



ANALISIS MODEL *PREDATOR-PREY* DUA SPESIES DENGAN FUNGSI RESPON HOLLING TIPE III

Putri Wijayanti✉, M. Kharis

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Semarang, Indonesia

Info Artikel

Sejarah Artikel:

Diterima Agustus 2014
Disetujui September 2014
Dipublikasikan Mei 2015

Keywords:

*Predator-Prey Model; Holling
Response Functions of Type
III; Equilibrium Point.*

Abstrak

Model yang terdiri atas dua spesies berbeda dengan salah satu dari keduanya menyediakan makanan untuk yang lainnya merupakan salah satu model interaksi spesies antara mangsa pemangsa. Interaksi antara populasi ini dinamakan relasi *predator-prey*, dengan *prey* sebagai spesies yang dimangsa dan *predator* sebagai spesies yang memangsa. Pada artikel ini, dibahas sistem dinamik model *predator-prey* dua spesies dalam suatu jaring-jaring makanan yang terdiri dari *prey* dan *predator*. Pada model tersebut digunakan fungsi respon Holling tipe III, karena sesuai dengan tipe *predator* yang mencari mangsa lain ketika mangsa yang dimakannya mulai berkurang. Analisa untuk sistem tersebut dilakukan secara analitik dan secara numerik. Secara analitik terdapat tiga titik keseimbangan dengan beberapa syarat batas dalam sistem tersebut, sehingga terdapat enam kondisi titik keseimbangan. Tiga kondisi titik keseimbangan bersifat stabil dan tiga kondisi titik lainnya bersifat tidak stabil. Hasil simulasi numerik menunjukkan sifat yang sama untuk tiga titik keseimbangan tersebut.

Abstrak

The model consists of two distinct species with one of them providing food for others is one of the models of predator prey interactions between species. The interaction between this population predator-prey relationship is called, with the prey as prey and predator species as prey species. In this article, discussed system dynamics model of predator-prey two species in a food web consisting of prey and predators. In the model used Holling response function of type III, because according to the type of predators that seek other prey when the prey is eaten began to decrease. Analysis carried out for the system analytically and numerically. Analytically, there are three points of balance with some boundary condition in the system, so there are six equilibrium conditions. Three conditions are stable equilibrium point and the other three point condition is unstable. The results of numerical simulations show the same properties for the three-point balance.

© 2015 Universitas Negeri Semarang

PENDAHULUAN

Ekologi merupakan salah satu cabang ilmu biologi yang mempelajari hubungan timbal balik antara makhluk hidup seperti manusia, hewan dan tumbuhan lingkungan hidupnya (Riberu, 2002). Hal ini menunjukkan pada hakikatnya makhluk hidup di bumi ini tidak dapat hidup sendiri secara normal, tetapi akan saling berinteraksi dengan berbagai spesies yang ada.

Makhluk hidup tunggal biasa disebut individu, dan populasi merupakan kumpulan individu sejenis yang berinteraksi pada tempat dan waktu yang sama. Berbagai populasi dari spesies yang berbeda dan hidup bersama disebut komunitas. Satu kelompok yang memiliki ciri khas tertentu dan terdiri dari beberapa komunitas yang berbeda dikenal dengan ekosistem (Nurhamiyawan *et al.*, 2013).

Kompetisi dalam suatu ekosistem merupakan salah satu bentuk interaksi antar individu yang bersaing memperebutkan kebutuhan hidup yang sama. Pada individu hewan, kebutuhan hidup yang sering diperebutkan antara lain adalah makanan, sumber air, tempat berlindung atau bersarang dan pasangan untuk berkembang biak. Contoh kompetisi antar populasi hewan yaitu kambing dan sapi yang memakan rumput di wilayah yang sama atau harimau dan singa dalam berburu mangsa yang sama (Nurhamiyawan *et al.*, 2013).

Model yang terdiri atas dua spesies berbeda dengan salah satu dari keduanya menyediakan makanan untuk yang lainnya merupakan salah satu model interaksi spesies antara mangsa dan pemangsa yang populer dalam pemodelan matematika. Interaksi antar populasi ini dinamakan relasi *predator-prey*, dengan *prey* sebagai spesies yang dimangsa dan *predator* sebagai spesies yang memangsa (Du, 2007). Model *predator-prey* pertama kali dikenalkan oleh Lotka pada tahun 1925 dan Volterra pada tahun 1926, sehingga model ini juga disebut model Lotka-Volterra (Boyce & DiPrima, 2000).

Model Lotka Volterra belum memperhitungkan waktu yang diperlukan oleh *predator* untuk mencerna makanannya serta pada kenyataan bahwa makanan dari *prey* terbatas. Kemudian pada tahun 1950 Holling memperkenalkan fungsi respon. Fungsi respon dalam ekologi adalah jumlah makanan yang dimakan oleh *predator* sebagai fungsi kepadatan makanan (Hunsicker *et al.*, 2011). Dalam hal ini fungsi respon dibagi atas tiga macam, yaitu

fungsi respon tipe I, tipe II dan tipe III. Fungsi respon tipe I terjadi pada predator yang memiliki karakteristik pasif, atau lebih suka menunggu mangsanya, sebagai contoh *predator*-nya adalah laba-laba. Fungsi respon tipe II terjadi pada *predator* yang berkarakteristik aktif dalam mencari mangsa, sebagai contoh *predator*-nya adalah serigala. Ketika serigala berhasil menangkap mangsanya maka serigala juga memerlukan waktu untuk mencerna makanannya. Fungsi respon tipe III terjadi pada *predator* yang cenderung akan mencari populasi *prey* yang lain ketika populasi *prey* yang dimakan mulai berkurang. Sebagai contoh pada rusa tikus (*mice deer*) yang bertindak sebagai *predator* dengan kepompong kupu-kupu sebagai *prey*. Ketika jumlah kepompong meningkat maka populasi tikus rusa juga akan meningkat secara eksponensial, namun ketika jumlah kepompong mulai menurun maka tikus rusa cenderung untuk mencari populasi kepompong yang lebih tinggi.

Di dalam ekologi, fungsi respon pada model *predator-prey* menyatakan tingkat asupan konsumen (*predator*) sebagai fungsi kepadatan makanan (*prey*). Model *predator-prey* yang paling sederhana didasarkan pada model Lotka-Volterra. Model ini memiliki bentuk

$$\frac{dx}{dt} = ax - p(x)y \text{ dan } \frac{dy}{dt} = q(x)y - cy \quad (1)$$

Pada sistem Lotka-Volterra, fungsi respon $p(x)$ berbentuk $p(x) = ax$ dan $p(x) = q(x)$. Hal ini karena pada model ini waktu yang diperlukan *predator* untuk mencerna makanannya tidak diperhatikan. Tetapi, dalam kenyataannya ketika terjadi serangan *prey* oleh *predator*, maka secara realistik *predator* memerlukan waktu untuk mencerna makanannya (Roat, 2012).

Salah satu pengembangan lain dari model Lotka-Volterra adalah model yang dilakukan oleh Ruan & Xiao (2001), Liu & Chen. (2003), serta Tian & Xu (2011), dimana dalam model Lotka-Volterra diberikan penambahan fungsi respon tipe Holling II pada interaksi antara *prey* dan *predator*. Pada penelitian ini akan dibahas tentang analisis kestabilan model *predator-prey* dengan fungsi respon Holling tipe III. Dipilihnya fungsi respon Holling tipe III karena memiliki permasalahan yang sesuai dengan jenis *predator* yang cenderung akan mencari populasi *prey* yang lain ketika populasi *prey* yang dimakan mulai berkurang. Fungsi respon tipe Holling III ini telah memperhitungkan waktu untuk

memproses makanan pada saat *predator* mengkonsumsi makanannya. Hal ini ditandai dengan melambatnya tingkat serangan yang dilakukan *predator* terhadap *prey*. Melambatnya tingkat serangan karena pencarian makanan dan proses memakan merupakan dua perilaku yang saling eksklusif.

METODE PENELITIAN

Langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini, yaitu menentukan masalah, merumuskan masalah, studi pustaka, serta melakukan analisis dan pemecahan masalah dengan membuat pemodelan matematika pada sistem *predator-prey* dengan fungsi respon Holling tipe III, mencari solusi dari pemodelan matematika yang telah didapat.

Langkah-langkah untuk menentukan solusinya adalah sebagai berikut. (a) Membuat pemodelan matematika pada sistem *predator-prey* dengan fungsi respon Holling tipe III. (b) Mencari solusi dari pemodelan matematika yang telah didapat. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut. (1) Menentukan titik ekuilibrium. Titik $x_0 \in R^n$ disebut titik ekuilibrium dari $\dot{x} = f(x)$ jika $f(x_0) = 0$ (Perko, 1991). (2) Menentukan matrik jacobian. Bentuk umum matriks jacobian adalah sebagai berikut.

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix} \quad (2)$$

(Purnamasari *et al*, 2008).

(3) Menentukan nilai eigen. Misalkan A matrik $n \times n$ dan $x \in R^n, x \neq 0$. Vektor X disebut vektor eigen atau vektor karakteristik dari A jika $Ax = \lambda x$, untuk suatu $\lambda \in R$. Bilangan λ yang memenuhi persamaan di atas disebut nilai eigen atau nilai karakteristik. Vektor X disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan λ (Anton, 2006). (4) Menganalisis titik ekuilibrium berdasarkan sifat nilai eigen. Diberikan matriks jacobian $Jf(\bar{x})$ dari suatu sistem non linear, dengan nilai eigen λ . (a) Jika semua bagian real eigen dari matriks $Jf(\bar{x})$ bernilai negatif, maka titik ekuilibrium \bar{x} dari suatu sistem non linear tersebut stabil asimtotik lokal. (b) Jika terdapat paling sedikit satu nilai eigen matriks $Jf(\bar{x})$ yang bagian realnya positif, maka titik ekuilibrium \bar{x} dari suatu sistem non linear tersebut tidak stabil (Olsder, 1994).

Dipunyai persamaan-persamaan sebagai berikut.

$$\dot{x} = ax + by \text{ dan } \dot{y} = cx + dy \quad (3)$$

dengan a, b, c dan d konstanta-konstanta. Misalkan $ad - bc \neq 0$, maka titik $(0,0)$ adalah satu-satunya titik kritis dari sistem persamaan (3). Penyelesaian dari sistem persamaan (3) berbentuk $x = Ae^{\lambda t}$ dan $y = Be^{\lambda t}$, dimana λ adalah nilai dari matriks

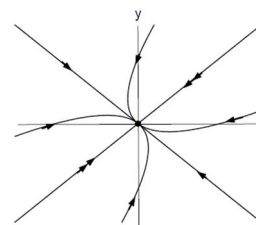
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

yaitu, λ merupakan akar persamaan karakteristik

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0 \quad (4)$$

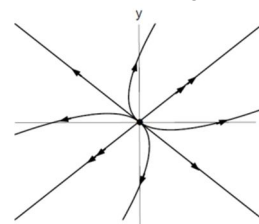
Potret phase dari sistem persamaan hampir seluruhnya tergantung pada nilai-nilai eigennya (λ_1 dan λ_2).

Jika nilai-nilai eigennya real tak sama dengan $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ ini disebut *node*: semua trayektori menuju ke tak nol yang berarti titik kritis nol adalah stabil. Contoh trayektori pada kasus ini dapat dilihat pada gambar 1.



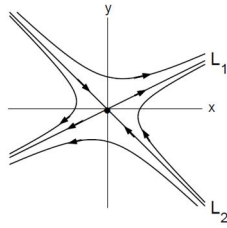
Gambar 1. Trayektori untuk *node point*

Jika nilai-nilai eigennya real tak sama dengan $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ ini disebut *nodal source*: semua trayektori keluar dari titik kritiknya menjadi tak stabil. Contoh trayektori pada kasus ini dapat dilihat pada gambar 2.



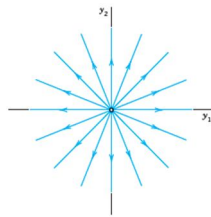
Gambar 2. Trayektori untuk titik *nodal source*

Jika nilai-nilai eigennya real tak sama dengan $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ ini disebut *saddle point*: semua trayektori akan menjauhi ke tak hingga sepanjang vektor eigen, ini mengakibatkan titik kritis akan selalu tak stabil. Contoh trayektori pada kasus ini dapat dilihat pada gambar 3.



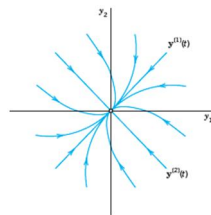
Gambar 3. Trayektori untuk *saddle point*

Jika nilai-nilai eigennya sama dengan dua vektor eigen yang bebas linear, maka akan diperoleh apa yang dinamakan *star point* atau *proper node*: bila $\lambda < 0$ maka titik kritiknya akan stabil dan tak stabil untuk $\lambda > 0$. Contoh trayektori pada kasus ini dapat dilihat pada gambar 4.

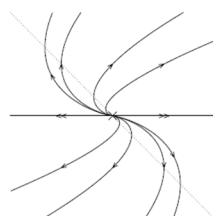


Gambar 4. Trayektori untuk *star point*

Jika nilai-nilai eigennya sama dengan satu vektor eigen, maka akan diperoleh apa yang dinamakan *improper node*: bila $\lambda < 0$ maka titik kritiknya akan stabil dan arah trayektorinya akan menuju ke titik nol, sedangkan untuk $\lambda > 0$ arah trayektorinya akan keluar meninggalkan titik nol dan titik kritiknya akan tak stabil. Contoh trayektori pada kasus ini dapat dilihat pada gambar 5 dan 6.

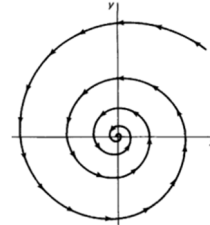


Gambar 5. Trayektori untuk *improper node* dengan $\lambda > 0$



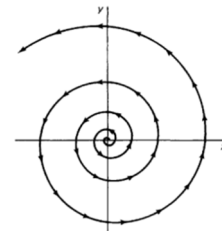
Gambar 6. Trayektori untuk *improper node* dengan $\lambda < 0$

Jika nilai-nilai eigennya kompleks $\lambda_{\pm} = \rho \pm iw$ dengan $\rho < 0$, maka akan menghasilkan perilaku yang disebut *stabel spiral*: semua trayektori akan menuju titik nol dan titik kritiknya akan stabil. Contoh trayektori pada kasus ini dapat dilihat pada gambar 7.



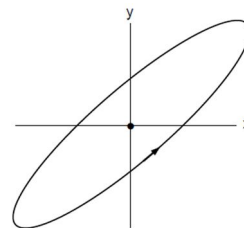
Gambar 7. Trayektori untuk *stabel spiral*

Jika nilai-nilai eigennya kompleks $\lambda_{\pm} = \rho \pm iw$ dengan $\rho > 0$, maka akan menghasilkan perilaku yang disebut *unstable spiral*: semua trayektori akan keluar meninggalkan titik nol dan titik kritiknya akan tak stabil. Contoh trayektori pada kasus ini dapat dilihat pada gambar 8.



Gambar 8. Trayektori untuk *unstable spiral*

Jika nilai eigennya imajiner murni, dalam kasus ini nilai eigennya dapat dinyatakan sebagai $i\lambda_{\pm} = \pm iw$ dalam hal ini solusi merupakan osilator stabil secara alami. Titik kritik dalam hal ini disebut *center point*. Trayektorinya berupa elips. Contoh trayektori pada kasus ini dapat dilihat pada gambar 9.



Gambar 9. Trayektori untuk *center point*

Untuk menunjang hasil analisis dinamik yang telah diperoleh dilakukan beberapa simulasi numerik pada program Maple 12.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Ada beberapa unsur-unsur yang berpengaruh terhadap model *predator-prey*. Unsur-unsur yang mempengaruhi laju pertumbuhan kepadatan spesies *prey* adalah tingkat konsumsi maksimum *predator*, pola pertumbuhan populasi, dan tingkat kejenuhan *predator*. Sedangkan unsur-unsur yang mempengaruhi laju pertumbuhan kepadatan spesies *predator* adalah tingkat konsumsi maksimum, tingkat kematian dan tingkat kejenuhan *predator*.

Model interaksi *predator-prey* dalam jaring makanan dua spesies terdiri dari produsen x yang disebut *prey* (mangsa) dan *predator* y (pemangsa). Model ini didasarkan pada asumsi dasar sebagai berikut: (a) Jumlah pertumbuhan *prey* (x) memiliki pola pertumbuhan logistik, (b) *predator* (y) mengikuti fungsi respon Holling tipe III, (c) pada *predator* dilakukan pemanenan pada tingkat yang sebanding dengan densitas, dan (d) *predator* memiliki tingkat kematian secara alami yang sama.

Berdasarkan asumsi di atas diperoleh model matematika *predator-prey* yang ditunjukkan pada sistem (5) berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dx_0}{dt_0} &= rx_0 \left(1 - \frac{x_0}{K}\right) - \frac{a_0 x_0^2 y_0}{\beta^2 + x_0^2} \\ \frac{dy_0}{dt_0} &= \frac{b_0 x_0^2 y_0}{\beta^2 + x_0^2} - \mu_0 y_0 - q_0 y_0\end{aligned}\quad (5)$$

dengan

$x_0(t)$: kepadatan spesies *prey* saat waktu t

$y_0(t)$: kepadatan spesies *predator* saat waktu t

a_0 : tingkat konsumsi maksimum *prey*

b_0 : tingkat konsumsi maksimum *predator*

r : koefisien laju pertumbuhan spesies *prey*,
 $r > 0$

β : tingkat kejenuhan *predator*

μ_0 : tingkat kematian *predator*, $\mu > 0$

q_0 : laju pemanenan *predator*, $q > 0$,

K : *carrying capacity* dari spesies *prey*, $K > 0$.

Diasumsikan $x_0(0) > 0$ dan $y_0(0) > 0$, yaitu mengingat setiap populasi memiliki potensi untuk berkembang biak. Didefinisikan $t_0 = \frac{t}{r}$, $x_0 = Kx$, $y_0 = Ky$, $a_0 = ra$, $b_0 = rb$, $\mu_0 = r\mu$, dan $q_0 = rq$.

Dari hasil pelinearan diperoleh sistem persamaan diferensial biasa nonlinear model *predator-prey* dua spesies yang lebih sederhana, yaitu pada sistem (6) berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(1-x) - \frac{ax^2y}{m^2+x^2} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{bx^2y}{m^2+x^2} - \mu y - qy\end{aligned}\quad (6)$$

$x(0) > 0, y(0) > 0$, dengan $m = \frac{\beta}{K}$.

Pada sistem persamaan (2) diperoleh tiga titik keseimbangan, yaitu $E_0(0,0)$, $E_1(1,0)$, dan

$$E_2 \left(m \sqrt{\frac{\mu+q}{b-(\mu+q)}}, m \frac{(1-m\sqrt{\frac{\mu+q}{b-(\mu+q)}})(1+\frac{\mu+q}{b-(\mu+q)})}{a\sqrt{\frac{\mu+q}{b-(\mu+q)}}} \right).$$

Ketiga titik ini ada jika $b > (\mu + q)$.

Hasil linearisasi di sekitar E_0 menghasilkan matrik Jacobian $J(E_0)$, yaitu

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -(\mu + q) \end{pmatrix}$$

dan diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = -(\mu + q)$. Oleh karena nilai λ_1 bernilai positif dan λ_2 bernilai negatif, maka dapat disimpulkan $E_0(0,0)$ merupakan *saddle point* (titik pelana). Semua trayektori akan menjauhi ke tak hingga sepanjang vektor eigen, ini mengakibatkan titik kritik akan selalu tidak stabil.

Matriks jacobian di sekitar E_1 adalah

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{a}{m^2+1} \\ 0 & \frac{b}{m^2+1} - (\mu + q) \end{pmatrix}$$

dan nilai eigen yang diperoleh, yaitu $\lambda_1 = -1$ dan $\lambda_2 = \frac{b}{m^2+1} - (\mu + q)$. Titik keseimbangan ini tidak stabil jika $\frac{b}{m^2+1} > \mu + q$ dan akan bersifat stabil jika $\frac{b}{m^2+1} < \mu + q$.

Linearisasi di sekitar E_2 diberikan matriks jacobian berikut.

$$J(E_2) = \begin{pmatrix} 1 - 2m\sqrt{A} - 2\frac{1-m\sqrt{A}}{1+A} & -\frac{aA}{1+A} \\ \frac{2b(1-m\sqrt{A})}{a(1+A)} & 0 \end{pmatrix}$$

dengan $A = \frac{\mu+q}{b-(\mu+q)}$. Setelah mendapatkan matriks jacobian tersebut langkah selanjutnya adalah mencari persamaan karakteristik dengan tahapan sebagai berikut.

$$\det(\lambda I - J) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{pmatrix} 1 - 2m\sqrt{A} - 2\frac{1-m\sqrt{A}}{1+A} & -\frac{aA}{1+A} \\ \frac{2b(1-m\sqrt{A})}{a(1+A)} & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda - \left(1 - 2m\sqrt{A} - 2\frac{1-m\sqrt{A}}{1+A}\right) & \frac{aA}{1+A} \\ -\frac{2b(1-m\sqrt{A})}{a(1+A)} & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + \left(-1 + 2m\sqrt{A} + 2\frac{1-m\sqrt{A}}{1+A}\right)\lambda + \left(\frac{aA}{1+A}\right)\left(\frac{2b(1-m\sqrt{A})}{a(1+A)}\right) = 0$$

Diperoleh persamaan karakteristik

$$\lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0.$$

Dengan

$$p_1 = -1 + 2m\sqrt{A} + 2\left(\frac{1-m\sqrt{A}}{1+A}\right) = 2\left(m\sqrt{A} - 1\right)\left(1 - \frac{1}{1+A}\right) + 1,$$

$$p_2 = \left(\frac{aA}{1+A}\right)\left(\frac{2b(1-m\sqrt{A})}{a(1+A)}\right) = \frac{2bA(1-m\sqrt{A})}{(1+A)^2}, \quad \text{dan} \\ A = \frac{\mu+q}{b-(\mu+q)}.$$

Akar-akar persamaan karakteristik tersebut adalah sebagai berikut.

$$\lambda_1 = \frac{-p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2} \quad \text{dan} \quad \lambda_2 = \frac{-p_1 - \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2}.$$

Kasus $m\sqrt{A} > 1$

$$\text{Jelas } p_1 = 2\left(m\sqrt{A} - 1\right)\left(1 - \frac{1}{1+A}\right) + 1 > 0 \quad \text{dan} \\ p_2 = \frac{2bA(1-m\sqrt{A})}{(1+A)^2} < 0.$$

$$\text{Ditunjukkan } p_1^2 - 4p_2 > 0.$$

$$\text{Tulis } 4p_2 = -k \text{ dengan } k > 0.$$

$$\text{Jadi } p_1^2 - 4p_2 > 0 \Leftrightarrow p_1^2 + k > 0.$$

$$\text{Ditunjukkan } \lambda_1 > 0.$$

$$\text{Jelas } 0 < p_1^2 < p_1^2 - 4p_2.$$

$$\Leftrightarrow 0 < |p_1| < \sqrt{p_1^2 - 4p_2}.$$

$$\text{Jelas } p_1 > 0.$$

$$\text{Jelas } \lambda_1 = \frac{-p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2} > 0.$$

Jadi, titik ekuilibrium E_2 untuk $m\sqrt{A} > 1$ bersifat tidak stabil karena λ_1 bernilai positif.

Kasus $m\sqrt{A} < 1$

$$\text{Jelas } p_2 = \frac{2bA(1-m\sqrt{A})}{(1+A)^2} > 0 \quad \text{dan} \quad D = p_1^2 - 4p_2 < p_1^2.$$

$$\text{Kasus } D > 0 \Leftrightarrow \sqrt{D} > 0 \Leftrightarrow 0 < \sqrt{D} < |p_1|.$$

$$\text{Jelas } \lambda_1 = \frac{-p_1 + \sqrt{D}}{2} < 0 \quad \text{dan} \quad \lambda_2 = \frac{-p_1 - \sqrt{D}}{2} < 0.$$

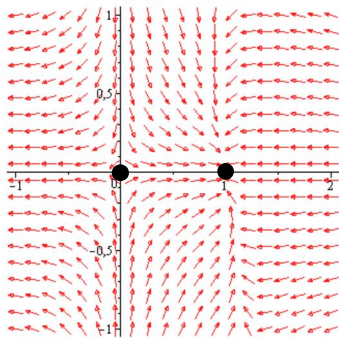
Jadi, titik ekuilibrium E_2 untuk $\sqrt{A} < 1$ dengan $p_1 > 0$ merupakan titik ekuilibrium yang stabil, karena λ_1 dan λ_2 bernilai negatif.

$$\text{Kasus } D < 0 \Leftrightarrow \sqrt{D} \in \mathbb{C}.$$

$$\text{Jelas } \lambda_1 = \frac{-p_1 + \sqrt{D}}{2} < 0 \quad \text{dan} \quad \lambda_2 = \frac{-p_1 - \sqrt{D}}{2} < 0.$$

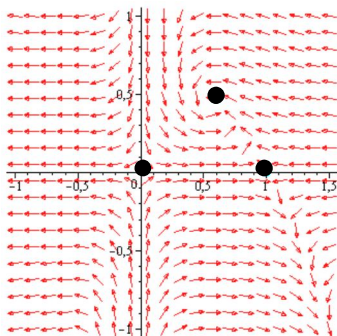
λ_1 dan λ_2 mempunyai bagian real negatif, sehingga mengakibatkan titik ekuilibrium E_2 stabil.

Gambar 10 menunjukkan hasil simulasi untuk titik keseimbangan E_0 dengan menggunakan parameter $a = 0.8, b = 2, m = 2, \mu = 0.1$ dan $q = 0.5$. Titik ekuilibrium $(0,0)$ dalam kondisi apapun selalu merupakan titik pelana (*saddle point*). Hal ini mengakibatkan titik ekuilibrium $(0,0)$ bersifat tidak stabil karena semua trayektori menjauhi titik $(0,0)$. Gambar 4.1 juga menunjukkan bahwa titik ekuilibrium $(1,0)$ dengan syarat $b > \mu + q$ dan $\frac{b}{m^2+1} < \mu + q$ merupakan *node point*. Hal ini disebabkan karena semua trayektori menuju titik $(1,0)$ sehingga titik $(1,0)$ bersifat stabil. Jadi pada titik ekuilibrium $(1,0)$ terjadi kestabilan jumlah spesies *predator* dan *prey*. Hasil trayektori pada kasus ini dapat dilihat pada gambar 10.



Gambar 10. Trayektori untuk titik ekuilibrium $E_0(0,0)$

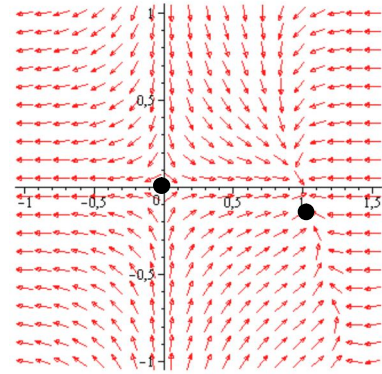
Gambar 11 menunjukkan hasil simulasi untuk titik keseimbangan E_0, E_1 dengan syarat $b > \mu + q$ dan $\frac{b}{m^2+1} > \mu + q$, serta titik E_2 dengan $b > \mu + q, m\sqrt{A} < 1, p_1 > 0$ dan $D > 0$. Parameter yang digunakan yaitu $a = 0.9, b = 0.9, m = 0.4, \mu = 0.1$ dan $q = 0.5$. Hasil trayektori pada kasus ini dapat dilihat pada gambar berikut



Gambar 11. Trayektori untuk titik ekuilibrium E_0, E_1 dengan $b > \mu + q$ dan $\frac{b}{m^2+1} > \mu + q$, serta titik E_2 dengan $b > \mu + q, m\sqrt{A} < 1, p_1 > 0$ dan $D > 0$.

Pada kondisi ini, titik ekuilibrium E_1 bersifat tidak stabil sedangkan untuk titik E_2 bersifat stabil.

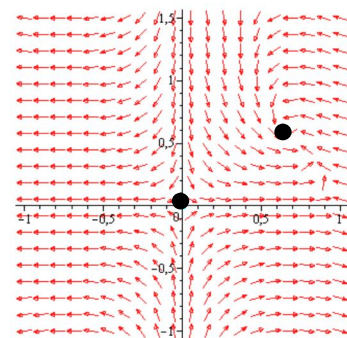
Perilaku lengkap dari solusi sistem *predator-prey* untuk titik E_2 dengan syarat $b > \mu + q, m\sqrt{A} > 1$ dan $p_1 > 0$ dapat dilihat pada gambar berikut 12.



Gambar 12. Trayektori untuk titik ekuilibrium E_2 dengan syarat $b > \mu + q, m\sqrt{A} > 1$ dan $p_1 > 0$

Parameter yang digunakan yaitu $a = 0.8, b = 1.5, m = 1.3, \mu = 0.1$ dan $q = 0.5$. Titik ekuilibrium E_2 tidak memenuhi persamaan. Hal ini mengakibatkan titik E_2 bukan merupakan solusi.

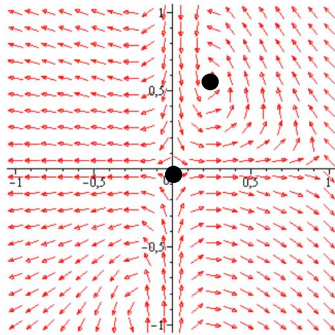
Perilaku lengkap dari solusi sistem *predator-prey* untuk titik ekuilibrium E_2 dengan $b > \mu + q, m\sqrt{A} < 1$, dan $D > 0$ dapat dilihat pada gambar 13.



Gambar 13. Trayektori untuk titik ekuilibrium E_2 dengan $b > \mu + q, m\sqrt{A} < 1$, dan $D > 0$.

Trayektori tersebut menggunakan parameter $a = 0.8, b = 1.2, m = 0.7, \mu = 0.1$ dan $q = 0.5$. Diperoleh titik E_2 yang bersifat stabil.

Perilaku lengkap dari solusi sistem *predator-prey* untuk titik ekuilibrium E_2 dengan syarat $b > \mu + q$, $m\sqrt{A} < 1$, $p_1 > 0$ dan $D < 0$ dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 5. Trayektori untuk titik ekuilibrium E_2 dengan $b > \mu + q$, $m\sqrt{A} < 1$, $p_1 > 0$ dan $D < 0$.

Trayektori tersebut menggunakan parameter $a = 0.8$, $b = 1.5$, $m = 0.3$, $\mu = 0.1$ dan $q = 0.5$. Pada kondisi ini titik ekuilibrium E_2 bersifat stabil.

SIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian dapat disimpulkan sebagai berikut. (1) Model matematika *predator-prey* dua spesies dengan fungsi respon Holling tipe III adalah sebagai berikut

$$\frac{dx_0}{dt_0} = rx_0 \left(1 - \frac{x_0}{K}\right) - \frac{a_0 x_0^2 y_0}{\beta^2 + x_0^2}$$

$$\frac{dy_0}{dt_0} = \frac{b_0 x_0^2 y_0}{\beta^2 + x_0^2} - \mu_0 y_0 - q_0 y_0$$

$$x_0(0) > 0, y_0(0) > 0.$$

(2) Sistem persamaan tersebut memiliki 3 titik keseimbangan dengan beberapa syarat batas dalam sistem tersebut. (3) Hasil simulasi numerik sesuai dengan perhitungan analitik.

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H. 2006. *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta: Erlangga.
- Boyce, W.E. & DiPrima, R.C. 2000. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. New York:

Department of Mathematical Sciences Rensselaer Polytechnic Institute.

- Du, N. 2007. Dynamics of Predator-Prey Population with Modified Leslie-Gower and Holling-Type II Schemes. *Acta Mathematica Vietnamica*, 32(1): 99-111.
- Hunsicker, M. E., Ciannelli, L., Bailey, K. M., Buckel, J.A., White, J. W., Link, J. S., Essington, T. E., Gaichas, S., Anderson, T. W., Brodeur, R. D., Chan, K. S., Chen, K., Englund, G., Frank, K. T., Freitas, V., Hixon, M. A., Hurst, T., Jhonson, D. W., Kitchell, J. F., Reese, D., Rose, G. A., Sjodin, H., Sydeman, W. J., Veer, H. W. V. D., Vollset, K., & Zador, S. 2011. Functional Responses and Scaling in Predator-Prey Interactions of Marine Fishes: Contemporary Issues and Emerging Concepts. *Ecology Letters*.
- Liu, X. & Chen, L. 2003. Complex Dynamics of Holling Type II Lotka-Volterra *Predator-Prey* System with Impulsive Perturbations on the Predator. *Chaos, Solutions and Fractals*, 16: 311-320.
- Nurhamiyawan, E. N. L., Prihandono, & Helmi. 2013. Analisis Dinamika Model Kompetisi Dua Populasi yang Hidup Bersama di Titik Keseimbangan Tidak Terdefinisi. *Bimaster*, 2(3):197-204.
- Olsder, G. J. 1994. *Mathematic System Theory*. The Netherlands: Delftse Uitgevers Maatscappij.
- Perko, L. 1991. *Differential Equation and Dynamical System*. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Purnamasari, D., Faisal., & Noor, A. J. 2009. Kestabilan Sistem *Predator-Prey* Leslie. *Jurnal Matematika Murni dan Terapan*, 3(2):51-59.
- Riberu, P. 2002. Pembelajaran Ekologi. *Jurnal Pendidikan Penabur*, 1: 125-132.
- Roat, M. 2012. Bifurkasi Hopf pada Sistem Predator Prey dengan Fungsi Respon

Tipe II. *Journal Universitas Negeri Yogyakarta*, 3(3):1-2.

Ruan, S. & Xiao, D. 2001. Global Analysis in a Predator-Prey System with Nonmonotonic Functional Response. *SIAM J Appl Math*, 61(4):1445–1472.

Tian, X. & Xu, R.. 2011. Global Dynamics Of A Predator Prey System with Holling Type II Functional Response. *Modelling and Control*, 16 : 242–25