ln\left(\frac{1}{x}\right)} \, dx = \int_\infty^0 (\ln e^u)^{\frac{1}{3}} (-e^{-u}) du = \int_0^\infty u^{\frac{1}{3}} \, e^{-u} \, du$$

$$= \int_0^\infty u^{\frac{4}{3}-1} \, e^{-u} \, du = \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right).$$

III. Penyelesaian Integral Tak Wajar dengan Fungsi Beta

1. Hitunglah . $\int_0^1 x^5 . (1-x)^4 dx.$

Penyelesaian:

Jelas .

$$\int_0^1 x^5 . (1-x)^4 dx = B(6{,}5) = \frac{\Gamma(6)\Gamma(5)}{\Gamma(11)} = \frac{5!4!}{10!} = \frac{1}{1260}.$$

2. Hitunglah $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx.$

Penyelesaian:

$x = 2v \Leftrightarrow dx = 2dv.$Tulis

Jika *x=0* maka *v=0*, dan *x=2* maka *v=1*.

Jelas

$$\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx = \int_0^1 \frac{(2v)^2}{\sqrt{2-2v}} . 2 \qquad \int_0^1 \frac{4v^2}{\sqrt{2(1-v)}} dv = \int_0^1 \frac{8}{\sqrt{2}} . \frac{v^2}{\sqrt{1-v}} \, dv$$

$$= 4\sqrt{2} \int_0^1 v^2 . (1-v)^{-\frac{1}{2}} dv = 4\sqrt{2} \, B\left(3, \frac{1}{2}\right) = 4\sqrt{2} . \frac{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}$$

$$= 4\sqrt{2} . \frac{2! . \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} . \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{16}{15} . 4\sqrt{2} = \frac{64\sqrt{2}}{15}.$$

3. Hitunglah . $\int_0^1 e^{5 \ln x + \ln(1-x)^3}$

Penyelesaian:

Jelas

$$\int_0^1 e^{5 \ln x + \ln(1-x)^3} \quad \int_0^1 e^{\ln x^5} e^{\ln(1-x)^3}$$

$$\int_0^1 x^5 (1-x)^3 = \int_0^1 x^{6-1} (1-x)^{4-1} dx$$

$B(6,4) = \frac{\Gamma(6)\Gamma(4)}{\Gamma(10)} = \frac{5!\,3!}{9!} = \frac{3.2.1}{9.8.7.6} = \frac{1}{504}.$

4. Hitunglah $\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Penyelesaian:

Jelas .

$\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 x^4 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$

$= \int_0^1 x^4 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2x} d(x^2)$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^3 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(x^2) = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2)^{\frac{3}{2}} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(x^2)$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2)^{\frac{5}{2}-1} (1-x^2)^{\frac{1}{2}-1} d(x^2) = \frac{1}{2} B\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\right)}$

$= \frac{1}{2}.\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{1}{2}.\frac{\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{1}{2}.\frac{\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)}$

$= \frac{1}{2}.\frac{\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{1}{2}.\frac{\frac{3}{4}.\sqrt{\pi}.\sqrt{\pi}}{2} = \frac{3}{16}\pi.$

5. Hitunglah $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$.

Penyelesaian:

Jelas

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} = \int_0^1 (1-x^3)^{-\frac{1}{2}} dx = \int_0^1 (1-x^3)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{3x^2} d(x^3)$

$= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^2}{x^2} (1-x^3)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2} d(x^3) = \frac{1}{3}\int_0^1 x^{-2} (1-x^3)^{-\frac{1}{2}} d(x^3)$

$= \frac{1}{3}\int_0^1 (x^3)^{-\frac{2}{3}} (1-x^3)^{-\frac{1}{2}} d(x^3) = \frac{1}{3}\int_0^1 (x^3)^{\frac{1}{3}-1} (1-x^3)^{\frac{1}{2}-1} d(x^3)$

$= \frac{1}{3} B\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right).$

6. Hitunglah $\int_0^\infty \frac{y^2}{(1+y)^6} dy$.

Penyelesaian:

Jelas .

$x = \frac{y}{1+y} \Leftrightarrow x + xy = y \Leftrightarrow x = y - xy \Leftrightarrow x = y(1-x) \Leftrightarrow y = \frac{x}{1-x}$

$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(1-x)+x}{(1-x)^2} \Leftrightarrow dy = \frac{1}{(1-x)^2} dx.$

Jika $y = 0 \Rightarrow x = 0$, dan $y = \infty \Rightarrow x = 1$.

Jelas $\int_0^\infty \frac{y^2}{(1+y)^6} dy = \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 \left(1+\frac{x}{1-x}\right)^{-6} \frac{1}{(1-x)^2} dx$

$= \int_0^1 \frac{x^2}{(1-x)^2}\left(\frac{1-x+x}{1-x}\right)^{-6} \frac{1}{(1-x)^2} dx = \int_0^1 \frac{x^2}{(1-x)^4}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{-6} dx$

$= \int_0^1 \frac{x^2}{(1-x)^4}(1-x)^6 dx = \int_0^1 x^2(1-x)^2 dx$

$= \int_0^1 x^{3-1}(1-x)^{3-1} dx = B(3,3)$

$= \frac{\Gamma(3)\Gamma(3)}{\Gamma(6)} = \frac{2!\,2!}{5!} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}.$

7. Hitunglah . $\int_0^a y^4\sqrt{a^2-y^2} dy$.

Penyelesaian:

Jelas

Tulis $y^2 = a^2x \Leftrightarrow y = a\sqrt{x} \Leftrightarrow dy = \frac{1}{2}.a.x^{-\frac{1}{2}} dx.$

Jika $y = 0 \Rightarrow x = 0$, dan $y = a \Rightarrow x = 1$.

Jelas $\int_0^a y^4\sqrt{a^2-y^2} dy = \int_0^1 (a^2x)^2.\sqrt{a^2-a^2x}.\frac{1}{2}.a.x^{-\frac{1}{2}} dx$

$= \frac{a}{2}\int_0^1 a^4.x^2.a.(1-x)^{\frac{1}{2}}.x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{a^6}{2}\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}.(1-x)^{\frac{1}{2}} dx$

$= \frac{a^6}{2}\int_0^1 x^{\frac{5}{2}-1}.(1-x)^{\frac{3}{2}-1} dx = \frac{a^6}{2}.B\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$

$= \frac{a^6}{2}.\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right).\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(4)} = \frac{a^6}{2}.\frac{\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\frac{1}{2}.\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{3!}$

$= \frac{a^6}{12}.\frac{3}{8}.\sqrt{\pi}.\sqrt{\pi} = \frac{\pi.a^6}{32}.$

8. Hitunglah $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx$.

Penyelesaian:

Jelas $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}.(1-x)^{\frac{1}{2}} dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}-1}.(1-x)^{\frac{3}{2}-1} dx$

$= B\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\frac{1}{2}.\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{1} = \frac{1}{2}.\sqrt{\pi}.\sqrt{\pi} = \frac{\pi}{2}.$

9. Hitunglah $\int_0^2 (4-x^2)^{\frac{3}{2}} dx$.

Penyelesaian:

Tulis $x^2 = 4y \Leftrightarrow x = 2\sqrt{y} \Leftrightarrow dx = y^{-\frac{1}{2}} dy.$

Jika $x = 0 \Rightarrow y = 0$, dan $x = 2 \Rightarrow y = 1$.

Jelas $\int_0^2 (4-x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \int_0^1 (4-4y)^{\frac{3}{2}}.y^{-\frac{1}{2}} dy = \int_0^1 8.(1-y)^{\frac{3}{2}}.y^{-\frac{1}{2}} dy$

$= 8\int_0^1 (1-y)^{\frac{5}{2}-1}.y^{\frac{1}{2}-1} dy = 8.B\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right) = 8.\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right).\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)}$

$= 8.\frac{\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2} = 3\pi.$

10. Hitunglah $\int_0^4 u^{\frac{3}{2}}.(4-u)^{\frac{5}{2}} du$.

Penyelesaian:

Tulis $u = 4v \Leftrightarrow du = 4\,dv$.

Jika $u = 0 \Rightarrow v = 0$, dan $u = 4 \Rightarrow v = 1$.

Jelas $\int_0^4 u^{\frac{3}{2}}.(4-u)^{\frac{5}{2}} du = \int_0^1 (4v)^{\frac{3}{2}}.(4-4v)^{\frac{5}{2}}.4\,dv = 4\int_0^1 8.v^{\frac{3}{2}}.32.(1-v)^{\frac{5}{2}} dv$

$= 1024\int_0^1 v^{\frac{3}{2}}.(1-v)^{\frac{5}{2}} dv = 1024\int_0^1 v^{\frac{5}{2}-1}.(1-v)^{\frac{7}{2}-1} dv = 1024.B\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)$

$= 1024.\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right).\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma(6)} = 1024.\frac{\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\frac{5}{2}.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{120}$

$= \frac{1024}{120}.\frac{45}{32}.\pi = 12\pi.$

11. Hitunglah $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2}}$.

Penyelesaian:

Tulis $x = 3y \Leftrightarrow dx = 3dy$.

Jika $x = 0 \Rightarrow y = 0$, dan $x = 3 \Rightarrow y = 1$.

Jelas $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2}} = \int_0^1 \frac{3}{\sqrt{9y-(3y)^2}} dy = 3\int_0^1 \frac{dy}{3\sqrt{y-y^2}} = \int_0^1 (y-y^2)^{-\frac{1}{2}} dy$

$$= \int_0^1 y^{-\frac{1}{2}}.(1-y)^{-\frac{1}{2}} dy = \int_0^1 y^{\frac{1}{2}-1}.(1-y)^{\frac{1}{2}-1} dy = B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \pi.$$

IV. Simpulan

Dari pembahasan di atas diperoleh simpulan bahwa integral tak wajar yang dapat diselesaikan dengan bantuan fungsi gamma meliputi (a) Integral tak wajar yang memiliki bentuk sesuai dengan fungsi gamma, (b) Integral tak wajar yang integrannya melibatkan fungsi eksponensial negatif dan (c) Integral tak wajar yang integrannya melibatkan fungsi logaritma. Dari beberapa contoh integral tak wajar terlihat bahwa integral tak wajar dengan integran memuat fungsi logaritma dapat diselesaikan menggunakan fungsi gamma dengan langkah mensubstitusi variabel x dengan e^u dan integral tak wajar dengan integran memuat fungsi eksponensial dapat diselesaikan menggunakan fungsi gamma dengan cara merubah fungsi tersebut sesuai dengan bentuk fungsi gamma.

Integral tak wajar yang dapat diselesaikan dengan bantuan fungsi beta meliputi (a) integral tak wajar yang memiliki bentuk sesuai dengan fungsi beta dan sifat-sifat fungsi beta, (b) integral tak wajar pada selang hingga dengan bentuk , (c) beberapa kasus integral tak wajar dapat diselesaikan menggunakan fungsi beta dengan cara merubah fungsi tersebut sesuai dengan bentuk fungsi beta, kemudian mencari nilai dari fungsi beta tersebut dengan menggunakan hubungan fungsi gamma dan fungsi beta.

DAFTAR PUSTAKA

Ayres, F. & E. Mendelson. 2006. Kalkulus Edisi Keempat (Alih Bahasa oleh Nur Danarjaya). Jakarta: Erlangga.

Leithold, L. 1986. Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik Jilid 1 (Alih Bahasa oleh E. Hutahaean). Jakarta: Erlangga.

Leithold, L. 1993. Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik Jilid 2 (Alih Bahasa oleh S. M. Nababan). Jakarta: Erlangga.

Soemartojo, N. 1987. Kalkulus Lanjutan. Jakarta: UI-Press.

Spiegel, M. R. 1974. Theory and Problems of Advanced Calculus. New York: McGraw-Hill International Book Company.

Siang, J.J. 2002. Matematika Diskrit dan Aplikasinya Pada Ilmu Komputer. Yogyakarta: Andi

Wrede, R. C. & M. Spiegel. 2007. Kalkulus Lanjut, Edisi kedua. Jakarta: Erlangga.